ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ

ՀԱՄԱՌՕՏՈՒԹԻՒՆ

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ

ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆ

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ

Ո Ւ Ս Ո Ղ Ո Ւ Թ Ի Ւ Ն

ԶՈՐ ՅՕՐԻՆԵԱԼ Է

Հ. ՂՈՒԿԱՍ ՏԷՐՏԷՐԵԱՆՑ

ՅԱՇԱԿԵՐՏԱՑ ՄԵԾԻ ՀՕՐՆ

ՄԽԻԹԱՐԱՅ

Ա Տ Ո Մ Ա Ր

ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆ ԵՒ ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ի Վ Ի Ե Ն Ն Ա

Ի ՎԱՆՍ Գ. Մ. ԱՍՏՈՒԱԾԱԾՆԻ

ՌՄՂԲ. 1843

ՅԱՌԱՋԱԲԱՆ

ԱՇԱԿԵՐՏԵԱԼՔՆ ուսողութեանս ինքնին տեսանիցեն զճշմարտապատում ճառս ուսողութեան, եւ զշահաւոր հրահանգս, զոր նոյն քաղաքային իւրաց մատուցանիցէ, եւ եթէ զիարդ ի խորս մտեալ կշռութեանց իւրաց՝ զհամեմատութիւնսն մանր կրկտիցէ, եւ որդունակ զօրէնս գիտութեանցն լուսաւորս առնիցէ. որովք անդստին յանձանց կարիցեն առնել դատաստան, եթէ դուռն է սա այլոց գիտութեանց, եւ կարեւոր ամենայն մարդոյ, որ կամիցի ի գիտութիւնս զարգանալ, եւ զիւր զհայրենի ժողովուրդն պայծառացուցանել, եւ իւրաց քաղաքին վերակացու լինել: Որ կամիցին զճշմարտութիւն իւրացն ճանաչել, միտ եդեալ նայեսցի, եթէ յորչափ ինչ հնոց ժամանակաց հետէ իւր սիրելիս գտեալ իցէ ուսողութիւն, ըզՓիւնիկեցիսն ասեմ եւ զԵգիպտացիս, եւ զՅունաց եւ զԱղեքսանդրացւոց իմաստունս. եւ դարձեալ հայեսցի ընդ Եւրոպացւոց ժողովուրդն, ընդ ազգսն հրահանգեալս, եւ ընդ արագ արագ յառաջադէմ խաղալ գիտութեանց աշխարհին եւ ճարտարութեանց, եւ ընդ գտանել շահաւոր գիւտիցն, որք պտուղք են ուսողութեան, եւ զայնս ի կշիռ համեմատութեան բերցէ ընդ ազգս տգէտս եւ խամս: Արդ եւ մեր կէտ իմն նպատակի առաջի եդեալ զմեր զհայրենի ժողովուրդն պայծառացուցանել, եւ զմատեանս գիտութեանցն, որ ի ձեռն պատճառաց զիրսն յանդիման կացուցանիցեն, սփռել, զի՞նչ ինչ մարթ էր մեզ առաւել քան զուսողութիւնս կարեւոր համարել. զոր ուսեալ մանկտւոյն, եւ որպէս թէ ընդ անդաստակս լուսաւոր ապարանիցն գիտութեան մտեալ, այնուհետեւ մի ըստ միոջէ ընդ այլ ճարտարութիւնս, որպէս ընդ աստիճանս ելանել մարթայցեն:

Ի մատենիս զհետ գնացաք երեւելի երեւելի մատենագրաց, որ ի մեր ժամանակս յԵւրոպացւոց աշխարհին գտանին, որք են Սաղոմոն, Ապպեղտաւէր, Կնար եւ Պեռնարդոս Լեղերիոս, եւ այլքն եւս: Եւ զի առաջին է այս մեր մատեանս ի Հայոց ազգիս, եւ դարձեալ զի սակաւք գտանին վարդապետք ուսողութեան, վասն այսորիկ փոյթ յանձին կալաք զցուցմունս կանոնացն երկայնագոյնս եւ լայնագոյնս կարգել, որպէս զի այլ իւրաքանչիւր յանձնէ իսկ կարիցէ ուսանել. թէպէտ եւ զայն եւս խոստանամք, եթէ առանց ուսուցչի կարի դժուարին ուսանելն է, եւ զայն ի գլուխ հանել: Աստէն իսկզբանս զգուշացուցանեմք զմանկտին եւ զվարդապետս, մի ինչ յուսանելն կամ յուսուցանել ի բաց թողուլ, վայրապար կամ ոչ կարեւոր համարեալ, քանզի զմիմեանց կախեալ կան օրէնք ուսողութեան, եւ առանց զսկզբունսն ուսանելոյ չէ մարթ ի սմին յառաջադէմ խաղալ: Զանուանս որովք վարեցաք, ջանացաք ի գրոց մերոց մատենագրացն առնուլ, եւ այնպիսիս ինչ ընտրեցաք, որպէս զի անուանքն չիցեն ընդդէմ օրինաց Հայերէն լեզուիս, եւ զայն զորոց բանքն իցեն յայտնեալ նշանակիցեն. յորոց առաւել պայծառութիւն, եդաք զանուանս ի վախճան գրոցս, եւ հանդէպ նոցա զգերմաններէն եւ զգաղղիերէն զօրութիւնս նոցա: Յետ այսորիկ տայցեմք զերկրաչափութեան գիրս, որ երկրորդ տոմարն լինիցի ուսողութեան, զորոյ զտեղեկութիւնս անդէն իսկզբան ճառին տայցեմք:

Մեր ակնկալութիւն այն է, եթէ Հայոց ազգս առաւելեալ ի գիտութեան եւ յիմաստութեան, յառաջադէմ լիցի եւ զբարձրագոյնն եւս ուսանել, եւ զճշմարտութիւն այսոցիկ գիտութեանց ծանուցեալ, փառաւոր առնիցէ զանվրէպ ճշմարտութիւնն աստուածեղէն բնութեան, յորոյ ի փառս նուիրեմք զմեր դուզնաքեայ աշխատութիւն, զոր վաստակեցաք յօգուտ մերոյ հայրենի ժողովրդեան:

ՊԱՏՄՈՒԹԻՒՆ

ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ

ՍԿԻԶԲՆ մաթեմատիկեան ճարտարութեան կորուսեալ է ի խաւարի անդ հնոց ժամանակաց: փիւնիկեցիք համարին եթէ գտին կամ սփռեալ տարածեցին զհամարողութիւն, եւ Եգիպտացիք ասին առաջնորդ լինել երկրաչափութեան: Որոց գիտութիւնն անհնարին ինչ է եթէ երեւելի լինել իցէ, քանզի այն ճշմարիտ է, եթէ նախ զառաջինն Թալէս Միղետացի վեցհարեւր քառասուն ամօք յառաջ քան զկենարարն, ուսոյց զբարձրութիւն եգիպտական բրգանցն ի ստուերէ անտի նոցա չափել, եւ նոյն այր իմաստուն ի Յունաց աշխարհէն, զհաւասարութիւն երկուց անկեանց ի խարըսխի անդ հաւասարասրուն երեքանկեանցն եցոյց, եւ դարձեալ զառաջինն Պիւթագորաս հինգհարեւր իննսուն ամօք յառաջ քան զՔրիստոս, զառածն որ կից ի նորին անուն Պիւթագորեան անուանի, յայտ յանդիման կացոյց: Նմա սակայն եւ այն իսկ առանց յերկուանալոյ է, եթէ Յունաց աշխարհն յառաջադէմ եղեւ յոյժ յուսողութեան: Իպպոկրատէս Քիացի չորեքհարեւր յիսուն ամօք յառաջ քան զՔրիստոս, եւ Պղատոն երեքհարեւր իննսուն ամօք, եւ նորին աշակերտք զայն ընդ ամենայն կողմանս աշխարհին տարածեցին, եւ երեքհարեւր ամօք յառաջ քան զՔրիստոս պայծառացաւ Եւկղիդէս, որ ի հնդետասան մատեանս*)

*) Եւկղիդեայ երկրաչափութեան գտանի ի մեզ ի մերոց նախնեաց փոխեալ ի հայ:

ժողովեաց զաշխատութիւն իւրոց նախնեաց, որք եւ ի մեր իսկ ժամանակս օրինակ ճշտութեան եւ ի սկզբանց խօսելոյ ճանաչին: Զսոցա զհետ եկն Արքիմիդէս Սիրակուսացի երկերիւր յիսուն ամօք յառաջ քան զՔրիստոս, այր երկրաչափ հնոց ժամանակաց որ ոչ զուսողութիւնն եւեթ նոր տեղեկութեամբք պայծառացոյց, ընդ որ զարմանալ արժան է, եթէ զիարդ սակաւ եւ դոյզն նպաստիւք այնչափ յառաջադէմ զարգացաւ. այլ եւ նորօք հայրենեացն բազում շահ եւ օգուտ եղեւ: Յետ հնգետասան ամաց Արքիմիդեայ մեռանելոյ, երեւեցաւ Ապողոնիոս ի Պամփիւլեայ Պերգամացւոց, որում իւր ժամանակակիցքն Մեծ երկրաչափ անուն եդեալ կարդային: Ի նորա մատենիցն սակաւք առ մեզ հասին, յորոց ոմանք ընիկ բարբառովն գրեալ են, եւ կէսքն յԱրաբացւոց լեզու փոխախեալ. եւ ի սոցանէ իսկ մարթեմք նմա զառաջին կարգն յետ Արքիմիդեայ շնորհել: Յետ արանցս այսոցիկ, որոց ժամանակն Ոսկեղէն դար երկրաչափութեան հնոց ժամանակաց ճանաչի, գիտութիւնս, որպէս եւ բովանդակ իսկ ուսողութիւն՝ եւս քան զեւս պայծառացաւ. Մենելաւոս ի յիսներորդ հինգերորդ ամի Կենարարին, եւ Դիոփանդոս յերեքհարիւրորդ յիսներորդ ամի, Պապպոս եւ Դիոկղէս յերեքհարիւրորդ յիսներորդ հինգերորդ ամի, արք հոյակապք յԱղեքսանդրացւոց քաղաքէն, որ ընդ ժամանակսն ընդ այնոսիկ որպէս Միջոց գիտութեանց համարէր, մանաւանդ ուսողութեան, մեծամեծ սպասաւորութիւնս նմա հարկանէին. մինչեւ յամին վեցհարիւրորդի երեսներորդի վեցերորդի Աղեքսանդրիա առնոյր յԱրաբացւոց, որք զիմաստունս հարկանէին ի սուր սուսերի, եւ զհռչակաւոր մատենադարանն այրէին։ Իսկ ընդ ժամանակն ընդ այնոսիկ ճառագայթք լուսոյ ուսողութեան Եւրոպացւոց աշխարհին շիջեալ էր, ի Կոստանդինուպոլիս եւեթ փայլէին նշոյլքն, մինչեւ Տաճիկք քաղաքին տիրեցին, եւ անտի իսկ իսպառ շիջան տկար կայծակունքն։ Բայց սակայն Արաբացիք, որք ի բնէ իսկ հաճէին ընդ գիտութիւն եւ ընդ ուսողութիւն, մանաւանդ ընդ աստեղագիտութիւն, պահեցին զայն, եւ ի Մաւրիտանացւոց Սպանիացւոց ծանեան ազգ եւրոպէացւոց։ Գերբերտ յիննհարիւրորդ վաթսներորդ ամի Տեառն, եւ ապա Սեղբեստրոս Բ. Քահանայապետ վարեցան անուանեալ արաբացի նշանակօք թուոց։ Յերեքտասաներորդ դարու, եւ առաւել յերկուս դարս, որ այնմ զհետ եկին, ելին յԻտալիա, ի Գաղղիա, ի Գերմանիա ուսողք, եւ գտան բազում տեղեկութիւնք։ Ի վեշտասաներորդ եւ յեւթնեւտասներորդ դարս կարի յառաջադէմ եղեւ ուսողութիւն։ Օհամարողութիւն ի ժամանակն յայնոսիկ ուսողքն ի Յունաց որպէս մասն երկրաչափութեան ի կիր արկանէին, յայսց ժամանակաց հետէ կալաւ նա առանձինն իւր մասն։ Վիէտա, ծնեալ ի 1540 երորդ ամի եւ մեռեալ ի 1603 որդ ամի, ուսոյց զառաջինն նշանագրովք համարել․ Նեպեր, ծնեալ ի 1550 երորդ ամի եւ մեռեալ ի 1618 երորդ ամի, եղեւ առաջնորդ ղօգարիթմեայց, Կեպղէր ծնեալ ի 1571 նորդ ամի, եւ մեռեալ ի 1631 նորդում, զօրէնս երկնային մարմնոցն յայտնեաց․ Դեսգարտէս, ծնեալ ի 1596 երորդ ամի եւմեռեալ ի 1650 եր որդում զառաջինն զնշանագրովք համարողութիւն յերկրաչափութեան ի կիր արկ. եւ Վաղղիս, ծնեալ ի 1616 երորդ ամի եւ մեռեալ ի 1703 որդումն, ուրացական եւ կատարեալ ցուցչօք կարողութեանց վարէր. եւ արքս յայնպիսի իմն ժամանակի պայծառացան, յորում եւ այլ բազում իմաստունք եւ ուսողք գտանէին: Իսկ Նեւտոն, ծնեալ ի 1642 որդ ամի եւ մեռեալ ի 1727 երորդումն եգիտ զհաշիւսն որ կոչին Սահմանաց զոր առաջնոցն յերազի անգամ չէր տեսեալ: Այլ սակայն Լէյբնիտիոս, ծնեալ ի 1646 երորդ ամի եւ մեռեալ ի 1716 երորդումն, ի նմին իսկ ժամանակի, ոչ ինչ ի Նեւտոնէ իմացեալ, զնոյն գտանէր. որոյ եւ օրինակ մեկնելոյ եւ զնոյն յայտ առնելոյ ընդ ամենայն Եւրոպիա, բաց ի մեծ աշխարհէն Բրիտանացւոց ի կիր արկանի: Իսկ զայլակերպութեան եւ զողջութեան հաշիւսն, զոր երկոքին հոյակապ արքն գտին, ոչ միայն ինքեանք, այլ եւ երկոքին եղբարքն Յակովբոս եւ Յովհաննէս Բեռնուիղղի յայլեւայլ իրս ի կիր արկին: Յուսողացն որք յութեւտասներորդ դարու պայծառացան, զառաջին տեղի ունի Լեւոնարդոս Եւղերիոս, քանզի ի նորա ձեռն այլ իմն իւր կերպարանս զգեցաւ ուսողութիւն: Յետ նորա Լանգրանգոս, Լապղակէս, Լեւգենտրոս Գաուս, որոց առաջնորդութեամբ եւ հոյակապ արամբք որ ի մեր ժամանակս յԵւրոպիա գտանին ի գլուխ կատարմանն եհաս ուսողութիւն:

ԳԻՐ ԳԼԽՈՑ

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ
ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆ
ՏԵՂԵԿՈՒԹԻՒՆ

1. ԳԻՏՈՒԹԻՒՆՆ *այս ինքն է օրինօք իմն տեղեակ լինելն քանիօնութեանց, անուանեալ կոչի Ուսողութիւն: Գիտութիւնս այս զառանձինն ինչ իրօք մարմնոցն գայ, որք ի քանիօնութիւն նոցա եւեթ պատշաճին. զի այլ ամենայն հանգամանք մարմնոց, արտաքոյ կան սահմանի ուսողութեան:*

Քանիօնութիւն կամ Չափ անուանեալ կոչի այն ինչ, որ կարիցէ աճել յաւելուածով, եւ համեմատ նուազել: Ի սոցանէ են որ կշռորդովք կշռին, որպիսի ինչ ազգի ազգի վաճառք, եւ են որ չափին ձողովք, մատամբք, որպէս երեսք երկրի, եւ են որ ժամուք եւ վայրկենիւք, որպէս ժամանակն: Զչափ ինչ յանձնէ չկարեմք իմանալ, այլ զհամազգի իւր եւեթ ընդ միմեանս համեմատեալ, եւ զմեծութիւն միոյն անդըստին ի կցորդութենէ անտի զոր ընդ միւսոյն ունիցի կարիցեմք գտանել: Առաջին գործն, յոր պարապէ ուսողութիւն, է զքանիօնութիւնս ընդ միմեանս համեմատել, եւ նոյին համեմատութեանցն, զոր բազում անգամ մեծաւ աշխատութեամբ հազիւ հազ կարիցեմք ճանաչել, ի վերայ հասանել:

2. *Հայեցեալ ընդ ուսումն զոր ուսուցանէ, եւ ընդ գործս յոր պարապէ, բաժանի ուսողութիւնն ի Պարզ եւ ի Խառն ուսողութիւն: Պարզ ուսողութիւն այն է, որ զքանիօնութիւն պարզելով յամենայն իրաց կամ հանգամանաց իրաց, որպէս եթէ յանձնէ իսկ առանձինն կայցէ, քննէ. որ եւ ընդ երիս բաժանի. Ա. ի Համարողութիւն. որ զիրաց ի միմեանց անջատելոց ճառէ, որպիսի ինչ են, քար, աւազ, եւ այլ որ սոյին նմանք են: Յերկուս բաժանի Համարողութիւն ի Սովորական որ զսովորական նշանակս թուոց*

ի կիր արկանէ, եւ ի Նշանագրովք, որ Նշանագրովք վարի: Բ. Յերկրաչափութիւն, որ զանքակ իրաց ճառէ, որպիսի ինչ են, անջրպետութիւն վայրաց, եւ գիծ, եւ այլ նոյնպիսիք: Գ. Յերեքանկիւնաչափութիւն, այս ինքն է ի Գիտութիւն յերից մասանց ծանուցելոց, որք զերեքանկիւնն սահմանիցեն, զայլ եւս մասունս նորին համարելով գտանելոյ:

Խառն ուսողութիւնն է, զպարզ ուսողութիւն ի պէսպէս իրս ի կիր արկանել, որպիսի ինչ, յորժամ զչափոյ, զծանրութենէ եւ զշարժմանց մարմնոյն ճառիցեմք: Ընդ խառն ուսողութեամբ անկանին Համարողութիւնն եւ Երկրաչափութիւնն որ արդեանցն կոչին, որ ոչ այլ ինչ են, եթէ ոչ պարզ ուսողութիւն ի պէտս մաթեմատիկեան փիւսիկեան փիլիսոփայութեան ի կիր արկեալ, որոյ գլխաւոր մասունքն են Մեքենական գիտութիւն, եւ Գիտութիւն տեսանելոյ, եւ Աստեղագիտութիւն, ընդ որս մարթ է եւ զջերմութեան, զելեկտրոնի եւ զմագնիտի զօրութեանցն զուսմունսն վարկանել: Մեքենական գիտութիւնն ճառէ զշարժմանց մարմնոցն եւ զզօրութեանց, որք այնց պատճառք լինիցին կամ արգելիչք. իսկ Գիտութիւնն տեսանելոյ վասն օրինացն տեսանելոյ եւ զհանգամանաց լուսոյ. եւ Աստեղագիտութիւն՝ զչափոյ եւ զշարժմանց եւ զկարգաց եւ զյօրինուածոյ երկնաւոր մարմնոց: Մի մի ի ճարտարութեանցս դարձեալ ի մասունս բաժանի, որոց եւ ուրոյն ուրոյն անուանք են:

Հայեցեալ ընդ սահմանս քննութեանց՝ ուսողութիւնն ի Խոնարհագոյն եւ ի Բարձրագոյն բաժանի: Խոնարհագոյն ուսողութիւնն զհաստատուն սկզբունս եւեթ բովանդակէ, որով ի սահմանս ինչ եւ յեղերս եկեալ դադարէ: Իսկ Բարձրագոյն ուսողութիւն, անտի ուր հասեալ դադարեցաւ խոնարհագոյն ուսողութիւն՝ սկիզբն առնու յառաջ խաղալոյ, ի գտանել զճարտարութիւնս եւ զհնարագիտութիւնս, որոց անչափական իմն սահմանք են:

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍՆ

ՃԱՄԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆ

1 *

ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ Ա

ՅԱՂԱԳՍ ԹՈՒՈՑ ԵՒ ԹԷ ԶԻՆՉ ՆՇԱՆԱԿԻՑԵՆ

3. ՅՈՐԺԱՄ *ի կերպարանս իրաց առանձինն մտադրեալ նայիցիմք, տեսանեմք եթէ ամենայն ինչ յիւրում ազգի անդ մի միութիւն է, իսկ իբրեւ զբազում միութիւնս միահամուռ ժողովիցեմք, յօրինեալ կազմիցի թիւ. զոր օրինակ մի երիվար՝ մի միութիւն է, իսկ երիվարք ութն՝ թիւ ինչ երիվարաց է. նոյնպէս եւ մի ձողն, յորմէ տասն ձողք կազմեն թիւ ինչ ձողոց: Բազում անգամ դէպ լինի, զի միութիւնն, իբրեւ ընդ մանր մասունս իւր համեմատիցի՝ թիւ համարի. որպէս մի ձողն թէպէտեւ ձողոյ միութիւն իցէ, այլ իբրեւ ընդ ոտսն համեմատիցի, թիւ հաշուիցի, քանզի ձողն ի բազում ոտից կազմի: Նոյնգունակ եւ զօրականն, թիւ է զինուորաց, եւ լիտրն թիւ կէս ունկեաց:*

