КРАТКИЙ ОБЗОР НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А.Л.ШАГИНЯНА

Научные интересы А.Л.Шагиняна были довольно широки, они охватывали обширную область теории приближения различных классов функций полиномами, общую теорию аналитических и геометрических функций, в том числе с точки зрения аппроксимации функций гармоническими полиномами, а также как самостоятельные объекты исследования. В рамках его интересов находились также однолистные аналитические функции, квазианалитические классы функций, нормальные семейства аналитических функций. Особо следует отметить полученное им интересное неравенство для ограниченных в |z|<1 аналитических функций.

Перейдем к беглому ознакомлению с узловыми результатами А.Л.Шагиняна.

1. Начнем с теории полиномиальных приближений, где им получены первые важные результаты в наиболее трудной тематике по приближениям в областях некаратеодоровского типа.

Известно, что каждая область каратеодори может быть представлена в виде ядра убывающей сходящейся последовательности односвязных областей, такой, что:

$$\overline{G} \subset G_{n+1},\ \overline{G_{n+1}} \subset G_n,\ n=1,2,\ldots.$$

Ограниченная односвязная область G комплексной плоскости такова, что граница G совпадает с границей G_∞ - дополнительной $\overline{G}$ и содержит точку z=∞.

Известна следующая теорема Маркушевича. Пусть B – область каратеодори. Если $f(z) \in A(B)$ (то есть аналитическая в области B и $\iint\limits_B |f(z)|^2 d\sigma = \iint\limits_B |f(z)|^2 dxdy \langle c \langle \infty$), тогда из условий $\iint f(z)\overline{z}^n dz = 0$, n=0,1,2,…, следует $f(z) \equiv 0$.

Это значит, что система функций $\{z^n\}_0^\infty$ полна в семействе функций $A(B)$.

М.В.Келдышем был тогда приведен пример области некаратеодорового типа, где нет вышеуказанной полноты.

В статье же А.Л.Шагиняна (ДАН СССР, том XXVII, N4, 1940, представлена академиком С.Н.Берштейном), приводится пример семейства областей для которых оказываются невозможными такого же типа приближения.

В другой статье: "К вопросу об аппроксимации в среднем в комплексной области" (представлена С.Л.Соболевым, Известия АН СССР **5**, 1941) доказана следующая теорема.

Теорема . Существует область G, внутри которой система полиномов полна и замыкание которой совпадает со всей плоскостью, тогда как сама она отлична от всей плоскости.

Таким образом оказывается то, что возможно для жордановых областей, вообще говоря, становится невозможным для нежордановых и особенно некаратеодоровых областей.

С этого и берет начало исследование А.Л.Шагиняна по весовым приближениям функций полиномами и рациональными функциями.

Для решения поставленных задач пришлось найти подходы к неизбежной задаче о том в каких метрических характеристиках областей некаратеодоровых типов – семейство алгебраических полиномов, точнее говоря система функций $\{z^n\}_0^\infty$ - заведомо будет неполной.

В связи с этим вопросом начались исследования А.Л.Шагиняна по нормальным семействам, аналитических в той или другой области функций.

Напомню, что семейство функций голоморфных в области D нормально в этой области, если из всякой бесконечной последовательности функций этого семейства можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в D к предельной функции, которая может быть и тождественной бесконечностью.

Известны также теоремы Стильеса и ее обобщение – теорема Витали.

Теорема Стильеса. Дана последовательность функций голоморфных и ограниченных в своей совокупности внутри области D. Если эта последовательность сходится в некоторой внутренней области, то она сходится равномерно всюду внутри D.

Теорема Витали. Если последовательность функций, голоморфных, гармоничных и ограниченных в своей совокупности в области D, сходится на множестве точек, имеющих хотя бы одну предельную точку внутри D, то последовательность сходится равномерно всюду внутри этой области.

Так вот, рассматривается область ограниченной линией L_1 область D^* (см. статью А.Л.Шагиняна «О полноте семейств аналитических функций в комплексной области", Сообщение сектора математики и механики АН Арм ССР, 1947). Для класса функций $\{g(z)\}$ регулярных внутри L_1 и удовлетворяющих в окрестности точки A неравенству
$|g(z)| \leq \exp\{|z|^{\pi/\beta} \ln\frac{1}{|z|} \ln\frac{1}{=|z|}(\ln\frac{1}{\leq z})^m\}$ доказана следующая теорема.

Теорема . Пусть область D удовлетворяет дополнительным условиям

$$\int_0^a \frac{\tau_{u,\kappa}}{\rho} d\rho \langle \infty \,,\ \int_0^a \frac{\delta_{u,\kappa}}{\rho^2} d\rho \langle \infty ,\ \int_0^a \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \tau_i(\rho) d\rho \langle \infty \qquad \text{(a)}$$

тогда семейства функций $\{g_\eta(z)\}$, аналитических в области S, где $\partial S = L_1 = L_{11} \cup L_{22}$, удовлетворяющих условиям (a) и $\iint_S |g_\eta(z)|^2 \, dxdy \langle \infty$, являются нормальным. Не полна в луночке.

Это связано с тем, что согласно теореме Стильеса функция $\{g_{n_k}(z)\}$ сходится во всей области $S \supset D$, поэтому предельная функция $f(z)$ должна быть аналитической в области S, т.е. в области с границами $\Phi_{12}(\rho)$ и $\Phi_{21}(\rho)$, чего быть не может например для $\frac{1}{z-a}$.

Для получения условий полноты для таких областей, при весовом приближении приводится Теорема V для области Δ_0, ограниченной окружностями

$C_1(|z|=1)$, $C_2 = (x+\frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{9}{16}$.

Теорема V. Для любой функции $f(z) \in' (\Delta)$ можно подобрать последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, так, чтобы в замкнутой области $\overline{\Delta}$, $Sup \ e^{-\frac{P}{\rho}|\ln\rho|} \,|f(z) - P_n(z)| \geq 0$.

Теорема VI. При $\tau(\rho) \langle e^{-\frac{P}{\rho}|\ln\rho|}$ для любой функции $f(z)$ - аналитической в указанной области Δ_ρ и $\iint_\Delta |f(z)|^2 dz \langle C \langle \infty$ в классе полиномов $P_n(z)$ возможна аппроксимация $\inf \iint_\Delta |f(z) - P_n(z)|^2 dxdy = 0$. Невозможность существенного уточнения этой теоремы следует из теорем I и II той же работы.

Следует отметить, что в тот период в связи с войной, Келдыш и Лаврентьев были заняты вопросами обороны, Смирнов оказался в эвакуации, и фактически Шагинян стал ведущим специалистом в данной области. И он с честью справился с трудной задачей не только в поисках путей решения трудных задач но и доказать состоятельность найденного им метода решения разнообразных задач в уже выбранной области научной деятельности. Более того, он показал высокий профессиональный уровень в осуществлении намеченного плана для областей некаратеодоровского типа в том числе неограниченных, и разработал широкий план получения почти точных количественных результатов для различных областей и в различных весовых метриках.

Описание таких областей, классов функций и аппроксимационных систем полиномов займет много времени и я ограничусь указанием на пару легко формулируемых теорем из хорошо известной работы “О полноте семейств аналитических функций в комплексной области” (Сообщения сектора математики и механики АН Арм.ССР, 1947, стр. 3-60).

В этой работе рассматриваются неограниченные односвязные области E - со связными дополнениями внутри параболы $y^2 = ax, \quad a\rangle 0$, где $T(\rho)$ - линейная мера дуг отсекаемых областью E окружности $|z| = \rho$, $N(E)$ - класс функций $f(z)$ регулярных в E и непрерывных вплоть до конца контура, E_2 - класс функций $f(z)$ регулярных в E и удовлетворяющих условию $\iint\limits_E |f(z)|^2 dxdy \langle \infty$.

<u>Теорема XII</u>. В области E при условии

$$T(\rho) = \exp(-C\,|z|^{1/2}\,(\ln|z|)^2),$$

$$\inf \iint\limits_E |f(z) - P_n(z)|^2 dxdy = 0. \qquad \text{(a)}$$

При $T(\rho) = \exp(-\frac{|z|^{1/2}}{\ln_S|z|\cdots(\ln_s|z|)^{1+\varepsilon}})$, где $\varepsilon\rangle 0$ произвольное число, s - натуральное число $(\ln|z| = \ln\ln\cdots_s\cdots\ln|z|)$, равенство (а) вообще говоря, не имеет место.

<u>Теорема XV</u>. Если E произвольная односвязная область со связным дополнением внутри полосы $|\operatorname{Im} z| \langle a$, то для любых $f(z) \in N(E)$ ($f(z)$ - аналитическая и ограниченная в E непрерывная вплоть до контура) и существовании $\iint\limits_E |z|^n dxdy \quad n = 1,2,....$,

$$\inf Sup\{\exp[-C|z|(\ln|z|)^2 \, |f(z) - P_n(z)|]\} = 0 \,, \quad C \rangle 0 \qquad\qquad (б)$$

При весе $\exp[-\frac{|z|}{\ln|z \cdots (\ln|z|)^{1+\varepsilon}|}]$, такая аппроксимация вообще говоря, невозможна.