4. *Թիւք, որով մարդիկ վարին, անդստին ի միոյ մինչեւ ցտասն համարին, մի, երկու, երեք, չորք, հինգ, վեց, եւթն, ութ, ինն, տասն. յետ այնորիկ ի վերայ տասանցն զառաջինսն յաւելումք, մետասան, երկոտասան, երեքտասան, այլովքն հանդերձ: Իբրեւ ժամանիցեմք ի թիւ մի ի թուոցն, որ երկիցս քան զտասն մեծ իցէ, անուանեալ կոչեմք Քսան. իսկ թուոցն որ երիցս, չորիցս, հնգիցս . . . մեծ քան զտասն իցեն՝ Երեսուն, Քառասուն, Յիսուն . . : Թիւն, որ քան զտասն տասնիցս առաւել իցէ, Հարեւր կոչի, եւ անտի յառաջ՝ Երկերիւր, Երեքհարեւր, Չորեքհարեւր, մինչեւ ցՀազար, որ է տասն հարեւր: Հազարիցս հազար Միլիոն ասի, միլիոնիցս միլիոն՝ Երկիլիոն, միլիոնիցս երկիլիոն՝ Երեքիլիոն, Չորեքիլիոն, Հնգիլիոն, այլովքն հանդերձ:*

5. Նշանակքն որով զթիւս գրեմ վերագոյն ասացաք, նշանակեմք, են 1 (մի), 2 (երկու), 3 (երեք), 4 (չորք), 5 (հինգ), 6 (վեց), 7 (եւթն), 8 (ութ), 9 (ինն), 0 (դատարկ): Նշանակացս այսոցիկ գտիչք Արաբացիք եղեն, յորոց անուն կոչին Արաբացի նշանակք թուոց:

6. Յորժամ ուրոյն ուրոյն եւ զատ ի միմեանց դրոշմիցին նշանակք թուոցս, ասին Պարզ, իսկ իբրեւ առ միմեանս առանց անջրպետութեան գրիցին՝ Յօդուածոյ կոչին:

Ի թիւս յօդուածոյս՝ զօրութիւն թուոյն ի կարգէ անտի եւ ի տեղեացն, յորս կան հաստատեալ, գտանի, եւ ի համեմատութենէ տեղեացն աճէ եւ նուազէ: Որպիսի ինչ, յայս թիւս 1234567, առաջին թիւն 7, որ կայ ընդ աջմէ կողմանէ՝ միաւոր է եւ զեւթն միութիւնս եւեթ ցուցանէ. իսկ երկրորդն 6՝ տասնաւոր, եւ նշանակէ տասնիցս մեծ քան զառաջինն 7, այս ինքն 60 (վաթսուն): Որ յերրորդում տեղւոջն կայ 5, տասնիցս մեծ քան զերկրորդն 6 ցուցանէ, եւ է հարիւրաւոր, եւ նշանակէ 500 (հինգհարիւր). չորրորդն 4՝ քան զերրորդն տասնիցս առաւել է եւ է հազարաւոր, վասն որոյ ցուցանէ 4000 (չորեքհազար): Նոյնպէս եւ հինգերորդն՝ 30000 (երեսունհազար). վեցերորդըն՝ 200000 (երկերիւր հազար), եւթներորդն՝ 1000000 (միլիոն): Զկնի միլիոնի նորոգ սկսանին տասնաւոր, հարիւրաւոր, հազարաւոր . . . միլիոնի, եւ զհետ նոցա՝ միաւոր, տասնաւոր, հարիւրաւոր . . . երկիլիոնի, եւ որ այլն եւս մի ըստ միոջէ: Յորս յայտ յանդիման երեւի եթէ այն որ ի ձախմէն կայ, քան զայն որ ընդ աջմէն իցէ, տասնիցս մեծ է. եւ այս անուանեալ կոչի Տասնկարգեան կարգ:

Դատարկն (0) նշանակէ ինչ ոչ. այլ եթէ ընդ աջմէ կողմանէ նշանակաց թուոյն կարգիցի, զնոցա զօրութիւնն տասնիցս աճեցուցանէ, որպէս 10, 20,400: Ապա եթէ ի միջի անդ նշանակացն գտանիցի, յայտ արարեալ ցուցանէ, եթէ անդէն թիւ մի ի տասնաւորաց կամ ի հարիւրաւորաց կամ ի . . . պակասէ, որպէս 405, 801, 80043:

Ի պատկերի, որ առաջիս կայ, յայտնապէս տեսանիցեն ուսանելիքն զատանկարգեան տեղիս, եւ թէ զինչ ինչ մի մի ի նոցանէ նշանակիցէ:

21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1
8	8	3	5	6	2	0	0	3	5	4	7	9	3	5	2	2	8	4	7	9
Հ. արիւրաւոր	Տասնաւոր	Միաւոր	Հ. արիւրհազարաւոր	Տասնհազարաւոր	Հ. ազարաւոր	Հ. արիւրաւոր	Տասնաւոր	Միաւոր	Հ. արիւրհազարաւոր	Տասնհազարաւոր	Հ. ազարաւոր	Հ. արիւրաւոր	Տասնաւոր	Միաւոր	Հ. արիւրհազարաւոր	Տասնհազարաւոր	Հ. ազարաւոր	Հ. արիւրաւոր	Տասնաւոր	Միաւոր
Երեքիլ.			Երկիլիոնի.						Միլիոնի.						Առաջինն.					

7. Որ միանգամ զերիս նշանակս թուոց գիտիցէ ընթեռնուլ, կարիցէ եւ զամենայն թիւ, որ երկայնաձիգ նշանակօք ադեալ իցէ, առանց ինչ աշխատ լինելոյ ընթեռնուլ: Զառաջինն զամենայն նշանակսն յաջմէ կողմանէ սկսեալ ի բաժինս բաժինս զատեալ որոշեսցէ, որպէս զի յամենայն բաժինս բաց ի յետին բաժնէ անտի երեք երեք նշանակք կայցեն: Ի բաժանելն առաջի առաջին բաժնին դիր տիքս, եւ յերկրորդումն սուր տիքս, յերրորդումն տիքս, եւ ի չորրորդումն երկու սուր տիքս, եւ ըստ այնն օրինակի յառաջ խաղա մինչեւ ցյետին բաժինն, զտիքսն չյաւելեալ, այլ ըդսուր տիքսն յամենայն բաժնի միով միով աճեցուցեալ: Զոր օրինակ եթէ զթիւս 8436736400369784582 ըստ օրինի ի բաժինս որք կամիցի կտորել, պարտ եւ պատշաճ է զայս ձեւ 8,,,436·736,,400·369,784·582 կարգել: Յետ այսորիկ իբրեւ կամիցիս ընթեռնուլ, ի ձախմէ յ8 նշանակէ անտի սկիզբն արա ընթեռնլոյն, եւ իցէ եթէ ուրեք յաւարտել բաժնին պատահիցէ

մի սուր ստիքս կամ երկու կամ երեք եւ կամ այլ եւս բազումք, սաս անդէն միլիոն, երկիլիոն, երեքիլիոն, չորեքիլիոն.., իսկ յորում վայրի տեսանիցես ստիքս, սաս հազար: Վասն որոյ նշանակք թուոյն, զոր յառաջագոյն յիշատակեցաք, ընթերցեալ լինին զայն ձեւ օրինակի. Ութ երեքիլիոն, չորեքհարեւր երեսուն եւ վեցհազար, եւթնհարեւր երեսուն եւ վեց երկիլիոն, չորեքհարեւր հազար. երեքհարեւր վաթսուն եւ ինն միլիոն, եւթնհարեւր ութսուն եւ չորեքհազար, հինգհարեւր ութսուն եւ երկու:

Ըստ նմին օրինակի եւ զամենայն թիւ, որ ի բերանոյ ասիցի, մարթեմք դիւրաւ ի գրի հարկանել: Սկիզբն ի ձախմէ արարեալ դրոշմեա զնշանակս թըւոյն, եւ ուր ուրեք պակասէ միաւոր, տասնաւոր, հարիւրաւոր.., դիր փոխանակ նոցա զդատարկն. իսկ իբրեւ հազար, միլիոն, երկիլիոն ասիցի, դրոշմեա զպատշաճական ստիքսն, եւ զսուր ստիքսս, եւ հայեաց խնամով յայն, զի յամենայն բաժինս երեք երեք նշանակք թուոց կայցեն, բաց յառաջնոյն, յորում մարթ է մի կամ երկու նշանակաց գտանել: Զոր օրինակ եթէ զթիւս Քսան եւ վեցհազար, չորք միլիոն, իննհարեւր վաթսունհազար եւ ութ, որ ի բերանոյ ասիցի, գրել ոք կամիցի, պարտ է զառաջինն զ26 դրոշմել, եւ ապա յայն յարել զչորս միլիոնն, փոխանակ հարիւրաւորացն եւ հազարաւորացն պակասելոց եդեալ դատարկ, 26.004, եւ ապա զկնի յաւելուլ զերրորդ բաժինն, 26,004.960. եւ ապա զչորրորդն պէս զայս օրինակ, 26.004,960.008:

8. Յերկուս բաժանին նշանակք թուոց, ի նշանակիչս եւ յՈչ նշանակիչս: Ոչ նշանակիչ թիւս կոչեմք զայնոսիկ, որք թէպէտ զհաստատուն կշիռս ցուցանիցեն, այլ չնշանակիցեն՝ թէ զինչ կամ որպիսի ինչ իրն իցէ, որպէս 28, ոչ նշանակիչ նշանակ մի ի թուոց է, քանզի զքսան եւ ութ արս, անդրուարս, տունս, ձողս մարթ է ցուցանել: Իսկ այնք որ զիրան

յայտնեալ նշանակիցն՝ անուանեալ կոչին նշանակիչք, զոր օրինակ 20 ծառք, 17 տունք, 20 դահեկանք, այլովքն հանդերձ։

9. Իբրեւ երկու կամ բազում թիւք զնոյն ինչ իրաց յայտ առնիցեն, Համազգի կոչին, որպէս 4 ձողք եւ 10 ձողք. իսկ որ պէսպէս եւ այլազգիս նշանակիցեն, Օտարազգի. զորօրինակ 4 ձողք եւ 10 լոտերք, 10 գունդք կապարեայք եւ 5 երկաթիք։ Թէպէտեւ գործած բոլորչի նոյնաձեւ իցեն գունդքն, եւ վասն այսորիկ համազգի համարիցին, այլ վասն նիւթոյն այլակերպութեան օտարազգիք հաշուին։ Բայց նմին օրինակի 5 ձողք եւ 5 մատունքն համազգիք են, քանզի մատնն մասն ինչ ձողոյն է։

10. Զէ մարթ, մանաւանդ եթէ անհնարին ինչ է զնշանակս թուոյն օտարազգիս՝ ի կշիռ համեմատութեան ընդ միմեանս բերել, որպէս զարս 4 ընդ 10 լոտրս կշռել, եւ զ20 ձողս ընդ 30 անդրուարտաց։ Այլ զհամազգիսն կարի քաջ մարթ է ընդ միմեանս հարկանել, եւ ի նոցա համեմատութենէն զայլակերպութիւնն որ ի մէջի կայցէ՝ գտանել, որպէս զ4 ձողս ընդ 5 ոտից։

11. Վասն զհաւասարութիւն չափուցն նշանակելոյ, այսու (=) նշանաւս վարիմք, որ ընդ մէջ անկանի երկուց հաւասար չափուց, որպէս 10 ձողք = 60 ոտք, եւ ընթերցեալ լինի, եթէ 10 ձողք հաւասար են 60 ոտից։ Իսկ զանհաւասարութիւն չափուց այս (>) նշանս ցուցանէ, որոյ սուր կողմն դնի ի կողմն փոքր չափուն, որպէս 1 ձող < 8 ոտք, եւ ընթերցեալ լինի զայս օրինակ, 1 ձողն փոքր է քան զ8 ոտս. նոյնպէս 2 ժամք > 70 վայրկեանք, այս ինքն՝ 2 ժամք մեծ քան զ70 վայրկեանսն են։

12. Ընդատին ի հաւասարութենէ եւ յանհաւասարութենէ չափուց զսկզբունսն իւր ժողովեալ առնու ուսողութիւնն, յոր սկզբունս եղեալ զհի-

մունս իւրոյ հաստատութեանն, հանդերձ նոքիմբք պարապէ իրաց չծանուցելոց տեղեակ լինել:

Երեք են սկզբունք համօրէն ուսողութեան:

Ա. Ողջոյն ինչ հաւասար է ամենայն մասանց իւրոց միանգամայն, եւ մեծագոյն է քան զմի մի իւրաքանչիւր ի մասանց անտի: Զոր օրինակ,

1 ձող = 6 ոտք. այլ զորին հակառակն 1 ձող > 4 ոտք:

Բ. Զհաւասարն մարթ է փոխանակ հաւասարին դնել: Որպիսի ինչ,

18 ոտք = 3 ձողք, կամ 3 ձողք = 18 ոտք:

Գ. Զայնք՝ որ առանձինն հաւասարք են միւսում իմիք, հաւասարք են եւ միմեանց, իսկ որ չիցեն հաւասարք, չեն եւ միմեանց հաւասարք: Որպէս,

$$\left.\begin{array}{l}60 \text{ Վայրկեանք} = 1 \text{ ժամ} \\ 4 \text{ Չորրորդք} = 1 \text{ ժամ}\end{array}\right\} \text{ապա } 60 \text{ վայրկ.} = 4 \text{ չորր:}$$

$$\left.\begin{array}{l}60 \text{ Վայրկ.} = 1 \text{ ժամ} \\ 3 \text{ Չորր.} < 1 \text{ ժամ}\end{array}\right\} \text{ապա } 60 \text{ վայրկ.} > 3 \text{ չորր:}$$

ԳԼՈՒԽ Բ

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՒԵԼԼՈՅ, ՀԱՆԵԼՈՅ, ԲԱԶՄԱՑՈՒՑԱՆԵԼՈՅ ԵՒ ԲԱԺԱՆԵԼՈՅ ԶԹՈՒՈՑ ՆՇԱՆԱԿՍ

ՅԱՒԵԼՈՒՄՆ

13. ԶՉԱՓՍՆ ի միմեանս յաւելուլ այս ինչ է. այնպիսի ինչ նշանակ թուոյ գտանել, որ իւրով մե-ծութեամբն, այլոց թուոց միանգամայն հաւասար գտանիցի: Գտեալ թիւն անուանեալ կոչի Բովան-դակութիւն, զոր օրինակ 6՝ բովանդակութիւն է 4 եւ 2 թուոյս, քանզի 4 եւ 2 միահամուռ ժողովեալ առնեն 6: Նոյնպէս 14՝ բովանդակութիւն իմն 2, 3, 4, 5 թուոց է:

Որպէս վերագոյն (համար 10) ճառեցաք, զհամազ-գի թիւս եւեթ մարթ է ի միմեանս յաւելուլ. վասն որոյ զ4 լիտրս Տաճկաց եւ զ3 դահեկանս Տաճկաց չկա-րեմք յաւելուլ, քանզի օտարազգի են, որոց եւ բո-վանդակութիւնն ոչ լիտր եւ ոչ դահեկան իցէ:

14. Նշան յաւելման այս (+) է, եւ ընթեր-ցեալ լինի Առաւել, որ իբրեւ ի մէջ երկուց կամ բազում չափուց անկանիցի, ցուցանէ եթէ չափքն այնոքիկ ի միմեանս ունին յաւելուլ: Որպէս 6 + 20 + 4 = 30:

15. Օրինակ զթիւսն յաւելլոյ այս է:

Ա. Զթիւսն զոր ունիս յաւելուլ, գրեա կշիռ ի ներքոյ միմեանց, որպէս զի միաւորաց ընդ միաւո-րօք, եւ տասնաւորաց ընդ տասնաւորօք, եւ . . . ընդ . . . անկանել, եւ ձգեա ընդ նոքօք գիծ:

Բ. Յաջակողմն կուսէ ի վերուստ կողմանէ ի վայր, եւ կամ ի ներքուստ ի վեր յաւել զմիաւորս. եթէ բո-վանդակութիւնն պարզ թիւ ինչ իցէ, գիր ընդ միաւո-րօք, որպէս յայտ յանդիման տեսանես յԱ. օրինակին, յորում 4 եւ 1 = 5, յաւելեալ ի սա եւ զ3 լինիցի = 8, որ կայ ի ներքոյ գծին ընդ միաւորօք: Յետ այսորիկ ըստ սմին օրինակի միահամուռ ժողովեա զտասնաւորսն եւ զհարիւրաւորսն եւ զ. . . : Եթէ դէպ լիցի, զի բովանդակ գաւազանն տեղւոյ իրիք դատարկ իցէ, դրոշմեա ընդ նովաւ դատարկ, զի մի զօրութիւն տեղեաց նշանակացն խառնակեալ շփոթեսցի:

Գ. Եթէ բովանդակութիւն նշանակաց թուոց յօդուածոյ իցէ, զթիւն որ ընդ աջմէն իցէ՝ դիր ընդ գծիւն, իսկ զմեւսն յաւել ի վերայ թուոյն որ զհետ գայցէն, որպէս եւ տեսանեսդ ի Գ. օրինակին, յորում 6, 8, 9 միահամուռ առնեն 23, այսինքն 3 միաւոր, եւ 2 տասնաւոր: Զ3 միաւորն ի ներքոյ գաւազանի միաւորացն եդեալ, զ2 տասնաւորն ի վերայ տասնաւորացն յաւելջիր: Զմնացեալ 2 տասնաւորն, ի 1, 6 եւ 5 թիւս յաւելեալ, գումարի 14, որոյ 4 տասնաւոր է, եւ 1 հարիւրաւոր. արդ զ4 դիջիր ի ներքոյ տասնաւորացն, եւ զ1 հարիւրաւոր յաւել ի հարիւրաւորս:

Ա.		Բ.	
92164	Յաւելլեք	80001	Յաւելլեք
421		31402	
1213		3503	
93798	Բովանդակութիւն	114906	Բովանդակ.

Գ.		Դ.	
4456	Յաւելլեք	4083	Յաւելլեք
2868		2031	
719		4049	
8043	Բովանդակութիւն	10163	Բովանդակ.

Դ. Յորժամ թիւքն զորս յաւելուլն կամիցիս կարի շատք իցեն, զառաջինն ի բաժինս բաժինս զատեալ որոշեա. յետ զբաժինսն գումարելոյ, զբովանդակութիւնս բաժնիցն միանգամայն ժողովեսջիր: Որպէս, յորժամ կամք իցեն զբովանդակութիւն թուոյս $3964 + 456 + 9436 + 95674 + 32824 + 3964 + 1836 + 964 + 29344 + 6344 + 5637 + 48363$ գտանել, բաժանեա զայս ձեւ օրինակի:

Ա. Բաժին		Բ. Բաժին	
3964	Յաւելլիք	3964	Յաւելլիք
456		1836	
9436		964	
95674		29344	
32824		6344	
		5637	
		48363	
142354	Բովանդակու.	96452	Բովանդակ.

Ողջոյն Բովանդ.

$$\begin{array}{r} 142354 \\ 96452 \\ \hline 238806 \end{array}$$

16. Առ իմանալոյ եթէ արդարեւ առանց վրիպելոյ լեալ իցէ յաւելումն, բաւաք է միւսանգամ յաւելուլ հակառակ կարգաւ, որպէս զի եթէ յառաջնումն նուագի ի ներքուստ ի վեր զթիւսն գումարեցեր, յերկրորդումն վերուստ ի վայր ժողովեսցես. եթէ երկոքին բովանդակութիւնքն հաւասարք միմեանց իցեն, ճշգիւ լեալ է յաւելումն:

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր: Որպէս պատմեն պատմագիրք, Տրիէր քաղաք 1300 ամօք երէց է քան զՀռովմ քաղաք. արդ 753 ամօք յառաջ քան զՔրիստոս Հռովմայ քաղաքին հիմն արկաւ. ուրեմն քանի՞ ինչ ամօք կանուխ գտանիցի քաղաքն Տրիէր ի 1843 ամին:

Պատասխանի: 1300 + 753 + 1843 = 3896 ամօք:

Բ. Խնդիր: Գունդ մի արքունի յ238500 հետեւակաց, ի 65840 հեծելոց, եւ ի 12640 խառնաղանճ ռամիկ զինուորաց կազմեալ էր. արդ քանի՞ ինչ թիւ ողջոյն գնդին իցէ:

Պատասխանի: 238500 + 65840 + 12640 = 316980 արք:

Գ.. Խնդիր: Այր ոմն վաճառական յառաջնում ամի ի յունուարիս ամսեանն վաճառեաց մարգարիտ 2000 դահեկանաց Գերմանացւոց, ասուի 3603 դահեկանաց. ի փետրուարիս ամսեան ասուի 3539 դահեկանաց, մարգարիտ 5308 դահեկանաց, բուրդ 7300 դահեկանաց. ի մարտիս ամսեանն շաքար 630 դահեկանաց. արդ ո՞րչափ ինչ դահեկանաց մարգարիտ, ասուի, բուրդ եւ շաքար վաճառեալ իցէ վաճառականս ի ժամանակի անդ երից ամսոյն:

Պատասխանի: 2000 + 5308 = 7308 դահ. մարգարիտ
3603 + 3539 = 7142 դահ. ասուի:
7300 = 7300 դահ. բուրդ:
630 = 630 դահ. շաքար:

ապա 5603 + 16777 = 22380 դահ. վաճառք:

Հ Ա Ն Ո Ւ Մ Ն

17. Եթէ ի բովանդակութենէ երկուց չափուց կամ թուոց զմի մասն չափուցն հանիցեմք, մնայ տակաւին յաւելուած ինչ: Եւ քանզի բովանդակութիւնն եւ չափն՝ զոր ի բովանդակութենէն հանել առաջի կայցէ, ծանօթ են մեզ, կարիցեմք ապա եւ մնացորդին ի ձեռն հանման ի վերայ հասանել: Բովանդակութիւնն՝ Նուազելի թիւ ասի, իսկ չափն զոր անտի արտաքս հանելոց իցեմք՝ անուանեալ կոչի Հանելի թիւ, իսկ այն զոր խնդրեմքն՝ Մնացորդ կամ Այլակերպութիւն:

Պարտ եւ պատշաճ է Նուազելի եւ Հանելի թուոցն համազգիս լինել, որպէս եւ յառաջագոյն ճառեցաք (± . 10):

18. Նշան հանման այս (—) է, եւ ընթերցեալ լինի Նուազ, որ իբրեւ ի մէջ երկուց չափուց անկանիցի, յայտ առնէ, եթէ զթիւն որ ընդ աջմէն է, յայնմանէ որ ի ձախմէն կայցէ՝ հանել պարտ է:

Որպէս 15 — 7 = 8, եւ ընթերցեալ լինի, 15 նուազ 7, հաւասար է 8: Նոյնպէս 18 — 6 = 12, եւ 50 — 25 = 25:

19. Օրինակ զնշանակս թուոց ի միմեանց հանելոյ այս ինչ է:

Ա. Զհանելի թիւն ի ներքոյ նուազելի թուոյն գրոշմեսջիր, ըստ օրինակի որպէս ասացաք զյաւելելի թուոց (Հ. 15. Ա.):

Բ. Սկիզբն յաջմէ արարեալ, զմիաւոր հանելի թուոյն հան ի միաւորէ անտի նուազելի թուոյն, զտասնաւորն ի տասնաւորէ . . . եւ զիւրաքանչիւր այլակերպութիւնն գրոշմեսջիր ընդ միաւորօք, ընդ տասնաւորօք . . . ի բուն պատշաճական տեղիս իւրեանց. եւ այն իսկ է այլակերպութիւնն կամ մնացորդն զոր խնդրես: Իբրեւ ի տեղւոջ ուրեք հանելի թուոյն դատարկ կայցէ, զայն թիւն նուազելւոյն փոխանակ այլակերպութեանն ի ներքոյ գրեսջիր. իսկ եթէ չիցէ մնացորդ ինչ, յայլակերպութեանն դիջիր դատարկ: Նոյնպէս եւ զաւելի թիւսն նուազելւոյն եթէ գտանիցին, առանց ինչ փոփոխելոյ գրեա ի ներքոյ գծին:

Գ. Եթէ երբեք մին ի հանելի թուոյն մեծ քան զնուազելի թիւն իցէ, առջիր մի միութիւն ի մեծագոյն առընթերակայ տեղւոյն, որ ի ձախակողմն կուսէ կայցէ, եւ յաւել զայն ի վերայ նուազելի թուոյն. եւ քանզի յաւելեալ թիւն է 10 կամ տասնաւոր, վասն այսորիկ եւ աւելի միութիւնս քան զհանելի թիւն ցուցանիցէ: Ապա հան զհանելի թիւն, եւ զայլակերպութիւնն յիւրում տեղւոջն նշանակեա: Իսկ զթիւն յորմէ զմին զայն միութիւն առեր, պարտիս այնուհետեւ միով թուով պակաս համարել:

Ա.		Բ.	
89362	Նուազելի	9134	Նուազելի
40281	Հանելի	3122	Հանելի
49081	Այլակերպութիւն	6012	Այլակ.

Գ․․	Դ․․	Ե․․
348213 Ն․	5036780 Ն․	3628960 Ն․
4112 Հ․	2632896 Հ․	3519050 Հ․
344101 Մ․	2403884 Մ․	109910 Մ․

20․ Քանզի այլակերպութիւնն (Հ․ 17) յայտ արարեալ ցուցանէ, եթէ որչափ ինչ հանելի թիւն փոքր քան զնուազելի թիւն իցէ․ սակայն իսկ մարթ է յանձնէ իմանալ, զի յորժամ զայլակերպութիւնն եւ զհանելի թիւն ի միմեանս յաւելուցումք, բովանդակութիւնն լինիցի հաւասար նուազելի թըւոյն, քանզի այլակերպութիւնն եւ հանելի թիւն մասունք իմն նուազելի թուոյն հաշուին։ Եւ այս զուգութիւն համեմանն կարի քաջ ցուցանէ։

Յայսր հիման վերայ հաստատեալ կայ եւ այն մեւս եւս ազգ համեման, որ ի բազում դէպս կարեւոր է․ եւ այս լինիցի յորժամ զհանելի թիւն մինչեւ ցհաւասարել նուազելի թուոյն առաւելուցումք եւ աճեցուցանիցեմք։ Դիցուք թէ առաջի կայ մեզ յ18 թուոյ զ7 թիւս հանել․ ըստ օրինացն, զորոց մինչեւ ցայս վայր ասացաք՝ պարտ եւ պատշաճ է մեզ յ18 միութեանց անտի զ7 ի բաց հանել, զի զայլակերպութիւնն գտանել կարիցեմք, այլ որ առաջիս կայ՝ ուսուցանէ, եթէ յ7 թուոյ մինչեւ ց18 համարել պարտ է վասն զ11 գտանելոյ։

Արդ եթէ կամք իցեն այսու օրինակաւ տեղեակ լինել այլակերպութեանն, զառաջինն պարտ է առ մի մի նշանակ հանելի թուոյն այնպիսի ինչ միով նշանակաւ թիւս խնդրել, որոյ ի յաւելուլն ի վերայ, հանելի թիւն նովին կամ մօտաւոր բարձրագոյն աստիճանաւ հաւասար իցէ նուազելի թուոյն։ Արդ զայն թիւ՝ որ զհանելի թիւն աճեցուցանիցէ, գրեա ի մնացորդին, եւ զտասնաւորն յոր համբարձեալ իցէ՝ յաւել ի տասնաւոր հանելւոյն, եւ այնպէս յառաջ խաղա մինչեւ ցվերջին նշանակն։ Զոր օրինակ,

63857 Նուա.
38768 Հան.
25089 Ալակ.

Յօրինակիս զայս օրինակ վճարեցան իւքն : 8 առ ժամանելոյ յ17, պահանջի 9, որպէս գրեալ կայ ի ներքոյ : 7 առ ժամանելոյ ի 15 պահանջի 8 : 8 առ ժամանելոյ յ8, 0. գրեա 0 : 8 առ ժամանելոյ յ13, 5 : 4 առ ժամանելոյ ի 6, 2. գրեա 2 :

Այս կարգ հաշուելոյ ի կիր արկանի, յորժամ պէտք լինիցին զբազում թիւս յողջոյն ինչ թուոյ հանել : Իբրեւ այս դիպիցի, պարտ է զմիաւորս, զտասնաւորս, զ . . . հանելի թուոյն ի միմեանս յաւելուլ . եւ զբովանդակութիւնն նոյն թուոյն որ առ հասանելոյ առ նուազելի թիւն պահանջիցի , եւ զայն ի ներքոյ գծին դրոշմել, որպէս յառաջագոյն ասացաք : Որպիսի ինչ,

367 Ն.
112
38 Հ.
19
198 Ա.

Կարգ իրացն այսպիսի ինչ է : 9, 8 եւ 2 առնեն 19, որում առ ժամանելոյ ի 27, պահանջի 8, որպէս գրեալ կայ ի ներքոյ : 2 տասնաւորն, 1, 3, եւ 1 առնեն 7, որում առ ժամանելոյ ի 16, պահանջի 9 որ եւ կայ գրեալ ի ներքոյ : Նոյնպէս եւ հարիւրաւորն :

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր : Քրիստափորոս Կողոմբոս յամին 1497 յայտնեաց զաշխարհն Ամերիկեցւոց, այժմ ի 1843 ամին, քանի՞ ինչ ամք իցեն, յորմէ հետէ գտաւ Ամերիկէ :

Պատասխանի : 1843 — 1497 = 346 ամք :

Բ. Խնդիր : Յարքունի գնդի միում էին 285000 այր . ի խառնել ճակատուցն՝ յառաջնում նուազի անդ անկան 560 այր, յերկրորդումն 805 այր, յերրորդումն 900 այր . արդ քանի՞ այր մնացին ի գնդին :

Պատասխանի : 285000—560—805—900=282735 :

Գ. Խնդիր : Առն ուրումն վաճառականի ի սկսանել վաճառականութեան էր գլուխ մի դրամոյ

400000 դահեկանաց . յառաջնում ամին կորոյս 30000, յերկրորդումն 5000, յերրորդումն 40000, իսկ ի վե-ցերորդ ամի 25000 դահեկանս շահեցաւ, յեւթնե-րորդումն 5000, յութերորդումն կորոյս դարձեալ 10000: Արդ որչափ ինչ իցէ գլուխ դրամոց առնս:
Պատասխ: $400000+25000+5000=430000$ շահ, եւ $40000+30000+5000+10000=85000$ վնաս, ապա $430000-85000=345000$ գլուխ դրամոցն:

ԲԱԶՄԱՑՈՒՑԱՆԵԼ

21. Օրինակ գտանելոյ զբովանդակութիւն թը-ւոյ, որ բազում անգամ ինքն յինքեան վերայ յաւե-լուցու, յորջորջի Բազմացուցանել: Յաւելլի թիւն կոչի Բազմացուցանելի, իսկ այն՝ որ յայտ առնիցէ, եթէ քանիցս յաւելլի թիւն յինքեան վերայ յաւելու-ցու, կոչի Բազմացուցիչ. եւ թիւն որ խնդրի, կոչի Ար-դիւնք: Բազմացուցիչն եւ Բազմացուցանելին ասին Առնելիք: Զոր օրինակ զ5 4իցս բազմացուցանել ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ $5+5+5+5$ յաւելուլ, որոյ արդիւնքն $=20$:

Բազմացուցանելին կարէ լինել չափ որոյ եւ իցէ ազգի, գիծ կամ երեսք իրաց, կամ մարմին, կամ բարձրութիւն, կամ ծանրութիւն, եւ որ այլն եւս մի ըստ միոջէ. իսկ բազմացուցիչն թիւ ինչ չնշանակիչ լինել պարտ է, որպէս զի արդիւնքն՝ բազմացուցանել-ւոյն համազգի իցէ: Համարեսցուք եթէ զծանրու-թիւն ինչ 7իցս բազմացուցանիցեմք, արդիւնքն լի-նիցի ծանրութիւն ինչ, որ քան զառաջին ծանրու-թիւն եւթնպատիկ առաւել մեծ իցէ: Բազմացու-ցանելին կարէ եւ թիւ ինչ չնշանակիչ լինել, որպէս յայնց որ զհետ գան, յայտ է:

22. Նշան բազմացուցանելոյ այսպիսի (×) կամ (.) ինչ է, եւ ընթերցեալ լինի Բազմացուցեալ:

Որպէս 5×6=30, այս է 5, 6իւք բազմացուցեալ հաւասար է 30, զոյն ձեւ 8·4=32։ Յորժամ բազում թիւք այսու նշանաւս ի միմեանս յեռեալ ի մի կարգ տողիցին, նշան է բազմացուցանելոյ զարդիւնս առաջին երկուց չափուց զկնի եկելովք, որպէս 4·2·9=72։

23. Որպէս զի կարիցեն ուսանելիքն դիւրաւ գտանել զարդիւնս երկուց չափուց, որ փոքր իցեն քան զտասն, աստէն ի սմին վայրի զպիւթագորեան պատկերն դիցուք,

ՊԱՏԿԵՐ ՊԻՒԹԱԳՈՐԵԱՆ

Ա	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Գ
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
Բ	9	18	27	36	45	54	63	72	81	Դ

որ զայս օրինակ ի կիր արկանիցի։ Դիցուք գրեսցուք եթէ զարդիւնս 6 եւ 7 թուոցս կամիցիմք գտանել։ Զմին յայսցանէ երկոցունցս, զոր օրինակ զ6 գիտ յուղղաձիգ ԱԲ կարգին, եւ զմեւսն ի հարթ կարգին ԱԳ. ապա այնուհետեւ յառաջին կարգէ անտի հարթ եւ ուղիղ խաղա յառաջ, եւ յերկրորդ կարգէն էջ ի վայր կոյս, եւ ուր ուրեք գիծքն զմիմեանս հատանիցեն, անդէն գտանես զոր խնդրեսդ, որ է 42։

24. Երկու թիւք, յորոց մին պարզ իցէ եւ միւսն յօղուածոյ, միմեամբք բազմապատկուցանին օրինակ զայս.

Ա. Դիր զպարզ թիւն բազմապատկուցիչ ի ներքոյ բազմապատկուցանելւոյն, եւ պարզ թուովն ուրոյն ուրոյն զմիաւոր եւ զտասնաւոր եւ զ... բազմապատկուցանելւոյն բազմապատկեա, եւ զարդիւնսն կարգաւ մի ըստ միոջէ ընդ գծիւն դրոշմեսջիր, զմիաւորն ընդ միաւորաւ, եւ զտասնաւորն ընդ տասնաւորաւ, այլովքն հանդերձ:

Բ. Եթէ ի բազմապատկուցանելն արդիւնքն տասնաւոր իցէ, ըստ օրինակի որպէս ի յաւելման ասացաք, զմիաւորն դրոշմեա ընդ գծիւն, եւ զտասնաւորն յաւել յառընթերակաց արդիւնս:

Գ. Յորժամ ի բազմապատկուցանելին գտանիցի զատարկ, յարդիւնսն եւս դրոշմեա զատարկ, այլ այսմ ուշ եդեալ նայիցես, զի եթէ յառաջնմէ դեռ եւս ինչ մի մնացեալ իցէ, զայն ի տեղի զատարկին դրոշմիցես:

Ա.

$$\begin{array}{r l} 2423 & \\ 2 & \text{Առնելիք} \\ \hline 4846 & \text{Արդիւնք} \end{array}$$

Բ.

$$\begin{array}{r l} 45618 & \\ 6 & \text{Առնելիք} \\ \hline 273708 & \text{Արդիւնք} \end{array}$$

Գ.

$$\begin{array}{r l} 501309603 & \\ 4 & \text{Առնելիք} \\ \hline 2005238412 & \text{Արդիւնք} \end{array}$$

25. Թիւ ինչ 10իւս բազմապատկուցանի, եթէ դիցի զատարկ ընդ աջմէ կողմանէ այնր թուոյ, քանզի այսու իսկ 10իւս առաւելու զօրութիւնն թուոյն այնորիկ: Ըստ սմին օրինակի եւ 100իւս, եւ 1000իւս եւ..., յորժամ դիցին ընդ աջմէ կողմանէ այնր թուոյ երկու կամ երեք կամ... զատարկք:

26. Իսկ իբրեւ երկոքին առնելիքն եւս յօղուածոյք իցեն,

Ա․ Յետ զբազմացուցիչն ի ներքոյ բազմացուցանելոյն դրոշմելոյ, միաւորաւ բազմացուցչին բազմացո զողջոյն բազմացուցանելին, եւ զարդիւնսն դրոշմեա ընդ գծիւն:

Բ․ Ապա յետ այնորիկ զնոյն ձեւ եւ տասնաւորաւ եւ հարիւրաւորաւ եւ . . . բազմացուցչին բազմացո: Այլ քանզի թիւն առաջին, որ անդստին ի տասանէ ծագիցէ, չէ միաւոր, (որպէս յայտ արարեալ ցուցանիցէ քեզ Ա. օրինակն, յորում փոխանակ 60իցս 7 ասելոյ, համառօտիւք 6իցս ասացաք,) նոյնպէս եւ երկրորդ նշանակ թուոյն, ըստ նմին նմանութեան եւ երրորդն, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ. վասն այնորիկ կարգեա այնպէս՝ զի միաւոր արդեանցն տասնաւորի, հարիւրաւորի, . . բազմացուցչին, ընդ տասնաւորաւ, հարիւրաւորաւ, . . բազմացուցչին սկիզբն առնուցուն դրոշմելոյ:

Գ․ Եթէ դէպ լիցի, զի ի բազմացուցիչն կայցէ զատարկ, մարթի ի բաց թողուլ զայնս եւ ոչ բազմացուցանել, որպէս յԲ օրինակին տեսանիցես:

Դ․ Իբրեւ այս ամենայն ի գլուխ ելեալ կատարիցի, յաւել զարդիւնսն ի միմեանս, եւ որ ինչ բովանդակութիւն գումարիցի, այն իսկ է համօրէն արդիւնքն:

Ե․ Եթէ ի վերջ կոյս աջոյ կողման բազմացուցանելոյն եւ բազմացուցչին իցեն զատարկք, համարեա որպէս թէ չիցեն, եւ յետ աւարտելոյ զբազմացուցանելն, զամենայն զատարկսն ընդ աջմէ կողմանէ արդեանցն կարգաւ դրոշմեասջիր:

Ա.	Բ.	Գ.
34567	5904	65000
263	3003	2300
103701	17712	195
207402	17712	130
69134	17729712	149500000
9091121		

27. Եթէ կամք իցեն զփոքր առնուլ ճանաչել, եթէ ի բազմացուցանելն վրիպեալ ինչ իցես արդեւք, դարձեալ միւսանգամ բազմացո, այլ այնպէս՝ զի յերկրորդումն նուագի փոփոխեալ զբազմացուցիչն ի բազմացուցանելի, առաջին բազմացուցանելեաւ զբազմացուցիչն բազմացուսցես: Իբրեւ արդիւնքն զուգական եւ նման իցէ առաջնոյն, բարւոք է: Մարթի եւ բաժանելով զփոքր առնուլ ուղղութեան բազմացուցանելոյն, այլ այս քան զառաջինն ծանր եւ դժուարին է:

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր: Եթէ 1 ձողն 6 ոտք իցէ, 49 ձողք քանի՞ ոտք իցեն:

Պատասխանի: $6 \times 49 = 294$ ոտք:

Բ. Խնդիր: 40 նաքարակիտք Տաճկաց մի դահեկան Տաճկաց է, եւ մի նաքարակիտ, 3 լումայք. արդ 40 դահեկանք եւ 39 նաքարակիտք Տաճկաց քանի՞ լումայս գործիցեն:

Պատասխանի: $40 \cdot 40 \cdot 3 + 39 \cdot 3 = 4917$ լումայս:

Գ. Խնդիր: Այր ոմն կամեցեալ կանգնել որմն ի թրծուն աղիւսոյ, յերկայնութիւն որմոյն 2600 աղիւսոյ, եւ ի լայնութիւն 8, եւ ի բարձրութիւն 150 աղիւսոյ պէտք են. արդ ի կազմած ողջոյն իսկ որմոյն ո՞րչափ աղիւսոյ պէտք իցեն:

Պատասխանի: Քանզի յերկայնութիւն 2600 աղիւսս ունի կարգել, եւ ի լայնութիւն 8, եւ ի բարձրութիւն 150. աստատին գտցես դոյ, եթէ ի միում միում կարգի անդ $8 \times 2600 = 20800$ աղիւսոյ ունի պէտս: Եւ քանզի 150 կարգս եւս մի զմիով կարգիցէ ի բարձրութիւն, ապա ուրեմն ի կազմած ողջոյն որմոյն $150 \times 20800 = 208 \times 15 \times 1000 = 3120000$ աղիւսոյ պէտք իցեն:

Դ. Խնդիր. Փայտի՝ որոյ երկայնութիւն 1 ոտն իցէ, գինք 35 նաքարակիտք Տաճկաց են. ապա զի՞նչ ինչ գինք այնր փայտի իցէ, որոյ 5 ձողք եւ 4 ոտք երկայնութիւն իցէ։

Պատասխանի։ 5 ձողք եւ 4 ոտք առնեն $5 \cdot 6 + 4 = 34$ ոտս. ապա $34 \times 35 = 1190$ նաքարակիտք։

ԲԱԺԱՆՈՒՄՆ

28. Յորժամ զչափ ինչ իբրեւ արդիւնս իմն համարիցիմք երկուց առնելեաց, եւ զմին յառնելեացն գիտիցեմք, մարթեմք ի ձեռն ծանուցեալ արդեանցն եւ առնելոյն զմեւս առնելին գտանել, որ անծանօթն է։ Արդ այս իսկ անուանեալ կոչի Բաժանումն։ Որպիսի ինչ 48 արդիւնք իմն է երկուց առնելեաց, յորոց մի է 6, եւ միւսն անծանօթ. յորժամ խնդրիցեմք, եթէ քանիցս արդեւք բովանդակիցի 6 ի 48, գտանիցեմք եթէ 8իցս. արդ 8 է միւս առնելին, քանզի $6 \cdot 8 = 48$։ Ծանուցեալ արդիւնքն ասի Բաժանելի. առնելին զոր գիտիցեմք՝ Բաժանարար, իսկ միւս առնելին չծանուցեալ որ ի նոցանէն ծագիցի, Քանորդ։

29. Եթէ բաժանարարն թիւ ինչ իցէ չնշանակիչ, քանորդն ընդ բաժանելւոյն համազգի լինիցի, եւ ցուցանիցէ, եթէ քանորդն այնչափ ինչ միութեամբք գտանի ի բաժանելին, որչափ ինչ միութիւնս բաժանարարն նշանակիցէ։ Զոր օրինակ եթէ զ12 դահեկանս կամիցիմք յ3 մասունս կտորել, 4 դահեկանք միում միում բաժանիցին։ Ապա եթէ բաժանարարն ընդ բաժանելւոյն համազգի իցէ, յայնժամ քանորդն լինի թիւ չնշանակիչ, եւ զայս եւեթ յայտ առնէ, եթէ քանիցս արդեւք բաժանարարն ի բաժանելին գտանիցի. որպէս եթէ զ24 դահեկանս ի 4 դահեկանս բաժանիցեմք, քանորդն 6 ցուցանէ եթէ 4 դահեկանք ի 24 դահեկանս 6իցս գտանին։ Որպէս մօտաւոր օրինակքն յայտ առնիցեն, մարթ է եւ բաժանելւոյն թիւ ինչ չնշանակիչ լինել։