Далее получен например такой результат.

Если $f(z)$ голоморфна и ограничена в E и непрерывна вплоть до границы, где E произвольная односвязная область со связным дополнением внутри угла $|\arg z| \langle \frac{\pi}{2\alpha}$, тогда

$$\inf_{\{P\}}\{e^{-|z|^{\beta}(\ln|z|)^2} \, |f(z) - P(z)|\} = 0 \,, \; (\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 2).$$

Если же весовая функция $e^{-P(|z|)}$ такова, что $\int\limits_0^{\infty} \frac{P(r)}{r^{1+\beta}} dr \langle \infty$, то система полиномов вообще не полна в E.

Отметим, что в этой же работе доказывается также некоторый аналог (разновидность) известной теоремы Лаврентьева о том, что любую непрерывную функцию $f(z)$ на нигде не плотных и не разбивающих плоскость ограниченных множествах Q можно аппроксимировать полиномами.

А.Л.Шагиняном доказана следующая теорема.

<u>Теорема</u>. Если E нигде не плотная совершенная совокупность, не разбивающая плоскость внутри угла $|\arg z| \langle \frac{\alpha}{2}$, то любую непрерывную на E функцию $f(z)$ можно аппроксимировать в смысле

$$Sup\{\exp[-|z|^{\frac{\pi}{2\pi-2}} (\ln|z|)^2]\, |f(z) - P_n(z)|\} \to 0 \,.$$

Такая теорема была доказана С.Н.Бернштейном для вещественной оси, при весовой функции $\exp\{-|z|(\ln|z|)^2\}$.

2. В последующих подобных работах вопросы среднеквадратичных приближений полиномами, то есть вопросы полноты или неполноты разрешаются путем приведения вопроса к построению ортогональных систем по области полиномов.

Это по-видимому можно об'яснить тем, что в то время теория ортогональных систем полиномов для областей не была разработана достаточно хорошо. А.Л.Шагиняном был сделан очередной шаг на пути улучшения результатов.

Следует отметить, что, как об этом неоднократно заявлял А.Л.Шагинян, он по работам Тамаркина и Шохата знал и о возможности использования решения проблемы Ватсона для полиномиальных моментов по областям и об этом сообщил своим ученикам.

Сам же он почему-то не использовал эту возможность. Так случилось еще и потому, что последний метод эффективен для областей более простого вида.

3. Со временем интересы А.Л.Шагиняна отошли от теории аппроксимации и у него появились другие интересы, связанные с вопросами общей теории функций.

Теория функций квазианалитических классов нашла отражение в некоторых работах А.Л.Шагиняна.

Например в статье "Об одной задаче теории квазианалитических функций" (ДАН Арм.ССР, X, N9, 1949), рассматривается класс C_A, где $f(x) \in C_A$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f^{(n)}(x) |^2 dx \leq B^n A_n, \quad n = 0,1,2,...$$

Была даказана следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Если $f(x) \in C_A$ и $f^{(2\kappa)}(x) = 0$, $f^{(2\kappa+1)}(\beta) = 0$, $k = 0,1,2,...$, то при любых заранее заданных α и β, ($\alpha \neq \beta$)

$$f(x) \equiv 0.$$

В статье "Об одном квазианалитическом классе функций" (ДАН Арм.ССР, IX, N1, 1948), также рассматривается вопрос единственности, вернее вопрос совпадения двух определенных в областях B_1 и B_2 аналитических функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где области B_1 и B_2 имеют общую граничную точку A, при дополнительных условиях $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln|f_1(z_1(\sigma)) - f_2(z_2(\sigma))| \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = -\infty$, ($B_1 \to z_1(\sigma) \to$ в левую полуплоскость, $B_2 \to z_2(\sigma) \to$ в правую полуплоскость, а общая точка $\to$ в ∞) получено утверждение о том, что $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

А.Л.Шагинян получил интересные результаты занимаясь вопросами аппроксимации рациональными функциями, а также вопросами аппроксимаций аналитических функций целыми функциями (см. статью ”О приближении аналитических функций целыми функциями”, Известия АН Арм ССР, серия физ-мат наук, XI, N6, 1958) и так далее.

19.12.1996 г. Профессор Г.В.Бадалян