30. Նշան բաժանելոյ այսպիսի ինչ (:) է. եւ իբրեւ ի մէջ երկուց թուոց կամ չափուց դիպի-

ցին, ցուցանեն՝ եթէ թիւն որ ընդ ձախմէն կայցէ, ընդ այն՝ որ ընդ աջմէն իցէ, բաժանելոց է։ Զոր օրինակ 54 : 9 = 6, եւ ընթերցեալ լինի զայս ձեւ օրինակի. 54 բաժանեալ ընդ 9, հաւասար է 6։ Արժ է զայս եւ այլով իմն օրինակաւ նշանակել, ձգեալ գիծ երկայնութեան ընդ մէջ բաժանելւոյն եւ բաժանարարին, եդեալ զբաժանելին ի վերայ գծին, եւ զբաժանարարն ի ներքոյ, այսպէս $\frac{54}{9}=6$։

31. Յորժամ կամիցիս զթիւ ինչ յօղուածոյ, որ աւելի քան զերկուս նշանակս թուոց ունիցի, ի պարզ ինչ թիւ բաժանել, պարտ եւ պատշաճ է զայս օրինակ զկրան վճարել։

Ա. Դրոշմեա զբաժանելին ի ձախմէ կողմանէ, եւ զբաժանարարն ընդ աջմէ, եւ զնշան բաժանմանն դիջիր ի միջոցին, եւս զնշան հաւասարութեանն առաջի բաժանարարին, առ կարօղ լինելոյ զքանորդն մերձ առ նմա գրել։

Բ. Յետ այնորիկ որոնեա եթէ բաժանարարն քանիցս գտանիցի յառաջին թիւ ձախոյ կողման բաժանելւոյն։ Այս եթէ այնպիսի ինչ դիպիցի, զի առաջին թիւն փոքր իցէ քան զբաժանարարն, առ եւ զմեւս եւս թիւ բաժանելւոյն, եւ որոնեա ի նոսա ըստ առաջնոյ օրինակին. որպէս տեսանես յԱ. օրինակին, 4 յ9, 2իցս։ Դիր զ2 առ նշանաւ հաւասարութեան, եւ այնուիկ բազմացո զբաժանարարն, եւ զարդիւնսն դրոշմեա ընդ առաջին մասամբ բաժանելւոյն եւ հան անտի, որպէս ի նմին օրինակի անդ 2իցս 4 = 8, զոր իբրեւ հանցես յ9 թուոյ, մնայ մնացորդ 1։

Գ. Մօտ առ 1 մնացորդաւն ածեալ կայուցես զերրորդ թիւ բաժանելւոյն եւ լինիցի 14։ Բաժանեա զայս ի 4 բաժանարարն, եւ զքանորդն գրեա առ առաջին քանորդաւն, եւ այսու 3 քանորդաւ բազմացո զբաժանարարն, դիր ի ներքոյ 14 թուոյն, եւ հան անտի, յորմէ եւ այլակերպութիւնն մնայ 2։

Առ այլակերպութեամբն բեր եւ զմիւս եւս նշանակ 8, եւ զայն եւս բաժանեալ, զքանորդն դիջիր առաջի 23 քանորդին, եւ զայս օրինակ յառաջ խաղա մինչեւ ցվերջին թիւ բաժանելոյն:

Դ. Արդ եթէ յետ զարդիւնս քանորդին եւ բաժանարարին, ի բաժանելոյն հանելոյ, չյաւելուցու ինչ մնացորդ, եւ թիւն՝ զոր ի բաժանելոյն առիցես, փոքր իցէ քան զբաժանարարն, եւ ընդ այն չբաժանիցի, յայնժամ դիջիր ի քանորդն դատարկ, եւ բեր միւս եւս նշանակ ի բաժանելոյն, եւ այնպէս բաժանես:

Ե. Յետ կատարելոյ, եթէ չյաւելուցու ինչ մնացորդ, այս նշանակ յայտարար է, եթէ այնչափ, որչափ ինչ միութիւնք քանորդին ցուցանիցեն, բաժանարարն զատանի ի բաժանելին: Արդ եթէ իցէ մնացորդ, յայտ է եթէ ոչ ճշդիւ բաժանարարն ի բաժանելին զատանի. վասն որոյ ձգես առաջի քանորդին գիծ երկայնութեան, զմնացորդն դիջիր ի վերին կողմն գծին, եւ զբաժանարարն ի ներքոյ: Զայս զօրութենէ լիցի բան, յորժամ զչափուցն կատարելոց անկցի ճառս:

Ա.

$$948 : 4 = 237$$

```
948 : 4 = 237
 8
---
 14
 12
 ---
  28
  28
  ---
   0
```

Բ.

$$3677532 : 5 = 735506\tfrac{2}{5}$$

```
3677532 : 5 = 735506 2/5
35
---
 17
 15
 ---
  27
  25
  ---
   25
   25
   ---
     32
     30
     ---
      2
```

Եթէ պարզ ինչ թիւ իցէ բաժանարարն, բազում անգամ լինի բաժանումն՝ դրոշմեալ զայլակերպութիւնս ի վերայ բաժանելոյն, եւ զհանումն առանց ինչ դրոշմելոյ ինքնին ի մտաց կատարեալ։ Որպիսի ինչ այս.

$$1\overset{3}{5}\overset{1}{7}\overset{5}{7}\overset{2}{6} : 6 = 2629\tfrac{2}{6}$$

Այսինքն 6 ի 15, 2իցս գտանի. 2իցս 6 = 12, մնայ մնացորդ 3, որ կայ ի վերայ բաժանելոյն։ 6 յ37, 6իցս, 6իցս 6 = 36, մնայ մնացորդ 1, եւ որ այլն եւս մի ըստ միոջէ։

32. Օրինակ բաժանելոյ զչափ ինչ ի յօդուածոյ բաժանարար, այսպիսի ինչ է։

Ա. Զբաժանարարն եւ զբաժանելին ըստ օրինակի որպէս վերագոյնդ ասացաք (Հ. 31. Ա.) կարգեա։ Ապա սկիզբն արա բաժանել ի ձախոյ կողման առաջին թիւ բաժանարարին զձախոյ կողման առաջին թիւ բաժանելոյն. եւ եթէ բաժանելոյն թիւն փոքր գիտիցի քան զբաժանարարն, առ զմեւսն եւս, եւ զգտեալ քանորդն դիր յանդիման հաւասարութեան։ Քանորդաւս այսուիկ բազմացո զբաժանարարն ողջոյն, եւ զարդիւնսն դիջիր ընդ այնչափ նշանակօք բաժանելոյն, որչափ ինչ միանգամ ի բաժանարարն նշանակք թուոյ կայցեն. ապա եթէ առաջին թիւ բաժանելոյն փոքր քան զբաժանարարին առաջին թիւն իցէ, զառաջին եւ զերկրորդ թիւն ի մի համար կարգեա, եւ այսպէս միով նշանակաւ ի բաժանելին յառաջ խաղա։ Զհանելի թիւն հան ի նուազելի թուոյ անտի։

Բ. Մօտ առ այլակերպութիւնն բեր զմի ի թըւոյ բաժանելոյն որ զհետ գայցէ։ Բաժանեա զայն. եթէ բաժանարարն եւ ոչ միանգամ գտանիցի ի բաժանելին, դրոշմեա ի քանորդն զատարկ, եւ բերեալ մեւս եւս նշանակ թուոյ ի բաժանելոյն, բաժանեա ընդ բաժանարարն։ Զքանորդն գրեա ի պատշաճախման տեղւոյն, բազմոյս նովաւ զբաժանարարն, եւ հան զարդիւնսն: Յետ աւարտելոյ բաժանման, եթէ յաւելուցու ինչ մնացորդ, ձգեա գիծ առաջի քաներորդին, եւ գրեա զմնացորդն ի վերին կողմն գծին, եւ զբաժանարարն ի ներքոյ կողմանէ:

Յայս եւս պարտ եւ պատշաճ է ուսանելեացն զգուշ լինել, զի եթէ յետ զբաժանարարն քաներորդիւն բազմացուցանելոյ, արդիւնքն մեծագոյն քան զբաժանելին իցէ, միով թուով պարտ է զքաներորդն նուազեցուցանել, եւ այնպէս դարձեալ բազմացուցանել: Արժէ է զայս եւս ի մտաց խմանալ, յորժամ յառաջագոյն զգուեալ քաներորդն վերջին նշանակօք բաժանարարին բազմացուցանիցես, եւ զարդիւնսն ընդ յետին նշանակս բաժանելւոյն կշռիցես: Նոյնպէս եթէ յետ զարդիւնսն ի բաժանելւոյն հանելոյ, այլակերպութիւնն մեծագոյն քան զբաժանարարն իցէ, պարտ է միով թուով զքաներորդն բազմացուցանել, քանզի նշանակ է, եթէ քաներորդն զօր դնէր, փոքր քան զառոյգ չափն է:

Ա.

$$
\begin{array}{r l}
72556 : 2134 = 34 & \\
6402 & \\
\hline
8536 & \\
8536 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Բ.

$$
\begin{array}{r l}
2783678 : 4238 = 656\,\frac{3550}{4238} & \\
25428 & \\
\hline
24087 & \\
21190 & \\
\hline
28978 & \\
25428 & \\
\hline
3550 &
\end{array}
$$

33. Թիւ ինչ բաժանի ընդ 10, 100 . . . , եթէ յաջմէ կողմանէ բաժանելւոյն մի, երկուս . . . նշանակս թուոց ըստ չափու դատարկ թուոյն հատանիցես. նշանակքն՝ որ մնան ընդ ձախմէ, նշանակք քաներորդին են, իսկ հատեալ նշանակքն, եթէ չիցեն դատարկ, մնացորդ են, որ ի վերայ գծի երկայնութեան առաջի քաներորդին գրոշմի, եւ բաժանարարն ընդ նովաւ: Զոր օրինակ.

$$7609|26 : 1|00 = 7609\,\frac{26}{100}$$

34. Եթէ ի վերջ կայս բաժանարարին եւ բաժանելւոյն կայցեն դատարկք, վասն կարճ ի կարճոյ զերան վճարելոյ, հատ յաջմէ կողմանէ երկոցունցն եւս

զդատարկն հաւասար չափով, եւ ապա սկիզբն արա բաժանելոյ: Օրինակ.

$$480|00:6|00=480:6=80$$

Ապա եթէ ի վերջին կողմն բաժանարարին եւեթ իցեն զատարկքն, յայնժամ պարտ է հատանել զդատարկն բաժանարարին, եւ այնչափ ինչ նշանակս ի բաժանելւոյն, որչափ ինչ դատարկ կայցեն ի բաժանարարն. եւ ապա զմնացեալ բաժանելին բաժանել ընդ մնացեալ բաժանարարն, եւ զմնացորդն ի բաժանելւոյն, որպէս վերագոյն ասացաք, գրոշմեա գծիւ առաջի քանորդին: Որպէս $23|67:4|00=5\frac{367}{400}$

35. Եթէ կամիցիս զուղղութիւն բաժանմանդ տեսանել. զքանորդն բաժանարարին բազմեա, եւ յարդիւնսն յաւել զմնացորդ բաժանմանն, յորժամ զոյգ ընդ բաժանելւոյն իցէ բովանդակութիւնն, ուղղութեան նշանակ է:

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր: Արք ութ ունին 30489 դահեկանս, եւ կամին բաժանել. որչափ ինչ միում միում ելանիցէ:

6001

Պատասխանի: $30489:8=3811\frac{1}{8}$ դահեկանք:

Բ. Խնդիր: Մի ձողն $=6$ ոտք, եւ մի ոտն $=12$ մատունք. արդ ի 23400 մատունս քանի՞ ինչ ձողք գտանիցին:

Պատասխանի: 23400 մատունք $:12=1950$ ոտք, եւ 1950 ոտք $:6=325$ ձողք:

Գ. Խնդիր: Միոյ տարւոյ 31556928 երկրորդական վայրկեանք են. արդ կամիմք տեղեակ լինել, եթէ միոյ տարւոյ քանի՞ ինչ աւուրք, ժամք, եւ վայրկեանք, եւ երկրորդական վայրկեանք իցեն:

Պատասխանի: Քանզի որովհետեւ 60 երկրորդական վայրկեան մի վայրկեան է, ապաքին մարթ է քեզ յանձնէ իմանալ եթէ 31556928 երկրորդական վայրկեանք = (31556928 : 60) վայրկեանք = 525948 վայրկեանք + 48 երկրորդական վայրկ։ Եւ զի 60 վայրկեանք միոյ ժամու հաւասար են, ապա ուրեմն 525948 վայրկ. = (525948 : 60) ժամք = 8765 ժամք + 48 վայրկ։ Ըստ սմին օրինակի 8765 ժամք = (8765 : 24) աւուրք = 365 աւուրք + 5 ժամք. ուստի եւ միոյ տարւոյ՝ են 365 աւուրք + 5 ժամք + 48 վայրկեանք + 48 երկրորդական վայրկեանք։

Դ. Խնդիր։ Պարտ է մեզ զ270000 աղիւս ի տեղւոջ ուրեք կարգել. ի միում միում կարգի ընդ երկայնութիւն 150 աղիւս, եւ ի լայնութիւն 60 ունիմք կարգել. արդ որչափ ինչ կարգս մի զմիով պարտ իցէ մեզ դնել։

Պատասխանի։ Որովհետեւ ընդ երկայնութիւն 150, եւ ընդ լայնութիւն 60 աղիւս կարգելոց եմք, ապա ի մի մի կարգ 150 · 60 = 9000 աղիւսք գտանիցին. արդ 270000 : 9000 = 30 կարգք։

Ե. Խնդիր։ Եթէ վասն պարեգօտի միոյ 6 կանգուն ասուեաց պէտք իցեն. որչափ ինչ պարեգօտք յօրինիցին ի 20 բաժնից ասուոյ, որոյ ի միում միում բաժնի 36 կանգունք կայցեն։

Պատասխանի։ Քանզի միում բաժնի 36 կանգունք են, ապա ի 20 բաժինս 20 · 36 = 720 կանգունք գտանիցին. եւ զի միոյ պարեգօտի 6 կանգնոյ պէտք են, ապա յ720 կանգնոյ 720 : 6 = 120 պարեգօտք կազմիցին։

Գ Լ Ո Ւ Խ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՄԱՐԵԼՈՑ ՕՏԱՐԱԶԳԻ ԹՈՒՈՑ ՈՐՈՑ ՄԱՐԹԻՑԷ Ի ՀԱՄԱԶԳԻՍ ՓՈՓՈԽԵԼ

36. ԱՅՍՈՒԹԻՒՔ *չորիւք օրինակօք համարելոյ, զորոց մինչեւ ցայս վայր ճառեցաք, մարթ է եւ զայն օտարազգի թիւս, որ ի համազգիս փոփոխել կարիցեն, հաշուել, եթէ ի համազգիս կամ ի մասունս մանունս փոքու ազգի իւրեանց զնոսա շրջիցեմք, որպէս, վասն զ*3 *ձողս եւ զ*4 *ոտս եւ զ*9 *մատունսն հաշուելոյ, պարտ եւ պատշաճ է զնոսա ի* 216 + 48 + 9 *մատունս դարձուցանել: Իսկ զի յառաջագոյն գիտելոյ պէտք են, եթէ այս ինչ եւ այս միութիւն, քանի՞ միութիւնս արդեւք ի փոքրագոյն ազգէն յինքեան փակեալ բովանդակիցէ, աստէն ի սմին վայրի դիցուք փոքր ի շատէ զնշանաւորս ի կշռոց եւ ի չափուց, զի դիւրաւ եւ պատրաստագոյնս ի վերայ հասանել կարիցեն ուսանելիքն հաշուելոյ թըւոյն օտարազգեաց:*

Ա. *Երկայնութիւնք չափին ձողով, ոտիւք, մատամբք. բացարձակութիւնք վայրաց եւ ճանապարհաց՝ մղոնաւ. իսկ հատանելի վաճառք՝ կանգնով:*

Մի ձող ի 6 *ոտս բաժանի, մի քաղաքային ոտն յ*12 *մատունս, մի մատն յ*12 *գիծս, եւ մի գիծ յ*12 *ստիքս, մի ստիքս յ*12 *հինգերորդս: Երկրաչափական ոտն, որոյ նոյն երկայնութիւն է ընդ քաղաքային ոտին՝ ի* 10 *մատունս հատանի, մի մատն ի* 10 *գիծս, այլովքն հանդերձ: Ձողն, ոտնն, մատնն, գիծն, ստիքսն, հինգերորդն որպէս եւ այլ փոքր մասունք ազգիազգի չափուց նշանակին նշանակօքս* $^{\circ}$, ^{Ա}, ^{Բ}, ^{Գ}, ^{Դ}, ^{Ե}, *որ եւ դնին ի վերայ նշանակաց թուոց՝ պէս զայս օրինակ,* 5°, $4^{Ա}$, $9^{Բ}$, $10^{Գ}$, $11^{Դ}$, $7^{Ե}$, *որ յայտ առնեն* 5 *ձողս,* 4 *ոտս,* 9 *մատունս,* 10 *գիծս,* 11 *ստիքս,* 7 *հինգերորդս:*

Բացարձակութիւն վայրաց, որպէս ճանապարհաց, չափին մղոնաւ. 1 *գերմանական մղոնն ի* 4000 ձողոյ Անգղիացւոց կազմի. մի մղոնն՝ միոյ եւ կէս ժամու ճանապարհ է:

Կանգունն բաժանի ի կէս, ի չորրորդ, յութերորդ, ի վեշտասաներորդ. կամ յերրորդ, ի վեցերորդ. եւ կամ ի տասներորդ մասունս:

Բ. Տափարակ երկայնատարած վայրք չափին Չորեքկուսեաւ, (որ է հաւասարակող ուղղանկիւն չորեքկուսի), որոյ կողմանցն՝ կամ միոյ ձողոյ կամ միոյ ոտին, կամ միոյ մատին երկայնութիւն է, զորս եւ անուանեալ կոչեմք ձողս, ոտս, մատունս չորեքկուսիս, այլովքն համդերձ: Եւ աստի իսկ կարես յանձնէ իմանալ եթէ չորեքկուսի ձողն ի $6 \cdot 6 = 36$ չորեքկուսի ոտից կայ, եւ չորեքկուսի ոտնն յ$12 \cdot 12 = 144$ մատունս չորեքկուսիս բաժանի, եւ մատնն չորեքկուսի յ$12 \cdot 12 = 144$ գիծս չորեքկուսիս, այլովքն համդերձ:

Գ. Իսկ չափք հաստատուն մարմնոյն չափին չորեքկուսի խորանարդիւ (որ է մարմին հաստատուն, որոյ 6 հաւասար չորեքկուսի երեսք իցեն), որոյ մի կողմն կամ մի ձող եւ կամ մի ոտն, եւ կամ մի մատն է, եւ կամ այլ ինչ չափ, որ եւ յորջորջին խորանարդ ձող, խորանարդ ոտն, այլովքն համդերձ: Եւ յայտ է, եթէ խորանարդ ձողն ի $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ ոտս բաժանի, եւ ոտնն յ$12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ մատունս հատանի, եւ մատնն յ... :

Դ. Յերկրին Տաճկաստանի ծանունքն չափին ի լտերս Տաճկաց, որոյ մի լիտրն ունի դրամս 400:

Ե. Ի մի դահեկան Տաճկաց 40 նաքարակիտք Տաճկաց գտանին, եւ ի մի նաքարակիտն 3 լումայք:

Ի մեծաւոր պատկերի աստ դիցուք զմասունս նշանաւոր չափուց, զոր եւ ցանդ առաջի աչաց ունիցին ուսանողքն, եւ դիւրաւ, զոր խնդրենն ի չափուց անուն, գտանել մարթայցեն:

					Ցորեան	Հինգեր.					
				Դրամ	60	12	Սախրս				
			Կէս ունկի	4	240	144	12	Գիծ			
		Ունկի	2	8	480	1728	144	12	Մատն		
	Լիտր	16	32	128	7680	20736	1728	144	12	Ոտն	
1 Քանքար	100	1600	3200	12800	768000	124416	10368	864	72	6	1 Ձող

				Դանգ	Երր. վայրկե.				
			Լումայ	2	60	Երկ. վայրկ.			
		Նաքարակիտ	4	8	3600	60	Վայրկեան		
	Երկերդր.	3	12	24	216000	3600	60	Ժամ	
1 Դահեկ. դերմ.	20	60	240	480	5184000	86400	1440	24	1 Օր

Իբրեւ բանք լինիցին զհամեմատութենէ, անդէն ի նմին վայրի տեսցուք, եթէ որո՞վ օրինակաւ զազգիազգի կշիռս այլեւայլ ազգաց՝ մարթ իցէ ի միմեանս փոփոխել:

37. Միութիւնք մեծագոյն ազգի, շրջին ի միութիւնս փոքրագոյն ազգի իւրեանց, յորժամ զմեծագոյն ազգն այնչափ միութեամբք բազմապատկեսցանիցես, որչափ ինչ միութիւնք ի փոքրագոյն ազգէն ի մի միութիւն մեծագոյն ազգին գտանիցին: Իսկ իբրեւ զմիութիւնս փոքր ազգին ի միութիւնս մեծագոյն ազգին ոք կամիցի փոփոխել, պարտ է զմիութիւնն զայնոսիկ ընդ այնչափ միութիւն բաժանել, որչափ ինչ միութիւնք ի փոքրագոյն ազգէն ի մի միութիւն մեծագոյն ազգին գտանիցին: Որպիսի ինչ. 3 դահեկանք Տաճկաց շրջին ի նաքարակիտս Տաճկաց, յորժամ 3.40 = 120 նաքարակիտք: Եւ զորին հակառակն 120 նաքարակիտքն Տաճկաց փոփոխին ի դահեկանս զայս ձեւ 120 : 40 = 3 դահեկանք:

38. Եթէ կամիցիս զթիւս տարազգիս ի միմեանս յաւելուլ, զառաջինն կարգեալ դրոշմեա զիւրաքանչիւր ազգ յառանձինն բաժինս, զմեծագոյնս ի

Ձախմէ կողմանէ եւ զմնացեալն ընդ աջմէ կարգ ըստ կարգէ մինչեւ ցյետինն: Արդ այնուհետեւ սկիզբն յաջմէ կուսէ արարեալ, ժողովեա զամենայն թիւս այնր ազգի, որ փոքր իցէ քան զայլսն. հայեաց եւ տես եթէ բովանդակութիւն նոցա հաւասար իցէ միոյ միութեան մեծագոյն ազգի: Եթէ չիցէ զոյգ եւ հաւասար, դրոշմեա ընդ գծիւն. ապա եթէ հաւասար ինչ իցէ, եւ կամ աւելի քան զայն, խնդրեա եթէ քանի միութիւնք ի մեծագոյն ազգէ անտի ի նմին բովանդակութեանն գտանիցին, կամ (ըստ 37 համարոյ) զմիութիւնս փոքր ազգին շրջեա ի մեծագոյն ազգն: Զմնացորդն, եթէ իցէ, գրեա ընդ գծիւն, եւ զքանորդն յաւել ի մեծագոյն ազգն, որ զհետ գայցէ. իսկ եթէ չիցէ ինչ մնացորդ, դրոշմեա փոխանակ մնացորդին զատարկ: Զայս օրինակ յառաջ խաղա մինչեւ ժամանիցես ի յետին մեծագոյն ազգն:

Օր.	Ժամ.	Վայրկեան.	Երկ. վայր.	Երր. վայրկ.
6	20	14	50	20
7	18	20	0	50
18	20	30	30	30
20	36	45	6	0
54	23	50	27	40

Յայսմ վայրի եդեալ կանոնքս յայտ յանդիմանն երեւեսցին յօրինակիս: Զառաջինն սկիզբն արարաք յաջմէ, եւ ժողովեալ միահամուռ զփոքր ազգն, որ են երրորդական վայրկեանք, գտան $20+50+30+0=100$ երրորդական վայրկեանք: Եւ զի բովանդակութիւնս առաւելու քան զմի երկրորդական վայրկեան (որ է 60 երրորդական վայրկեան), հանեալ անտի զ60 երրորդական վայրկեանսն, յաւելու մնացորդ 40 երրորդական վայրկենից: Արդ յետ այնորիկ գումարեալ զերկրորդական վայրկեանս $50+0+30+6=86$, եւ յաւելեալ ի սա եւ զ1 երկրորդական վայրկեան, որ ժողովեցաւ յերրորդական վայրկենից՝ բովանդակութիւնն եղեւ 87 երկրորդական վայրկեանք: Յորմէ հանեալ զ1 վայրկեանն, (որ է 60 երկրորդական վայրկեան,) դրոշմեցաք զմնացորդն 27 ի ներքոյ։ Զայս օրինակ համարեալ եւ զվայրկեանսն եւ զժամս եւ զաւուրս, գտաւ բովանդակութիւնս = 54 աւուրց, 23 ժամուց, 50 վայրկենից, 27 երկրորդական վայրկենից, եւ 40 երրորդական վայրկենից։

39. Օրինակ հանելոյ ի միմեանց զԹիւս տարազգիս այսպիսի ինչ է։ Յետ զիւրաքանչիւր ազգ յուրոյն ուրոյն բաժինս կարգելոյ, սկիզբն յաջմէ արարեալ հան զփոքրագոյն ազգն ի նուազելի Թուոյ իւրմէ, եւ զայլակերպութիւնն դրոշմեա ընդ գծիւ։ Եթէ հանելի Թիւն մեծ քան զնուազելի Թիւն դիպիցի, առ մի միութիւն ի մեծագոյն ազգէ անտի, եւ շրջեա զայն ի փոքր ազգն, եւ զայն ի նուազելի Թիւն յաւելեալ, ի բովանդակութենէ անտի նոցա հան զհանելի Թիւն։ Նա զգուշ լեր զի ի հատանել քո ի մեծագոյն ազգն, միով Թուով պակաս հաշուիցես զնուազելի Թիւն այնր ազգի։

Ա.

Օր.	Ժամ.	Վայրկեան.	Երկր. վայրկեան.
30	13	0	0
15	20	30	25
14	16	29	35

Բ.

Դահեկան Տաճկաց.	Նաքարակիտ Տաճ.
16	17
9	33
6	24

Յա. օրինակին, քանզի զ25 ի 0է անտի չէ մարթ հանել, առաք մի միութիւն ի մեծագունէն, որ են վայրկեանքն, եւ զի այն եւս պակասէր, յ13 ժամուց զ1 ժամն ի 60 վայրկեանս շրջեալ, եւ զ1 ի վայրկենից անտի ի 60 երկրորդական վայրկեանս, սկիզբն արարաք հանելոյ։ Զայս օրինակ եւ ի Բ. օրինակին։

40. Օտարազգի թիւ ինչ նշանակիչ՝ չնշանակիչ թուով բազմացուցանի, յորժամ յետ զիւրաքանչիւր ազգ ուրոյն ուրոյն եւ զատ ի միմեանց կարգելոյ, սկիզբն ի փոքունց արարեալ բազմացուցես չնշանակիչ թուովն, եւ յարդեանց անտի հանեալ զմիութիւնս մեծագոյն ազգի, զմնացորդն ընդ գծիւն դրոշմեսցես, եւ զմիութիւնս մեծագոյն ազգին յիւր ազգն յաւելուցուս: Զոր օրինակ,

Ա.

35^Օ	5^Ա	8^Ր
		5
179	4	4

Բ.

Դահեկ. Տաճկաց.	Նաքար.	Լումայք.
7	8	2
		5
36	3	1

Յա. օրինակի անդ 5իցս 8, առնէ 40 մասունս, այս ինքն է 3 ոտս եւ 4 մասունս, (քանզի 12 ի 40 գտանի 3իցս, եւ յաւելու մնացորդ 4,) արդ մնացորդն 4 գրեալ կայ ընդ գծիւ, եւ 3 յաւելեալ ի բովանդակութիւն ոտից, յորմէ հանեալ եւ զձողոյն միութիւնս, մնայ մնացորդ 4, եւ այլքն ըստ սմին օրինակի մի ըստ միոջէ:

41. Բաժանումն լինի թուոց օտարազգեաց այսպէս: Սկիզբն ի մեծագոյն ազգէն արարեալ բաժանեա, զմնացորդն որ յաւելուցու ի մեծագոյն ազգէն շրջեա ի փոքր ազգն, եւ յաւել ի միութիւնս աւընթերակաց փոքր ազգի, եւ բաժանեա: Զայս օրինակ յառաջ խաղա մինչեւ ցյետին մասունսն:

Ա. (36 ժամ, 8 վայրկեան, 36 երկրորդական վայրկեան): 6 = 6 ժամ, 1 վայրկեան, 26 երկրորդական վայրկեան:

Բ.

$$(10^{0},\ 5^{Ը},\ 9^{Ր},\ 8^{Դ}) : 4 = 2^{0},\ 4^{Ը},\ 5^{Ր},\ 5^{Դ}$$

Եւ այլով իմն օրինակաւ լինի բաժանումն, եթէ բաժանելին եւ բաժանարարն նշանակիչք իցեն: Զբաժանելին եւ զբաժանարարն շրջեա ի մի եւ ի նոյն փոքր ազգ, եւ ապա սկիզբն արա բաժանելոյ: Որպիսի ինչ.

$$(11^{0},\ 4^{Ը}) : (5^{Ը},\ 10^{Ր}) = 840^{Ր} : 70^{Ր} = 12$$

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍՆ՛

ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ

ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆ՛

Ն Շ Ա Ն Ա Գ Ր Ո Վ Ք
Հ Ա Մ Ա Ր Ո Ղ Ո Ւ Թ Ի Ւ Ն

Տ Ե Ղ Ե Կ Ո Ւ Թ Ի Ւ Ն
ՎԱՍՆ ՀԱՄՕՐԷՆ ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆ

42. ԹԷՊԷՏ *եւ նշանակք թուոցն, զորոց մինչեւ ցայս վայր ճառ արկեալ խօսեցաք, կարիցեն զամենայն ազգիազգի չափս նշանակել, այլ առաւել քան զմիութիւնսն՝ որ ի նոսա կայցեն, ցուցանել ոչ կարեն, որպիսի ինչ է* 5 *նշանակս, որ թէպէտ եւ կարիցէ* 5 *ձողս,* 5 *արս,* 5 *տունս, եւ* 5 *երիվարս, եւ այլ եւս նոյնպիսիս ցուցանել, այլ ըստ իւր չափն անցանել եւ զ*100, *զ*1000, *զ*. . . *յայտ առնել չզօրէ: Նա զի բազում անգամ ի գիտութիւնս, յորս խառնի ուսողութիւնն իւրով հնարագէտ ճարտարութեամբ, բազում դէպք դիպին, յորս դժուարին եւ ծանրատաղտուկ բեռն է նշանակօք թուոցն համարել, մանաւանդ թէ անհնարին իսկ, հնարեցաւ եւ եգիտ մարդկեղէն իմաստութիւնս կերպարանս ինն համարելոյ, այս ինքն է նշանագրովք թուել, որք ոչ զչափն եւեթ, այլ եւ զամենայն միութիւնս կարիցեն յայտ արարեալ ցուցանել:*

Այս ազգ համարելոյ անուանեալ կոչի նշանագրովք համարողութիւն, որ եւ առանց ինչ աշխատ լինելոյ, եւ համառօտիւք կարճառօտս ի գլուխ հանեալ կատարէ զդէպս ինչ անհնարինս, եւ դուռն է այլոց գիտութեանց, փիւսիկեան փիլիսոփայութեան, աստեղագիտութեան, երկրաչափութեան, եւ համօրէն մաթեմատիկեան ճարտարութեանցն: Արդ սկիզբն արասցուք զճարտարութենէս ճառելոյ, եւ զգործոյն որ նովաւ կատարիցին:

ԳԼՈՒԽ Ա

ՑԱՂԱԳՍ ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ ՀԱՄԱՐԵԼՈՑ

ՀԱՏԱԾ Ա

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՄՕՐԷՆ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑ ԵՒ ՆՇԱՆԱՑ

43. Ի նշանագրովք համարողութեան նշանագիրք աղփաբետաց, որ են ա, բ, գ, դ..., Ա, Բ, Գ, Դ....ի կիր արկանին, որոց որպէս ինքնին իսկ յայտ է, չէք զօրութիւն, բայց սակայն զամենայն նշանակութիւն ցուցանել մարթեն, որպիսի ինչ ա նշանագիրս կարէ զ5, զ6, զ7, զ15... արս, զ5, զ11, զ20, զ1000... դահեկանս, զ4000 քանքարս յայտ առնել, ըստ նմին նմանութեան եւ բ, գ, դ, ե, ... ր, ց, ւ, փ, ք: Այլ այնմ ուշ ունել պարտ է, զի մի լիցի միոյ նշանագրի ի միում ի բովանդակ հաշուի զզօրութիւնն փոփոխել, եւ կալ փոխանակ այլոյ:

Իսկ չափքն, որք դեռ եւս չիցեն ծանուցեալ թէ զինչ ինչ նշանակիցեն, եւ ի համեմատութենէ անտի ծանուցելոցն կամին գտանել, նշանակին յետին նշանագրովք աղփաբետացն, որ են ց, փ, ք: Իբրեւ կարեւոր դէպք դիպիցին, եւ զհամեմատութիւնս չափուցն կամիցիմք ցուցանել, ի կիր առնումք զնշանագիրս ա, բ, գ, դ, ...:

44. Չափք հակառակք են, որ իբրեւ միահամուռ ժողովիցին, փոխանակաւ զմիմեանս եղծանեն կամ ամենեւին եւ կամ մասամբ իւիք, որպիսի ինչ են շահ եւ վնաս, սեպհական եւ օտարին ինչք, աճել եւ նուազել, յառաջ խաղալ եւ դառնալ ընդ կրունկ, միմեանց հակառակ զօրութիւնք, եւ այլ ինչ նոյնպիսիք: Դիցուք զրեացուք եթէ այր ոմն խաղայցէ ընդ արեւելս կոյս ձողս 10, եւ դարձցի յարեւմուտս յետս ընդդէմ առաջնոյն 7 ձողս, բովանդակ շարժումն =

10 + 7, այ՝ եթէ զմիմեանց հակառակ շարժմունս ընդ միմեանս հարկանիցեմք, գտանեմք = 10 − 7 = 3. քանզի հակառակքն մասամբ իւիք զմիմեանս եղծին:

45. Ի նշանագրովք համարողութեան նշանօք համարողութեան վարիմք: Իբրեւ պէտք լինիցին զերկուս կամ զերիս կամ զ... չափս նշանագրաց ի միմեանս յարել յաւելուլ, ի միջոցի միոյ միոյ ի չափուցն դրոշմի (+) նշանս, որպիսի ինչ, ա + բ + գ + դ + 5, որ յայտ առնէ եթէ չափքն այնոքիկ միանգամայն ժողովելոց են:

Նշան հանման է այս (−), որ իբրեւ ի մէջ երկուց չափուց նշանագրաց անկանիցի, յայտ առնէ, եթէ զչափն՝ որ ընդ աջմէն կայցէ, յայնմանէ որ ընդ ձախմէն է, հանել պարտ է: Որպէս ա − բ, ա − 30, 60 − ա: Ըստ սմին օրինակի (ա + բ) − (ա + գ):

Համարեսցուք եթէ ա = 30 իցէ, եւ բ = 20, եւ գ = 8: Ըստորին զհետ գայ եթէ (ա + բ) − (ա + գ) = (30 + 20) − (30 + 8) = 50 − 38 = 12:

Չափքն՝ որոց + եւ − նշանք առընթերակաց իցեն, են չափք հակառակք, որպիսի ինչ + 10 դահեկան շահ եւ − 20 դահեկան վնաս: Որ զ + նշան առընթեր ունիցին, Հաստատականք ասին, իսկ որ զ − նշանս, անուանեալ կոչին Ուրացականք, յորոց, որպէս վերագոյն (Հ. 44) ասացաք, փոքրագոյնն որչափ ինչ միութիւնս բովանդակիցէ, այնչափ ինչ ի մեծագունէ անտի եղծանէ: Ի սկզբան հաստատական չափուց + նշանն ոչ դնի, իսկ ուրացականին զնշանն − պարտ է միշտ դնել:

Նշան բազմացուցանելոյ է (×) կամ (·): Նաեւ ի նշանագրովք համարողութեան իբրեւ նշանագիրք կարգաւ մի ըստ միոջէ առընթերակաց միմեանց դրոշմիցին, զբազմացուցանելոյ յայտ առնեն, որպիսի ինչ աբգդ, արդիւնք իմն են ա, բ, գ, դ չափուց: Ըստ նմին նմանութեան եւ (ա + բ) (բ − գ), զբովանդակութիւնն ա + բ, բ − գ այլակերպութեամբն բազմացուցանելոյ նշանակ է։ Համարեսցուք եթէ ա = 5 իցէ, բ = 20, գ = 10. ապա ուրեմն

$$(ա+բ)(բ-գ)=(5+20)(20-10)=25\times10=250։$$

Բաժանման նշանակի, եթէ ի միջոցի բաժանելւոյն եւ բաժանարարին դիցես երկուս ստիքս (:), զոր օրինակ, ա:բ, կամ ձգիցես գիծ երկայնաձիգ, որպէս թէ $\frac{ա}{բ}$։ Ըստ սմին օրինակի $\frac{ա-բ}{3}$, (ա + բ) : գ, ա : (բ + գ), (ա + բ) : (գ + դ)։

Ի յաւելուլն եւ ի բազմապատկեցուցանելն, մարթ է նշանագրաց յառաջ եւ յետոյ քան զնշանն կալ, քանզի եւ այնու չփոփոխի զօրութիւնն, զոր օրինակ ա + բ, նոյն է ընդ բ + ա, նմին նման ա × գ նոյն է ընդ գ × ա։ Այլ սակայն նմին հակառակ ի հանմանն եւ ի բաժանմանն, յորժամ հանելի չափն եւ բաժանարարն ընդ ձախմէ նշանացն կայցեն, այլեւայլ միտս ընծայեցուցանիցեն, որպէս ա − բ, եւ ա : բ, յորոց կարի իսկ այլակերպ է բ − ա, եւ բ : ա։

46. Երբեւ թիւ ինչ կամ չափ ինքն ինքեամբ բազում անգամ բազմապատկեցուցանիցի, վասն համառօտիւք գլխոյն վճարելոյ, նշանագիրն կամ նշանակ թուոյն մի անգամ եւեթ գրոշմի, իսկ թիւն՝ որով այնչափ ինչ անգամ զնշանագիրն բազմապատկեցուցանել կամիցի ոք, գրոշմի ի վերայ նշանագրին եւ կամ նշանակի թուոյն։ Որպէս եթէ կամք իցեն զչափս ա չորիցս ինքեամբ բազմապատկեցուցանել, փոխանակ գրելոյ աաաա, գրի $ա^{4}$. նոյնօրինակ $աաաբբդդդդե = ա^{3}բ^{2}դ^{4}ե$։ Թիւն՝ որ կայ ի վերայ նշանագրաց, յորջորջի Ցուցիչ. 1 ցուցիչն ոչ դնի, որպէս ինչ յօրինակիս ի ե նշանագիրն է տեսանել։ Այսպիսի չափք ընթերցեալ լինին զայս ձեւ օրինակի. ա յերրորդում կարողութեան, բ յերկրորդում կարողութեան, դ ի չորրորդում կարողութեան, ե։ Դարձեալ $ե^{ն}$, ե ի ներորդում կարողութեան։ Զայսմ ամենայնէ եւ այլուր ճառեսցուք։

47. Թիւն՝ որ առանց անջրպետութեան ընդ ձախմէ նշանագրի իրիք կայցէ, անուանեալ կոչի Գործակից, որ նշանակէ, եթէ քանիցս անգամ զնշանա-

գիրն զայն յինքեան վերայ յաւելուլ պարտ իցէ ։ Գործակիցն 1 ոչ դնի ։ Զոր օրինակ

$$2\text{ա} = \text{ա} + \text{ա}$$
$$3\text{բ} = \text{բ} + \text{բ} + \text{բ}$$
$$5\text{բդ} = \text{բդ} + \text{բդ} + \text{բդ} + \text{բդ} + \text{բդ}$$

Նոյնպէս ըստ նմին նմանութեան $3\text{ա}(\text{բգ} - \text{դ})$, յայտ առնէ եթէ զչափն $(\text{բգ} - \text{դ})$, 3ա անգամ յինքեան վերայ պարտ է յաւելուլ ։ Դիցուք գրեցուք եթէ $\text{ա} = 5$ իցէ, $\text{բ} = 7$, $\text{գ} = 2$, եւ $\text{դ} = 8$ ։ Արդ

$$3\text{ա}(\text{բգ} - \text{դ}) = 3 \times 5\,(7 \times 2 - 8) = 15\,(14 - 8)$$
$$= 15 \times 6 = 90$$

Գործակիցն մարթ է եւ նշանագիր ինչ լինել, զոր օրինակ մդ, յորում ցուցանէ եթէ զդ մ իցս յինքեան վերայ պարտ իցէ յաւելուլ ։

48. Չափ ինչ գրոշմեալ նշանագրովք, ասի Չափ նշանագրովք համարողութեան. յորժամ մի կամ բազում նշանագիրք առանց $+$ կամ $-$ նշանաց առընթերակաց դնիցին, այն անուանեալ կոչի Պարզ կամ Միամասն ։ Իսկ որ $+$ կամ $-$ նշանօք իցեն յօդեալ, ասին Յօդուածոյ կամ Բազմամասն, եւ ըստ առաւելութեան նշանացն Երկմասնեան, Երեքմասնեան, . . . այլովքն հանդերձ ։ Որպէս $\text{ա} + 5$, $3\text{ա} - \text{բ}$ երկմասնեան են, իսկ $\text{ա} + \text{բ} - 1$ երեքմասնեան եւ այլքն եւս ըստ նմին օրինակի ։ Յօդուածոյ չափք դնին ի մէջ փակիչ գծի ։

49. Մասունքն՝ որ $+$ կամ $-$ նշանօք ընդ միմեանս յօդեալ իցեն, Անդամք յորջորջին ։ Յերկուս զատանին անդամքն, ի Համազգիս եւ յՕտարազգիս ։ Համազգի են անդամքն, որոց նշանագիրքն եւ ցուցիչք նման միմեանց իցեն, թէպէտ եւ գործակիցքն եւ նշանք այլակերպք, որպէս $5\text{ա}^2 + 7\text{ա}^2 - 8\text{ա}^2$ ։ Նոյն օրինակ եւ անդամքն՝ որ լոկ ի նշանակաց թուոց կազմիցին, ընդ մի համար ընդ համազգիս են ։ Այլ որոց ցուցիչքն եւ կամ նշանագիրք այլեւայլք իցեն, օտարազգիք են ։ Զոր օրինակ, $3\text{ա} + 3\text{բ} - 5\text{գ} + 3\text{բգդ} + 2\text{ա}^2 - 3\text{ա}^3$ ։

Հ Ա Տ Ա Ծ Ի

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՒԵԼԼՈՑ ԶՉԱՓՍ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑՆ

Եթէ զի՞նչ ինչ իցէ յաւելուլ, ասացաւ (Հ. 13):

50. Հաւասար չափք ի վերայ հաւասար չափուց յաւելեալ, բովանդակութիւնքն եւս միմեանց հաւասարք են:

Դիցուք գրեցուք եթէ ա=բ: Քանզի որովհետեւ ա+գ>ա, զհետ գայ եթէ ա+գ>բ իցէ, բայց ա+գ=բ+գ: Եւ եթէ ա=բ, եւ գ=դ, ապա ուրեմն ա+գ=բ+դ: Մարթ է զայս եւ նշանակօք թուոց ցուցանել:

$$\begin{array}{l} 5+7=12 \\ 4+6=10 \\ \hline 5+7+4+6=12+10 \end{array}$$

1 ժամ = 60 վայրկեանք
1 Չորր. = 15 վայրկեանք

1 ժամ + 1 Չորր. = 60 վայրկ. + 15 վայրկ.

51. Յորժամ ի հաւասարս յաւելուցուն չհաւասարք, կամ ի չհաւասարս հաւասարք, բովանդակութիւնքն եւս միմեանց չհաւասարք լինիցին, եւ յոր մեծագոյնն յաւելաւ ի չհաւասարիցն, նորա եւ բովանդակութիւնն՝ մեծագոյն իցէ քան զմիւսոյն:

Դիցուք գրեցուք եթէ ա=բ, եւ գ>դ: Արդ ա+գ>բ+դ. նոյնգունակ եւ եթէ ա>բ, եւ գ=դ, զհետ գայ եթէ եւ ա+գ>բ+դ: Ըստ ամին օրինակի եւ նշանակօք թուոց:

$$\begin{array}{l} 8+10=18 \\ \quad\ \ 6>4 \\ \hline 8+10+6>18+4 \end{array}$$

1 Զող = 6 Ոտք
1 Ոտն > 4 Մատունք

1 Զող + 1 Ոտն > 6 Ոտք + 4 Մատունք:

52. Եթէ զչհաւասարս ի չհաւասարս յաւելուցուս, որպէսզի փոքրագոյնն ի մեծագոյնն յաւելցի եւ մեծագոյնն ի փոքրագոյն անդր ի չհաւասարից, բովանդակութիւնքն միմեանց կամ հաւասար եւ կամ չհաւասար լինիցին:

Համարեսցուք եթէ $ա > բ$, եւ $գ > դ$. արդ $ա + դ \gtreqless բ + գ$: Այն օրինակ եւ

$$\begin{array}{c}12 > 8\\ 8 < 12\\ \hline 20 = 20\end{array}\qquad\begin{array}{c}15 > 4\\ 5 < 6\\ \hline 20 > 10\end{array}\qquad\begin{array}{c}7 < 19\\ 6 > 2\\ \hline 13 < 21\end{array}$$

53. Առ յաւելուլ ի միմեանս զչափս ուրացականս եւ զհաստատականս պարզ եւ պատշաճ է զմօտաւոր օրէնսն առնուլ ի միտ:

Ա. Զչափս օտարազգիս հար կարգաւ ի միում շարի, եւ զհամազգիսն ընդ միմեամբք, եւ ընդ նոքօք ձգեա գիծ երկայնութեան:

Բ. Եթէ երկոցունց անդամոցն համազգեաց նման իցեն նշանքն $+$ կամ $-$, զգործակիցսն յաւել ի միմեանս, եւ զբովանդակութիւնն նովին հասարակաց նշանաւ դրոշմեա ընդ երկայնաձիգ գծիւն, եւ առ նովաւ դրոշմեսջիր զնշանագիրս միանգամ եւեթ իւրեանց ցուցչօքն: Որպիսի ինչ $3ա^2բ + 5ա^2բ = 8ա^2բ$ նոյնպէս $-9գ^4դ - 3գ^4դ = -12գ^4դ$:

Գ. Իսկ եթէ այլակերպք ի միմեանց իցեն նշանքն, հան զփոքր գործակիցն ի մեծագունէ անտի, եւ զայլակերպութիւնն իւրով սեպհական նշանաւ, որպէս եւ զնշանագիրսն ընդ գծիւն հար ի շարի: Որպէս. $4ա^3դ - 12ա^3դ = -8ա^3դ$:

Դ. Եթէ երկոցունց անդամոցն նշանագիրքն եւ գործակիցքն նոյն իցեն, այլ նշանքն այլեւայլ, այնպիսիքն (Հ. 45) ամենեւին միմեանց եղծիչք լինին:

Ա.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}ա & +7բ & -13գ & -8դ & +3ե & -զ & -է & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{Յաւելլիք}}\\ -4ա & -բ & +12գ & +9դ & +4ե & -զ & +է & \\ \hline -3ա & +6բ & -գ & +դ & +7ե & -2զ & & \text{Բովանդակ.}\end{array}$$

Բ.

$$\begin{array}{r}
8աք - 3բգ - 5դք + 12 \\
- աք + 7բգ + 2դք - 8 \\
\hline
7աք + 4բգ - 3դք + 4
\end{array}$$

Գ.

$$\begin{array}{l}
ա^3 - 3ա^2բ + 3աբ^2 - բ^3 \\
ա^3 + 3ա^2բ + 3աբ^2 + բ^3 \\
\hline
2ա^3 \qquad\qquad + 6աբ^2
\end{array}$$

Դ.

$$ա^մբ^2 + 2գ^3ք^{մ+1} - 3գ^3ք^{մ+1} + 10ա^մբ^2 = 11ա^մբ^2 - գ^3ք^{մ+1}$$

Ե.

$$\begin{array}{l}
8աք + 3բք - 12աբք - 20գք + 18ագ - 3ք^մ \\
5աք - 4բք - 6աբք + 12գք + 10ագ - 40 \\
3աք + 6բք + 9աբք + 8գք - 8ագ + 5ք^մ \\
\hline
16աք + 5բք - 9աբք \qquad + 20ագ + 2ք^մ - 40
\end{array}$$

ՀԱՏԱԾ Գ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՆԵԼՈՅ ԶՉԱՓՍ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑ

Եթէ զինչ իցէ հանել, ասացաւ (Հ. 17)։

54. *Հաւասարք ի հաւասարից հանել, երկոցունց չափուց այլակերպութիւնքն միմեանց հաւասարք լինին։*

Համարեսցուք եթէ $ա = բ$։ *Արդ յայտ է եթէ* $ա > բ - գ$, *եւ* $բ - գ < բ$, *այլ* $ա - գ = բ - գ$, *ուստի եւ* $ա - գ = բ - դ$, *եթէ* $ա = բ$, *եւ* $գ = դ$ *իցեն։ Զոր մարթ է եւ սովորական նշանակօք թուոց ցուցանել.*

$$\begin{array}{l}
4 + 8 = 12 \text{ նուազելի թիւ} \\
2 + 3 = \ \ 5 \text{ հանելի թիւ} \\
\hline
(4 + 8) - (2 + 3) = 12 - 5. \text{ Այլակերպ.}
\end{array}$$

1 *դահեկ. դերմ.* = 60 *նաքար. դերմ.*
1 *երեքդր. դերմ.* = 3 *նաք. դերմ.*

---

1 *դահ. դերմ.* — 1 *երեքդր.* = 60 *նաք.* — 3 *նաք. դերմ։*

55. *Եթէ զհաւասարս հանցես ի չհաւասարից եւ կամ զչհաւասարս ի հաւասարից, այլակերպութիւնքն եւս լինին չհաւասարք։*

Համարեսցուք եթէ $ա = բ$ եւ $գ > դ$, յայտ է եթէ $ա - գ < բ - դ$, եւ $գ - ա > դ - բ$։ Որ ցուցանի եւս ի սովորական նշանակս թուոց.

$$\begin{array}{rcl} 10 + 4 & > & 8 \\ 3 & = & 3 \\ \hline 10 + 4 - 3 & > & 8 - 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3^{0} & = & 18^{\text{c}} \\ 4^{\text{c}} & < & 5^{\text{c}} \\ \hline 3^{0} - 4^{\text{c}} & > & 18^{\text{c}} - 5^{\text{c}} \end{array}$$

56. Եթէ զհաւասարս հանցես ի չհաւասարից, մարթ է այլակերպութեանցն եւ մնացեանց հաւասարս եւ չհաւասարս լինել։

Համարեսցուք եթէ $ա > բ$ եւ $գ > դ$։ Արդ $ա - գ \overset{=}{\lesseqgtr} բ - դ$։ Որպէս ինչ,

$$\begin{array}{rcl} 12 & > & 10 \\ 6 & > & 4 \\ \hline 6 & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 18 & < & 20 \\ 9 & > & 7 \\ \hline 9 & < & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 23 & > & 18 \\ 5 & < & 8 \\ \hline 18 & > & 10 \end{array}$$

57. Վասն համման նշանագրացն զայս ինչ պարտ է առնուլ ի միտ։ Որպէս վերագոյնդ (Հ. 20) տեսաք, եթէ զայլակերպութիւնն եւ զհանելի թիւն միանգամայն գումարիցես, հարկ է բովանդակութեանն, հաւասար նուազելի չափոյն լինել։ Արդ զի եւ ի համման նշանագրացն, յորժամ դէպ լինիցի հանելի չափոյն հաստատական կամ ուրացական լինել, կարող իցեմք զօրէնս ճշդիւ պահել, պարտ եւ պատշաճ է ընդ երկուս դէպս միտ եդեալ նայել։ Առաջին՝ համարեսցուք եթէ $\pm ա$ նուազելի չափն իցէ եւ $+ բ$ հանելի. տարի իսկ զհետ գայ եթէ $\pm ա - (+ բ) = \pm ա - բ$ լինել պարտ է, զի յորժամ զմնացորդն $\pm ա - բ$ ի հանելի չափն $+ բ$ յաւելուցումք, $\pm ա - բ + բ = \pm ա$ նուազելի չափոյն իցէ։ Երկրորդ անգամ, դիցուք, եթէ ի $\pm ա$ չափոյ զ$- բ$ կամիցիմք հանել. արդ՝ այլակերպութիւնն $\pm ա - (- բ) = \pm ա + բ$ իցէ, զի մնացորդն $\pm ա + բ$ յաւելեալ ի $- բ$ հանելի չափն, $\pm ա - բ + բ = \pm ա$ նուազելի չափոյն լինիցի։

Համօրէն երկոցունց դիպացն օրինակք այս են,

$$\pm ա - (\pm բ) = \pm ա \mp բ:$$

Յորմէ յառաջ գայ համօրէն օրէնքս, եթէ. Այլակերպութիւն երկուց չափուց գտանի, յորժամ զնշանս հանելի չափոյն փոփոխեսցես, եւ ապա զայն ընդ նուազելի չափոյն գումարեսցես:

58. Եթէ բազմանման իցէ հանելին, պարտ եւ պատշաճ է զամենայն նշանս անդամոցն իւրաքանչիւր փոփոխել. որպիսի ինչ

$$\pm ա - (բ - գ) = \pm ա - բ + գ,$$

որպէս զի, յորժամ զհանելի չափն ի վերայ մնացորդին յաւելուցուս, բովանդակութիւնն հաւասար իցէ նուազելւոյն, որպէս

$$\pm ա - բ + գ + բ - գ = \pm ա:$$

Յասացելոցս ինքնին մարթես իմանալ զհամօրէն օրէնս հանման, եթէ. Պարտ է զնշանս հանելի չափոյն փոփոխել, եւ յաւելուլ զայն ի նուազելին, եւ այս բովանդակութիւնն է այլակերպութիւն:

Ա.

$15ա$	$+ 6բ$	$- 8գ$	$- 4դ$	$+ 7ե$	$- 10զ$	Նուազելի թիւ
$3ա$	$+ 9բ$	$- 5գ$	$- 9դ$	$- 2ե$	$+ 5զ$	Հանելի թիւ
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	Փոփոխումն նշան.
$12ա$	$- 3բ$	$- 3գ$	$+ 5դ$	$+ 9ե$	$- 15զ$	Այլակերպութիւն

Բ.

$5աք$	$- ք^2$	$- 3ա$	$- 9$		Նուազելի թիւ
$3աք$	$+ ք^2$	$+ 30$	$- 3ա$	$- 5բ$	Հանելի թիւ
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	Փոփոխումն նշանաց
$2աք$	$- 2ք^2$	$- 39$		$+ 5բ$	Այլակերպութիւն

Գ.

$5ա'ք^2$	$- 20$		$+ 7աբ^3ք$	$- 4բ'գք^2$	Ն.
$2բ'գք^2$	$+ 5ա'ք^2$	$+ 8$	$- 2ա^3բք$		Հ.
$-$	$-$	$-$	$+$		Փ. Ն.
$- 28$	$+ 7աբ^3ք$	$- 6բ'գք^2$	$+ 2ա^3բք$.		Այլ.

Հ Ա Տ Ա Ծ Դ

ՅԱՂԱԳՍ ԶՉԱՓՍ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑ ԲԱԶՄԱՑՈՒՑԱՆԵԼՈՑ

59. Որպէս վերագոյն (Հ. 21) տեսաք, զչափ ա բազմացուցանել բ չափով ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ զա այնչափ ինչ յինքեան վերայ յաւելուլ, որչափ ինչ միութիւնք ի բ բազմացուցիչն կայցեն։ Որպիսի ինչ.

$$\text{ա} \times 2 = \text{ա} + \text{ա}$$
$$\text{բ} \times \text{ն} = \text{բ} + \text{բ} + \text{բ} + \text{բ} \cdots = \text{նբ}$$

Յորմէ զհետ գայ եթէ գործակիցքն առնելիք չափուց իցեն։

60. Ի բազմացուցանելն զթիւս, մարթեմք զարդիւնսն ի գրի հարկանել, զոր օրինակ, $6 \times 8 = 48$, բայց սակայն ի նշանագրովք համարողութեան, արդիւնքն նշանակին եւեթ, յորժամ նշանագիրքն առանց անջրպետութեան առընթեր միմեանց դրոշմիցին, որպէս. $\text{ա} \times \text{բ} = \text{աբ}$։ Իսկ եթէ զարդիւնսն աբ բազմացուցանել կամիցի ոք գ չափով, առնի աբգ, եւ այս՝ դ չափով բազմացուցեալ, աբգդ արդիւնք ելանեն։ Ըստ սմին օրինակի բազում ե, զ, է . . . ն առնելեօք բազմացուցանիցեմք, արդիւնքն

$$= \text{աբգդեզէ} \ldots \text{ն}։$$

61. Յորժամ հաւասար չափք՝ հաւասար չափովք բազմացուցանիցին, արդիւնքն եւս միմեանց հաւասարք լինին։

Զոր օրինակ եթէ $\text{ա} = \text{բ}$, եւ $\text{գ} = \text{դ}$. տեսանին զհետ գայ եթէ $\text{ա} \times \text{գ} = \text{բ} \times \text{դ}$։ Քանզի ոչ այլ ինչ է բազմացուցանելն, եթէ ոչ զմին յառնելեաց յինքեան վերայ յաւելուլ ըստ չափոյ միութեանց միւս առնելւոյն. արդ եթէ $\text{գ} = 7$ դնիցեմք, յայնժամ $\text{ա} \times \text{գ} = \text{ա} \times 7$ լինի, եւ քանզի $\text{ա} = \text{բ}$, ապա ուրեմն բ եւս այնչափ ինչ անգամ պարտի յաւելուլ, որչափ ինչ միութիւնք կայցեն ի դ. արդ $\text{դ} = \text{գ}$, ապա ուրեմն միութեամբք գ չափոյն, որ է 7: Արդ յաւացելոյն յայտնապէս երեւի, եթէ ա եւ բ միով չափով յինքեանց վերայ յաւելան: Մարթ է զայս եւ թուովք ցուցանել,

$$\begin{array}{l} 8 = 6 + 2 \\ 4 = 4 \\ \hline 8 \cdot 4 = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \text{ կամ } 32 = 24 + 8 \end{array}$$

62. Եթէ չհաւասար չափք հաւասար չափովք կամ հաւասարքն չհաւասարիւք բազմացուցանիցին, արդիւնքն եւս միմեանց չհաւասարք լինին, յորոց մեծագոյն արդիւնքն այն է, յոր մեծն ի չհաւասարից առնելի եղեւ:

Զոր օրինակ եթէ ա > բ եւ գ = դ. ապա եւ ա × գ > բ × դ: Դիցուք գրեսցուք եթէ ա քան զբ ե չափով մեծ իցէ, ուստի եւ ա = բ + ե: Արդ եթէ զերկուս չափս զայսոսիկ հաւասարս գ = դ չափովք բազմացուցանիցեմք (∸. 61.) չփոփոխի հաւասարութիւնն եւ արդիւնքն եւս ագ = դ(բ + ե), եւ զի յայտնապէս եւս ցուցանիցեմք, ագ = բդ + դե: Աստի իսկ կարիցես դիւրագոյն ի վերայ հասանել, զի բդ եւ դե մասունք են ագ չափոյն, եւ եթէ զմի մասն դե բառնայցեմք ագ > բդ (∸. 12. Ա.): Զայս եւ սովորական թուովք կարիցեմք ցուցանել,

$$\begin{array}{l} 1 \text{ դահ. Տաճկ.} > 20 \text{ նաքար. Տաճկ.} \\ 3 \qquad\qquad\quad = 3 \\ \hline 3 \text{ դահ. Տաճկ.} > 60 \text{ նաքար. Տաճկ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9 = 5 + 4 \\ 4 > 3 \\ \hline 9 \cdot 4 > 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \text{ կամ} \\ 36 > 15 + 12 \end{array}$$

63. Եթէ զչհաւասար չափս չհաւասար չափովք բազմացուցանիցես, զմեծն մեծագունիւ, եւ զփոքրն փոքու, արդիւնք մեծաց առնելեացն, մեծագոյն քան զարդիւնս փոքունց առնելեացն են:

Օրինակ եթէ ա > բ, եւ գ > դ, ուստի եւ ագ > բդ: Դիցուք դրեցուք, եթէ ա > բ չափքս գ = գ չափովք բազմացուցանիցեն, արդիւնքն ագ > բգ. դարձեալ գ > դ չհաւասարքն՝ բ = բ հաւասարիւք, արդիւնքն բգ > բդ: Արդ եթէ ագ > բգ, եւ բգ > բդ, ուրեմն հարկ է, զի ագ մեծագոյն եւս իցէ քան զբդ. քանզի դիցուք եթէ ագ = բգ + ե, եւ բգ = բդ + զ. ուրեմն յորժամ փոխանակ բգ չափոյն զհաւասար զօրութիւնն դնիցեմք, ագ = բդ + զ + ե, ուստի եւ ագ > բդ: Նոյնպէս

$$\begin{array}{c} 4 > 3 \\ 3 > 2 \\ \hline 12 > 6 \end{array}$$

64. Եթէ երկուս չափս չհաւասարս այլովք չհաւասար չափովք բազմացուցանիցես՝ զմեծն փոքու, եւ զփոքրն մեծագունիւ, մարթ է արդեանցն կամ միմեանց հաւասարս լինել, կամ առաջնոյն առաւելուլ քան զերկրորդն, եւ կամ երկրորդին քան զառաջինն:

Օրինակ եթէ ա > բ եւ գ < դ, արդ ագ $\gtreqless$ բդ:

Դիցուք դրեցուք, եթէ ա > բ չափքս գ = գ չափովք բազմացուցանիցեն, արդիւնքն՝ ագ > բգ իցեն, դարձեալ գ < դ չափքս բ = բ չափովք, արդիւնքն բգ < բդ լինիցին: Արդ դիցուք եթէ ագ = բգ + ե, եւ բդ = բգ + զ. յորս յայտնապէս տեսանես, եթէ բգ, եւ այլ եւս երկու չափքս ե եւ զ մասունք յաւելման են ագ եւ բդ չափուցն. արդ՝ եթէ ե = զ, յայնժամ ագ = բդ. իսկ եթէ ե > զ, յայնժամ ագ > բդ. իսկ եթէ ե < զ իցէ, եւ ագ < բդ լինիցի: Նոյնպէս

$$\begin{array}{c} 6 > 3 \\ 2 < 4 \\ \hline 12 = 12 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 8 > 6 \\ 3 < 4 \\ \hline 24 > 20 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 > 3 \\ 2 < 8 \\ \hline 10 < 24 \end{array}$$

65. Ա. Ի մէջ երկուց նշանագրաց, զոր օրինակ են ա եւ բ, երկուց տեղեաց փոփոխութեան մարթ է լինել, այս է աբ եւ բա:

Բ․․ Իսկ ի մէջ երից ա, բ, գ նշանագրաց՝ 6 փոփոխութիւնք են տեղեաց. քանզի միում միում ի նշանագրաց անտի մարթ է զառաջին տեղին ունել, մինչդեռ ի նմին իսկ ժամանակի այլ եւս 2 փոփոխութիւնքն զորոց կանխագոյն տեսաք, լինիցին, վասն այսորիկ իսկ $2 \cdot 3 = 6$։ Զոր օրինակ,

աբգ   բագ   գաբ
ագբ   բգա   գբա

Գ․․ Նոյնպէս ըստ նմին օրինակի եւ ի մէջ չորից ա, բ, գ, դ նշանագրաց 24 փոփոխութիւնք։ Քանզի մարթ է միում միում ի նշանագրաց յառաջին տեղւոջն կալ, ընդ որս խառնեալ եւ առաջին վեց փոփոխութեանցն, գործեն $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ փոփոխութիւնս։ Զոր օրինակ,

աբգդ   բագդ   գաբդ   դաբգ
աբդգ   բադգ   գադբ   դագբ
ագբդ   բգադ   գբադ   դբագ
ագդբ   բգդա   գբդա   դբգա
ադբգ   բդագ   գդաբ   դգաբ
ադգբ   բդգա   գդբա   դգբա

Ըստ նմին օրինակի, եթէ համար թուոյն իցէ ն, փոփոխութիւնք տեղեացն եւս =

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots ն ։$$

66․ $1 \times ա$ կամ $ա \times 1$, արդիւնքն ցանգ $= ա$, քանզի եթէ զմի միութիւն առնուցումք 3իցս կամ զ3 մի անգամ, արդիւնքն ցանգ $= 3$, յորմէ յառաջ գայ եթէ $1 \times ա = ա \times 1 = ա$։

67․ Յորժամ զբուն մասունս չափոյ իւիք ուրոյն ուրոյն այլով չափով բազմացուցանիցես, եւ զարդիւնսն միանգամայն ժողովիցես, բովանդակութիւնն հաւասար է արդեանց բովանդակութեան մասանցն եւ նորին չափոյ որով մասունքն բազմացան։

Համարեսցուք, եթէ ա, բ, գ, դ․․․, բուն մասունքն իցեն Մ. չափոյն, ուստի եւ

$$Ա = ա + բ + գ + դ + \cdots$$

արդ (Հ. 61.) $Ամ = ամ + բմ + գմ + դմ + \cdots$:

68. Զառնելիս չափոյ իրիք, որպէս ինչ կարգաւ եւ կամիցիս՝ միմեամբք բազմացուցանիցես, արդիւնքն ոչ փոփոխին: Զոր օրինակ,

$$2 \times ա = ա \times 2 = 2ա:$$

Վասնզի $2 = 1 + 1$. ստատատին զհետ գայ, եթէ $2 \times ա = 1 \times ա + 1 \times ա$ (Հ. 67.) եւ այս եւս $= ա + ա$ (Հ. 66.), եւ այս եւս $= 2ա = ա \times 2$ (Հ. 59.) Ըստ նմին օրինակի, քանզի $3 = 1 + 1 + 1$, ապա $3 \times ա = 1 . ա + 1 . ա + 1 . ա = ա + ա + ա = ա . 3$, ուստի եւ $2 . ա = ա . 2$ եւ $3 \times ա = ա . 3$:

69. Եթէ զմին յառնելեացն բազմացուցանիցես այս ինչ կամ այն չափով, բովանդակ արդիւնքն նովին չափով բազմանան:

Համարեսցուք եթէ $ԱԲ$ իցէ չափն. արդ $ԱԲ \times 2 = 2Ա \times Բ$: Այս ինքն եթէ զառնելին $Ա$, 2 թուով բազմացուցանիցեմք.

$$2Ա \times Բ = (Ա + Ա) Բ = ԱԲ + ԱԲ = ԱԲ \times 2$$

Ըստ նմին օրինակի

$$3Ա \times Բ = (Ա + Ա + Ա) Բ = ԱԲ + ԱԲ + ԱԲ = ԱԲ \times 3$$

Սոյնգունակ եւ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$մԱ \times Բ = ԱԲ \times մ:$$

Զայն կարեմք եւ ի վերայ $Բ$ առնելւոյն ցուցանել: Վասնզի որովհետեւ

$$մԲ \times Ա = ԲԱ \times մ = ԱԲ \times մ,$$

զի (Հ. 68.) $ԲԱ = ԱԲ$. ինքնին իսկ յանձնէ երեւիցի եթէ $ԱԲ \times մ = մԱ \times Բ = մԲ \times Ա$:

70. Երեք առնելիք, որպէս ինչ կարգաւ միմեամբք բազմացուցանիցին, արդիւնքն ոչ փոփոխին:

Համարեսցուք եթէ $ա$, $բ$, $գ$ առնելիք իցեն: Ըստ Հ. 68. $աբ \times գ = ագ \times բ = բգ \times ա$, եւ քանզի $աբ = բա$, $ագ = գա$, $բգ = գբ$. ուրեմն $աբ \times գ = բա \times գ = ագ \times բ = գա \times բ = բգ \times ա = գբ \times ա$, կամ $աբգ = բագ = ագբ = գաբ = բգա = գբա$, յոր յայտ յանդիման երեւին $2 \cdot 3 = 6$ փոփոխութիւնքն զորոց վերագոյն ճառեցաք (∸. 65. Բ.)։

71. Յորմէ ծագէ համօրէն օրէնքս, եթէ. Նոյն առնելիք, որպիսի ինչ կարգօք միմեամբք բազմացուցանիցին, արդիւնքն ոչ փոփոխին։

72. Չափ ինչ նշանագրաց այլով չափով բազմացուցանի, յորժամ գործակիցն միմեամբք բազմացուցանիցեն, եւ առընթեր արդեանցն զնշանագրացն եւս զարդիւնսն մի ըստ միոջէ ըստ կարգի աղփաբետացն հարկանիցեն ի շարի։ Օր օրինակ,

$$2ա \cdot 3բ = 6աբ ։$$

Քանզի (∸. 68.), $2ա = 2 \cdot ա$, եւ $3բ = 3 \cdot բ$. ուրեմն եթէ $2ա \cdot 3բ = 2 \cdot 3 \cdot աբ = 6աբ$։

73. Յորժամ չափ մի ի չափուց ինքն ինքեամբ միանգամ կամ բազում անգամ բազմացուցանիցի, արդիւնքն անուանեալ կոչի Կարողութիւն այնր չափոյ, որպիսի ինչ $աա$ երկրորդ, $աաա$ երրորդ կարողութիւնք են $ա$ նշանագրի։ Իսկ $ա$ նշանագիրն, որ ի կարողութիւնս բարձրացաւ, ասի Արմատ։ Վասն համառօտիւք իմն զերան վճարելոյ, թիւ համարոյ նոյն առնելեաց, որ ի կարողութեանն դիպիցի, դնի ի վերայ արմատոյն։ Որպէս,

$$ա^2 = աա,\ ա^3 = աաա,\ ա^4 = աաաա$$

Ըստ նմին օրինակի

$$8^2 = 8 \cdot 8 = 64,\ 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 .$$

եւ համարական իմն օրինակաւ $ա^ն$, որ ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ ներորդ կարողութիւն $ա$ արմատոյն։ Ն որպէս եւ այլ նշանակք թուոց յորջորջին Ցուցիչք կարողութեանցն, որ եւ յայտ արարեալ ցուցանեն, եթէ կարողութիւնն յորչափ ինչ առնելեացն նմանեաց կազմեալ իցէ, եւ կամ եթէ արմատն քանիցս անգամ իբրեւ զառնելի առեալ իցէ։ Յօդուածոյ արմատք եդեալ փակին ի մէջ փակիչ գծի, որպէս

$$(ա + բ)^ն,\ (3ա + 3բ - 1)^մ ։$$

Իսկ ի վերայ չափուց, որոց կարողութիւնն 1 իցէ, ցուցիչն ոչ դնի օրինակ զայս $ա = ա^1$:

74. Նշեալս կարողութիւնք միոյ արմատոյ յորժամ միմեամբք բազմացուցանիցին, գործեն այլ իմն կարողութիւն նորին արմատոյ, որոյ ցուցիչն հաւասար է բովանդակութեան ցուցչաց երկուց առնելեացն: Զոր օրինակ,

$$ա^2 . ա = աա . ա = ա^3 = ա^{2+1}$$
$$ա^3 . ա^2 = աաա . աա = ա^5 = ա^{3+2}$$
$$ք^4 . ք^3 = քքքք . քքք = ք^7 = ք^{4+3}$$

եւ հասարակաց իմն օրինակաւ $ա^մ . ա^ն = ա^{մ+ն}$: Քանզի որովհետեւ $ա^մ$, արդիւնք իմն է մ իցս ա հաւասար առնելեաց, եւ ըստ նմին օրինակի $ա^ն$ արդիւնք է ն իցս ա հաւասար առնելեաց, արդ իբրեւ երկուքին կարողութիւնքս միմեամբք բազմացուցանիցին $ա^մ \times ա^ն$, պարտ է ա առնելեայն այնչափ ինչ անգամ յարդիւնսն բովանդակել, որչափ ինչ միանգամ ուրոյն ուրոյն յերկուսին առնելիսն $ա^մ$ եւ $ա^ն$ գտանիցի, ուստի եւ $մ+ն$ անգամ, յորմէ եւ $ա^մ \times ա^ն = ա^{մ+ն}$:

Ըստ նմին նմանութեան յորժամ $ա^{մ+ն}$ արդիւնքս $ա^ր$ չափով բազմացուցանիցի, $ա^{մ+ն} \times ա^ր = ա^{մ+ն+ր}$

Զայն պարտ է իմանալ եւ զբազում 3, 4, 5 . . . ն առնելեաց, որպիսի ինչ,

$$ա^մ . ա^ն . ա^պ . ա^ր = ա^{մ+ն} . ա^պ . ա^ր = ա^{մ+ն+պ} . ա^ր = ա^{մ+ն+պ+ր}$$

Այս եթէ զառնելիս ինչ որոց արմատքն այլակերպք ի միմեանց իցեն, կամիցիս բազմացուցանել, զարմատն հանդերձ իւրեանց ցուցչաւն դրոշմեսջիր առընթեր միմեանց, զոր օրինակ

$$ա^2 . բ^3 = ա^2բ^3, \quad ա^մ \times բ^ն = ա^մ բ^ն:$$

75. Եթէ չափ ինչ հաստատական կամ ուրացական այլով չափով հաստատականաւ բազմացուցանիցի, նշան արդեանցն լինի նոյն ընդ նշանի բազմացուցանելի չափոյն: Զոր օրինակ,

$$\pm ա \times 2 = \pm ա \pm ա = \pm 2ա$$
$$\pm ա \times 3 = \pm ա \pm ա \pm ա = \pm 3ա.$$

եւ հասարակաց իմն օրինակաւ $\pm\text{ա}\times\text{բ}=\pm\text{աբ}$։ Արդ առցուք յօրինակ զ2 բազմացուցիչն։ Յայտ է ամենեցուն եթէ նշանակ թուոյս ի միութենէ կամ $\text{յ}+1$ թուոյ կազմեալ եւ կայ, եւ $=1+1$, եւ նշանակէ եթէ 1 երկիցս առանց ինչ փոփոխելոյ նշանին առեալ է. արդ իբրեւ $+2$ բազմացուցանիցի $-\text{ա}$ կամ $+\text{ա}$ չափով, ըստ նմին օրինակի ցուցանիցէ, եթէ ա նշանագիրն նշանաւ ոչ փոփոխելով $+$ կամ $-$ երկիցս, նոյնպէս եւ 3, 4, 5... $+$բիցս առնուցու։

76. Այլ յորժամ հաստատական կամ ուրացական ինչ չափ այլով ուրացականաւ բազմացուցանիցի, յայնժամ արդեանցն նշան հակառակ բազմացուցանելոյն լինի։

Դնիցուք գրեցուք եթէ -2 բազմացուցիչ իցէ։ Որպէս (∸. 75) ասացաք, նշանակ թուոյս ի միութենէ կամ $\text{յ}+1$ չափոյ կազմեալ է, եւ նշանակէ եթէ ա նշանաւ փոփոխելով երկիցս եդեալ է, որոց զհետ գայ, եթէ $\pm\text{ա}\times-2$, նշանաւ փոփոխելով երկիցս առնուլ պարտ է, վասն այսորիկ $\pm\text{ա}\times-2=\mp 2\text{ա}$։

Եւ զի զայս օրինակ ցուցումն եւ ի վերայ ամենայն չափուց ուրացականաց մարթ է լինել, ապաստին զհետ գայ, եթէ հասարակաց օրինակն այս իցէ $\pm\text{ա}\times\text{բ}=\mp\text{բա}$։

77. Զոր միանգամ ասացաք (∸. 75, 76) մարթեմք եւ զայս օրինակ ցուցանել։ Քանզի $\text{բ}-\text{բ}=0$, ապա իսկ կարիցես ի միտ առնուլ, եթէ եւ

$$\pm\text{ա}(\text{բ}-\text{բ})=\pm\text{ա}\times 0=0$$

զոր եթէ բազմացուցանիցեմք, առաջին մասն արդեանցն (∸. 75) լինիցի $\pm\text{ա}\times\text{բ}=\pm\text{աբ}$. եւ զի բովանդակ իսկ արդիւնքն $=0$ իցէ, հարկ ի վերայ կայ երկրորդ մասին $\pm\text{ա}\times-\text{բ}=\mp\text{աբ}$ լինել։

78. Քանզի (∸. 75)

$$+\text{ա}\times+\text{բ}=+\text{աբ},\ \text{եւ}\ -\text{ա}\times+\text{բ}=-\text{աբ},$$

եւ (∸. 76)

$$+\text{ա}\times-\text{բ}=-\text{աբ},\ \text{եւ}\ -\text{ա}\times-\text{բ}=+\text{աբ},$$

ի սոցանէ յառաջ գայ մօտաւոր համօրէն օրէնքս, եթէ Առնելիքն որոց մի եւ նոյն նշան իցէ, հաստատական նշանս յարդիւնսն ծնանին, իսկ որոց նշանքն հակառակ իցեն ուրացական նշանս:

79. Հաստատական առնելիքն, որչափ եւ բազում իցեն թուով, ցանդ հաստատականս ծնանին, իսկ ուրացականքն եթէ թիւ առնելեացն զոյգ իցէ, հաստատականս, ապա եթէ անզոյգ, ուրացականս:

Թիւքն՝ որ ընդ 2 հաւասարաւ առանց իրիք մնացորդի բաժանել կարիցեն, կոչին Զոյգք, զոր օրինակ 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... իսկ այլքն Անզոյգք, որպիսի են, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...: Զորոց ընդարձակագոյնս եւս ճառիցեմք, յորժամ վասն յառնելեաց լուծանելոյ ճառիցեմք:

$$-ա \times -բ = +աբ$$
$$-ա \times -բ \times -գ = -աբգ$$
$$-ա \times -բ \times -գ \times -դ = -աբգ \times -դ = +աբգդ$$

եւ եթէ յարիցեմք մեւս եւս առնելի $-ե$, լինիցի արդիւնքն $= -աբգդե$, նոյնպէս եւ այլքն ըստ նմին նմանութեան:

Յորոց յառաջ գայ եւ այս, եթէ ի չափ ինչ նշանագրաց, յորժամ զոյգ իցէ թիւ առնելեացն ուրացականաց, արդիւնքն հաստատական լինի, ապա թէ ոչ, ուրացական: Զոր օրինակ,

$$-3 \times 5ա \times -7ա^2բ \times -2բ^3գ \times 3ա^2գ$$
$$= 15ա^3գ \times -42ա^2բ^4գ = -630ա^5բ^4գ^2$$
$$-7ա^մ \times (ա-բ)^ն \times -2ա^3 \times 5(ա-բ)$$
$$= 70ա^{մ+3}(ա-բ)^{ն+1}$$

80. Եթէ ոք կամիցի զյօդուածոյ առնելիս պարզ առնելեաւ բազմացուցանել, պարտ է զմի մի անդամս յօդուածոյին պարզ առնելեաւ ուրոյն ուրոյն եւ զատ ի միմեանց բազմացուցանել: Զոր օրինակ,

$$(ա-բ)գ = ագ - բգ$$
$$-(ա-բ)գ = -(ագ - բգ) = -ագ + բգ$$
$$(ա-բ) \times -գ = -ագ + բգ$$
$$-(ա-բ) \times -գ = (ա-բ)գ = ագ - բգ$$

Ըստ այսմ օրինակի,

$$(2ա^2 + 3աբ - 5բ^2) \times 7աբգ$$
$$= 14ա^3բգ + 21ա^2բ^2գ - 35աբ^3գ:$$
$$(4ա - 30 + բ^{ի}գ^{մ}) \times 5աբ^{ն}գ$$
$$= 20ա^2բ^{ն}գ - 150աբ^{ն}գ + 5աբ^{ի+ն}գ^{մ+1}$$
$$(7ա^{մ}բ - 4բ^{ն}գ + 6գ^3) \times -3աբ^2գդ$$
$$= -21ա^{մ+1}բ^3գդ + 12աբ^{ն+2}գդ^{+1} - 18աբ^2գդ^{+3}$$

81. *Եթէ զչափս յօդուածոյս յօդուածոյիւք կամիցիս բազմացուցանել, զամենայն անդամս բազմացուցանելոյն բազմացո ուրոյն ուրոյն մի մի անդամով բազմացուցչին:*

Համարեսցուք եթէ զ $(ա + բ + գ + դ + \cdots)$ *այսու* $(ա + բ + գ + դ + \cdots)$ *չափով բազմացուցանիցեմք, հարկ է* $(ա + բ + գ + դ + \cdots) \times ա + (ա + բ + գ + դ + \cdots) \times բ + (ա + բ + գ + դ + \cdots) \times գ + (ա + բ + գ + դ + \cdots) \times դ$ *առնել: Որպէս զի եթէ* $(ա + բ + գ + դ \cdots) = Բ$ *դնիցեմք, արդիւնքն*

$$= Բա + Բբ + Բգ + Բդ + \cdots \text{ լինի,}$$

Որպիսի ինչ,

$$(ա + բ)(գ + դ) = (ա + բ)գ + (ա + բ)դ$$
$$= ագ + բգ + ադ + բդ$$
$$(ա + բ)(գ - դ) = (ա + բ)գ - (ա + բ)դ$$
$$= ագ + բգ - ադ - բդ$$
$$(ա - բ)(գ - դ) = (ա - բ)գ - (ա - բ)դ$$
$$= ագ - բգ - ադ + բդ$$

Միահամուռ ժողովեա զանդամսն համազգիս՝ որ յարդիւնսն գտանիցի: Զոր օրինակ,

$$(ա + բ)(ա - բ) = ա^2 + աբ - աբ - բ^2 = ա^2 - բ^2$$
$$(ա + բ)(ա + բ) = ա^2 + աբ + աբ + բ^2 = ա^2 + 2աբ + բ^2$$
$$(3ա - 7բ)(2ա + 5բ) = 6ա^2 - 14աբ + 15աբ - 35բ^2$$
$$= 6ա^2 + աբ - 35բ^2$$
$$(6ա - 4բ + 2գ)(ա + 3բ - 5գ)$$
$$= 6ա^2 + 14աբ - 28ագ - 12բ^2 + 26բգ - 10գ^2$$
$$(7ա + 5բ - 3գ)(7ա - 5բ + 3գ)$$
$$= 49ա^2 - 25բ^2 + 30բգ - 9գ^2$$

82. Մանաւոր արդիւնք յօդուածոյ առնելեաց, դիւրաւ միանգամայն ժողովին, եթէ յառաջագոյն քան զբազմացուցանելն, զկարողութիւնս նոյն նշանագրաց կամ արմատոց երկոցունց առնելեացն միով կարգաւ, այսինքն կամ նուազօղ որ է ի մեծէն ցփոքրն, որպէս $ա x^5 - բ x^4 - գ x^3 + դ x^2 - ե x + զ$, եւ կամ աճեցօղ, որ է ի փոքուէ ցմեծն, որպէս $զ + ե x + դ x^2 - գ x^3 - բ x^4 + ա x^5$, կարգիցես, քանզի յայնժամ եւ մանաւոր արդիւնքն, նոյնպէս եւ ողջոյն արդիւնքն միով կարգաւ ելանիցեն:

Դիցուք գրեսցուք եթէ $(x^{ա} + x^{բ} + x^{գ} + x^{դ} + \dots)$ $(x^{\bar{ա}} + x^{\bar{բ}} + x^{\bar{գ}} + x^{\bar{դ}} + \dots)$ չափքս, որոց մարթ է եւ աճեցօղս եւ նուազօղս լինել, միմեամբք բազմացուցանիցեն: Քանզի (Հ. 74) առ ի բազմացուցանել զկարողութիւնս, զցուցիչս նշանագրացն գումարել պարտ է, աստանօրին զհետ գայ, զի եթէ կարողութիւնքն միով միախառն կարգաւ հաստատիցին կամ աճեցօղս եւ կամ նուազօղս

$$ա \gtrless բ \gtrless գ \gtrless դ \dots \bar{ա} \gtrless \bar{բ} \gtrless \bar{գ} \gtrless \bar{դ} \dots$$

յայնժամ եւ բովանդակութիւն ցուցչացն նովին հաստատութեամբ երեւիցի,

$$ա + \bar{ա} \gtrless բ + \bar{ա} \gtrless գ + \bar{ա} \gtrless դ + \bar{ա} \gtrless \dots \text{ նոյնպէս}$$
$$ա + \bar{բ} \gtrless բ + \bar{բ} \gtrless գ + \bar{բ} \gtrless դ + \bar{բ} \gtrless \dots$$
$$ա + \bar{գ} \gtrless բ + \bar{գ} \gtrless գ + \bar{գ} \gtrless դ + \bar{գ} \gtrless \dots$$
$$ա + \bar{դ} \gtrless բ + \bar{դ} \gtrless գ + \bar{դ} \gtrless դ + \bar{դ} \gtrless \dots$$

Եւ յորժամ բովանդակութիւն ցուցչացն միով կարգաւ կամ աճեցօղ եւ կամ նուազօղ կարգեալ իցէ, հարկ է եւ արդեանցն ըստ նմին օրինակի աճեցօղս եւ կամ նուազօղս լինել:

Իբրեւ այսպէս կարգիցին առնելիքն, յետ այնորիկ զբազմացուցիչն դրոշմեա ընդ բազմացուցանեաւն, եւ յետ ըստ օրինի բազմացուցանելոյ, զարդիւնս մանաւորս այնպէս իմն կարգեա զի համազդի անդամք ընդ միմեամբք անկանիցին: Ժողովեա միահամուռ

զարդիւնսն մասնաւորս, եւ բովանդակութիւնն ող-
ջոյն արդիւնքն են։ Որպէս,

Ա.

$$
\begin{array}{l}
3ա^{2}բ^{3} - 4ա^{3}բ^{2} + 5ա^{4}բ - 7ա^{5} \\
2աբ^{2} - 6ա^{2}բ + 3ա^{3} \\
\hline
6ա^{3}բ^{5} - 8ա^{4}բ^{4} + 10ա^{5}բ^{3} - 14ա^{6}բ^{2} \\
\qquad - 18ա^{4}բ^{4} + 24ա^{5}բ^{3} - 30ա^{6}բ^{2} + 42ա^{7}բ \\
\qquad\qquad + 9ա^{5}բ^{3} - 12ա^{6}բ^{2} + 15ա^{7}բ - 21ա^{8} \\
\hline
6ա^{3}բ^{5} - 26ա^{4}բ^{4} + 43ա^{5}բ^{3} - 56ա^{6}բ^{2} + 57ա^{7}բ - 21ա^{8}
\end{array}
$$

Բ.

$$
\begin{array}{l}
2բ^{4} - 7ա^{2}բ^{2} + 5ա^{4} \\
4բ^{3} - 6ա^{2}բ - 3ա^{3} \\
\hline
8բ^{7} - 28ա^{2}բ^{5} + 20ա^{4}բ^{3} \\
\quad - 12ա^{2}բ^{5} + 42ա^{4}բ^{3} - 30ա^{6}բ \\
\qquad - 6ա^{3}բ^{4} + 21ա^{5}բ^{2} - 15ա^{7} \\
\hline
8բ^{7} - 40ա^{2}բ^{5} + 62ա^{4}բ^{3} - 6ա^{3}բ^{4} + 21ա^{5}բ^{2} - 30ա^{6}բ - 15ա^{7}
\end{array}
$$

Գ.

$$
\begin{array}{l}
7ա^{2ն} - 5ա^{ն}բ^{մ} + 9բ^{2մ} \\
3ա^{ն} - 2բ^{մ} \\
\hline
21ա^{3ն} - 15ա^{2ն}բ^{մ} + 27ա^{ն}բ^{2մ} \\
\qquad - 14ա^{2ն}բ^{մ} + 10ա^{ն}բ^{2մ} - 18բ^{3մ} \\
\hline
21ա^{3ն} - 29ա^{2ն}բ^{մ} + 37ա^{ն}բ^{2մ} - 18բ^{3մ}
\end{array}
$$

Դ.

$$
\begin{array}{l}
2ա^{3-2մ}ք\,ֆ^{մ-2} - 5ա^{-2}ք^{մ+1} \\
3ա^{4մ-5}ք^{2մ}ֆ^{3-4մ} - 6 \\
\hline
6ա^{2մ-2}ք^{2մ+1}ֆ^{1-3մ} - 15ա^{4մ-7}ք^{3մ+1}ֆ^{3-4մ} \\
\qquad\qquad - 12ա^{3-2մ}ք\,ֆ^{մ-2} + 30ա^{-2}ք^{մ+1}
\end{array}
$$

83. Եթէ կամք իցեն քեզ երիս չափս յօդուա-
ծոյս միմեամբք բազմացուցանել, որպիսի ինչ

$$(2աբ + 7ք)\ (3աբ - 2ք)\ (5աբ - 3ք),$$

նախ՝ զառաջին երկուս չափս բազմացո, եւ ապա զարգիւտն նոցա երրորդին: Նոյն օրինակաւ եթէ բազում իցեն անդամքն թուով, զարդիւնս առաջին չափուց զկնի եկելովքն բազմացո. զոր օրինակ,

$$
\begin{array}{l}
2ագ + 7բ \\
3ագ - 2բ \\
\hline
6ա^2գ^2 + 21աբգ \\
\qquad\quad - 4աբգ - 14բ^2 \\
\hline
6ա^2գ^2 + 17աբգ - 14բ^2 \\
5ագ - 3բ \\
\hline
30ա^3գ^3 + 85ա^2բգ^2 - 70աբ^2գ \\
\qquad\quad - 18ա^2բգ^2 - 51աբ^2գ + 42բ^3 \\
\hline
30ա^3գ^3 + 67ա^2բգ^2 - 121աբ^2գ + 42բ^3
\end{array}
$$

ՀԱՏԱԾ Ե

ՅԱՂԱԳՍ ԲԱԺԱՆԵԼՈՑ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑ

84. Եթէ զինչ իցէ բաժանումն ասացաւ (Հ. 28.): Զորոյ զհետ գայ եթէ արդիւնքն քանորդին եւ բաժանարարին հաւասար բաժանելոյն է. վասն այսորիկ եթէ $ա:բ=գ$, հարկ է զի $ա=բգ$ իցէ, եւ եթէ $ա=բգ$, պարտ է զի $ա:բ=գ$, եւ $ա:գ=բ$ իցէ:

85. Եթէ չափ ինչ յանձն իւր բաժանիցի, քանորդն $=1$ լինիցի. իսկ եթէ բաժանիցի ի 1, քանորդն լինիցի հաւասար բաժանելոյն: Քանզի որովհետեւ (Հ. 66.) $ա=ա\times 1$, ապա եւ $ա:ա=1$, եւ $ա:1=ա$ (Հ. 84.):

86. Յորժամ հաւասար ինչ չափք ի հաւասար չափս բաժանիցին, քանորդքն եւս միմեանց հաւասարք լինին:

Զոր օրինակ եթէ $ա=բ$, եւ $գ=դ$. ուրեմն $ա:գ=բ:դ$: Դիցուք դրեսցուք եթէ $ա:գ=ե$ եւ $բ:դ=զ$ իցեն, ուստի եւ (Հ. 84.) $ա=գե$, եւ բ = դզ, եւ քանզի ա = բ, զհետ գայ եթէ գե = դզ: Արդ որովհետեւ գ = դ, ապա ուրեմն (∸. 61.) ե = զ:

12 = 8 + 4	10 դահ. Տաճ. = 400 նալքար.
4 = 4	2 = 2
12:4 = 8:4 + 4:4	10 դահ. Տաճ : 2 = 400 նալք : 2
3 = 2 + 1	5 դահ. Տաճկ. = 200 նալք:

87. Յորժամ չհաւասար չափք ի հաւասարս բաժանիցին, քանորդն մեծի չափոյն ի չհաւասարից մեծագոյն լինի:

Զոր օրինակ եթէ ա > բ եւ գ = դ. ապա եւ ա:գ > բ:դ: Դիցուք գրեսցուք, եթէ ա:գ = ե, եւ բ:դ = զ, ուստի եւ (∸. 84) ա = գե, եւ բ = դզ: Իսկ զի ա > բ, ուրեմն գե > դզ, եւ որովհետեւ գ = դ, ուրեմն ե > զ. (∸. 62.): Որպիսի ինչ,

24 > 16	4 լիտր դերմ. > 100 կէս ունկի
4 = 4	4 = 4
24:4 > 16:4	4 լիտր դեր : 4 > 100 կէս ուն. : 4
6 > 4	1 լիտր դերմ. > 25 կէս ունկի.

88. Յորժամ հաւասար չափք ի չհաւասարս բաժանիցին, մեծագոյն լինի քանորդն հաւասար չափոյն՝ որ ի փոքրն ի չհաւասարից բաժանեցաւ:

Զոր օրինակ եթէ ա = բ եւ գ > դ, ապա եւ ա:գ < բ:դ: Համարեսցուք եթէ ա:գ = ե եւ բ:դ = զ, ուստի եւ (∸. 84.) ա = գե եւ բ = դզ. ուրեմն գե = դզ, քանզի ա = բ: Բայց քանզի գ > դ համարեցաք, ուրեմն ե < զ (∸. 64.): Զոր օրինակ,

24 = 8 + 12 + 4
3 < 4
24:3 > 8:4 + 12:4 + 4:4
8 > 2 + 3 + 1

2 ձողք = 12 ոտք
2 < 3
2 ձողք : 2 > 12 ոտք : 3
1 ձող > 4 ոտք

89. Եթէ չհաւասարք ի չհաւասարս բաժանիցին, այնպէս զի մեծն ի մեծ բաժանարարն բաժանիցի եւ փոքրն ի փոքր, քանորդայն մարթ է միմեանց հաւասարս, կամ առաջնոյն մեծ քան զերկրորդն եւ կամ երկրորդին մեծ քան զառաջինն լինել:

Զոր օրինակ, եթէ $ա > բ$ եւ $գ > դ$. ապա եւ $ա : գ \gtreqless բ : դ$: Համարեսցուք եթէ $ա : գ = ե$ եւ $բ : դ = զ$. ուստի եւ $ա = գե$ եւ $բ = դզ$: Իսկ քանզի $ա > բ$, ուրեմն $գե > դզ$. արդ որովհետեւ համարեցաք $գ > դ$, յայտնի զհետ գայ (Հ. 62, 63.) եթէ $ե \geqq զ$ կարէ լինել, զի ծագիցէ $գե > դզ$ չհաւասարութիւն. դարձեալ մարթ է $ե < զ$ լինել (Հ. 64), ուրեմն $ե \gtreqless զ$:

$36 > 24$	$36 > 24$	$36 > 24$
$9 > 6$	$4 > 3$	$9 > 3$
$36 : 9 = 24 : 6$	$36 : 4 > 24 : 3$	$36 : 9 < 24 : 3$
$4 = 4$	$9 > 8$	$4 < 8$

90. Եթէ զբաժանարարն չփոփոխեալ, զբաժանելին իւիք չափով բազմացուցանիցես, կամ զբաժանելին չփոփոխեալ, զբաժանարարն ի չափ ինչ բաժանիցես, նովին չափով եւ քանորդն եւս բազմանայ:

Որպէս եթէ $ա : բ = գ$, ապա եւ $ա \times ն : բ = գն$, եւ $ա : (բ:ն) = գն$: Համարեսցուք եթէ $ան : բ = ե$ իցէ: Քանզի որովհետեւ $ա = բգ$, եւ $ան = բե = բգն$, ուստի եւ $բգն = բե$, որ եւ $բ \times գն = բ \times ե$: Իսկ եթէ զհաւասարութիւնս բաժանիցեմք ընդ $բ$, որպէս $բ \times գն : բ = բ \times ե : բ$, այս $գն = ե$ քանորդքս ելանեն: Արդ եթէ փոխանակ $ե$ չափոյն զիւր հաւասարն $գն$ դնիցեմք, յայնժամ ապա այս $ան : բ = ե$ չափս լինի $ան : բ = գն$:

Սոյն նմին օրինակի եւ երկրորդ մասին: Համարեսցուք եթէ $բ : ն = դ$, ուստի եւ $բ = դն$: Իսկ եթէ փոխանակ Ա:(Բ:Ն) չափոյն զիւր հաւասարն Դ դնիցեմք, զոր եւ =Ե համարեալ՝ Ա:Դ=Ե հաւասարութիւն ելանէ, ուստի եւ Ա=ԴԵ։ Իսկ քանզի Ա=ԲԳ, ուրեմն ԲԳ=ԴԵ, եւ զի Բ=ԴՆ, ուրեմն ԴՆԳ=ԴԵ, ուստի եւ Դ×ՆԳ=Դ×Ե։ Իսկ եթէ Դ×ՆԳ:Դ, եւ Դ×Ե:Դ, քանորդքն ՆԳ=Ե լինին եւ յորժամ փոխանակ Ե չափոյն զիւր իսկ զզօրութիւնն ՆԳ=ԳՆ դնիցեմք լինի Ա:Դ=ԳՆ, այս է Ա:(Բ:Ն)=ԳՆ։ Որպէս

36 : 6 = 6　　　　36 : 6 = 6
36×2 : 6 = 6×2　　　　36 : (6:2) = 6×2

91. Եթէ պահիցես առանց փոփոխելոյ զբաժանարարն եւ զբաժանելին բաժանիցես ի չափ ինչ, կամ չփոփոխեալ զբաժանելին, զբաժանարարն չափով ի-ւիք բազմացուցանիցես, բաժանի եւ քանորդն ի նոյն չափ։

Արդ եթէ Ա:Բ=Գ, ապա եւ (Ա:Ն):Բ=Գ:Ն, եւ Ա:(Բ×Ն)=Գ:Ն։ Դնիցուք դրեսցուք եթէ Ա:Ն=Դ, ուստի եւ Ա=ԴՆ, զորոյ հետ դայ ԲԳ=ԴՆ, քանզի Ա=ԲԳ։ Իսկ քանզի փոխանակ Ա:Ն չափոյն կարեմք զիւր զօրութիւնն Դ դնել, ուրեմն եւ այս (Ա:Ն):Բ չափս Դ:Բ լինի, եւ համարեսցուք եթէ Դ:Բ=Ե, ուստի եւ Դ=ԲԵ։ Եթէ ԲԳ=ԴՆ, եւ Դ=ԲԵ ուրեմն եւ ԲԳ=ԲՆԵ, որ է Բ×Գ=Բ×ՆԵ. ուստի եւ Բ×Գ:Բ=Բ×ՆԵ:Բ որոց քանորդքն են Գ=ՆԵ։ Իսկ յորժամ զարդիւնս ինչ ընդ մին յառնելեացն բաժանիցես ելանիցէ քանորդ միւս առնելին (Հ. 84.), ուրեմն Գ:Ն=Ե. ուստի եւ

Դ:Բ=Ե է Դ:Բ=Գ:Ն, ապա (Ա:Ն):Բ=Գ:Ն

Իսկ նմին օրինակի ցուցանի եւ երկրորդ մասն։ Դնիցուք դրեսցուք եթէ Ա:ԲՆ=Ե, ուստի եւ Ա=ԲՆԵ, յորմէ եւ ԲԳ=ԲՆԵ, քանզի Ա=ԲԳ։ Եթէ Բ×Գ=Բ×ՆԵ, ուստի եւ Բ×Գ:Բ=Բ×ՆԵ:Բ, լինիցին քանորդքն Գ=ՆԵ, ապա եւ Գ:Ն=Ե։ Որպիսի ինչ.

24 : 6 = 4　　　　24 : 6 = 4
(24:2):6=4:2　　　24 : (6×2)=4:2

92. Յորժամ բաժանարարն եւ բաժանելին միով չափով բազմանայցեն կամ ընդ մի եւ ընդ նոյն չափ բաժանիցին, չփոփոխի քանորդն:

Որպիսի ինչ եթէ ա:բ=գ. նոյնպէս եւ ան:բն=գ. եւ (ա:ն):(բ:ն)=գ: Համարեսցուք եթէ ան:բն=դ իցէ, ուստի եւ ան=բնդ: Նաեւ քանզի ա=բգ, ուրեմն եւ բգն=բնդ: Արդ եթէ բգն:բն=բնդ:բն եղանիցեն քանորդքն գ=դ, յորմէ յայտնապէս երեւեցաւ, եթէ չէ ինչ փոփոխեալ գ:

Բաց նմին օրինակի եւ երկրորդ մասն: Համարեսցուք եթէ (ա:ն):(բ:ն)=դ իցէ, եւ դարձեալ ա:ն=ե, եւ բ:ն=զ. աստանօր դհետ գայ եթէ ա=նե, եւ բ=նզ: Արդ եթէ փոխանակ ա:ն եւ բ:ն չափուց զերեանց հաւասարսն դնիցեմք, լինի ե:զ=դ, ուստի եւ ե=զդ: Արդ քանզի խնդրեմք զհաւասար լինել գ եւ դ չափուց, մեա եղեալ նայեսցուք ընդ չափս հաւասարս յորոց միջի գ եւ դ գտանիցին. արդ ա=բգ, նոյնպէս ա=նե, ուրեմն բգ=նե, եւ քանզի ե=զդ, ուրեմն բգ=նզդ, եւ զի բ=նզ, ուրեմն նզգ=նզդ, ուստի եւ նզգ:նզ=նզդ:նզ, որոց քանորդքն գ=դ: Որպիսի ինչ են եւ

40 : 4 = 10　　　　40 : 4 = 10
(40×5):(4×5)=10　(40:2):(4:2)=10

93. Բովանդակ արդիւնքն բաժանի ընդ չափ ինչ, եթէ զմին յառնելեաց ընդ նոյն չափ բաժանիցես: Համարեսցուք եթէ Պ=Ա.Ղ×Բ. եւ զի Ա.Բ×Ղ=Ա.Ղ×Բ. (Տ. 69.). զարին դհետ գայ եթէ Պ=Ա.Բ×Ղ=Ա.Ղ×Բ, ուստի եւ Պ:Ղ=Ա.Բ=Բ×Ա: Որպիսի ինչ,

42=6×7, եւ 42:2=6:2×7=21

94. Եթէ ի բաժանելին եւ ի բաժանարարն բազում անելիք կայցեն, լինի բաժանումն, յորժամ

զգործակիցսն բաժանիցես, եւ զնշանագիրս, որ միով հասարակ կարողութեամբ են ի բաժանարարն եւ ի բաժանելին գտանիցին եղծանիցես, եւ զնշանագիրս մնացեալս ի բաժանելին առաջի քանորդի գործակցացն՝ կարգ ըստ կարգէ դրոշմիցես: Զոր օրինակ,

$$8ա : 4 = 2ա$$
$$9աբ : 3ա = 3բ$$
$$12ա^2բ^3գ : 4բ^3 = 3ա^2գ$$
$$35ա^3բ^5գ^4 : 7ա^3բ^5 = 5գ^4$$

Ապա եթէ բաժանելին եւ բաժանարարն միոյ հաւասար կարողութեան այլեւայլ արմատք իցեն, բաժանումն նշանակի եւեթ նշանաւ բաժանման: Որպիսի ինչ.

$$2ք : 2բ = \frac{2ք}{2բ} = \frac{ք}{բ}$$

$$3գ^2 : 2բ^2 = \frac{3գ^2}{2բ^2}$$

Զսորին զհետ գայ,

95. Յորժամ բաժանելին եւ բաժանարարն միոյ արմատոյ՝ այլեւայլ կարողութիւնս ունիցին, քանորդն եւս եղանէ այլ իմն կարողութիւն նորին արմատոյ, որոյ ցուցիչն գտանի եթէ զցուցիչ բաժանարարին հանցես ի ցուցչէ անտի բաժանելւոյն:

Դիցուք գրեսցուք. եթէ $ա^մ : ա^ն = ա^ք$, ուստի եւ $ա^ն \times ա^ք = ա^մ$, կամ $ա^{ն+ք} = ա^մ$, յորմէ եւ $ն + ք = մ$, եւ զի (∸. 17.) $ք = մ - ն$, ապա ուրեմն $ա^մ : ա^ն = ա^ք = ա^{մ-ն}$: Որպիսի ինչ.

$$ա^3 : ա^2 = ա^{3-2} = ա^1 = ա$$
$$ն^5 : ն^3 = ն^{5-3} = ն^2 :$$
$$8ա^2բ^3գդ^2 : 4աբդ^2 = 2աբ^2գ$$

Ի $ա^մ : ա^ն = ա^{մ-ն}$ բաժանման երեք դէպք դիպին.

Ա. Եթէ ցուցիչն բաժանելւոյն մեծագոյն իցէ քան զցուցիչ բաժանարարին, կամ $մ > ն$, ուստի եւ $ն = մ - ր$, յայնժամ

$$ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{մ} : ա^{մ-ր} = ա^{մ-մ+ր} = ա^{ր},$$

այսինքն ցուցիչ քանորդին հաստատական լինի։

Բ․ Իսկ եթէ ցուցիչն բաժանելւոյն եւ բաժանարարին հաւասար իցեն միմեանց, կամ $մ = ն$, յայնժամ $ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{մ} : ա^{մ} = ա^{0}$։ Եւ քանզի $ա^{մ} : ա^{մ} = 1$․ ուրեմն $ա^{0} = 1$։ Արդ եթէ ցուցիչ քանորդին կամ որպիսի ինչ եւ իցէ չափոյ 0 իցէ, նշանակ է եթէ չափ ինչ ընդ իւր անձն բաժանեալ իցէ, ուստի եւ քանորդն $= 1$։

Գ․ Ապա եթէ ցուցիչ բաժանելւոյն փոքր իցէ քան զբաժանարարին, կամ $մ < ն$, ուստի եւ $ն = մ + ր$, յայնժամ $ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{մ} : ա^{մ+ր} = ա^{մ-մ-ր} = ա^{-ր}$, այսինքն ցուցիչ քանորդին ուրացական լինի։

Եւ քանզի $ա^{մ} : ա^{ն} = \frac{ա^{մ}}{ա^{մ+ր}} = \frac{ա^{մ-մ}}{ա^{մ+ր-մ}} = \frac{ա^{0}}{ա^{ր}} = \frac{1}{ա^{ր}}$, ուրեմն

$$ա^{-ր} = \frac{1}{ա^{ր}}:$$

Ապա ուրեմն Ամենայն զօրութիւն, որոյ ուրացական ցուցիչ իցէ, հաւասար է 1 թուոյ, որ բաժանիցի ընդ նոյն չափն հաստատական ցուցչաւ։ Այլ թէ զինչ յայտ առնիցէ 1 ընդ ողջոյն թիւ բաժանեալ, տեսցուք յորժամ զչափուցն կոտորելոց ճառիցեմք։

96․ Քանզի (∸․ 75․) $\pm ա \times + բ = \pm աբ$, զորին զհետ գայ եթէ $\pm աբ : + բ = \pm ա$․ Այսինքն եթէ հաստատական իցէ բաժանարարն, քանորդն առնու զնշան բաժանելւոյն։

Երկրորդ անգամ քանզի (∸․ 76․) $\pm ա \times - բ = \mp աբ$, զհետ գայ եթէ $\mp աբ : - բ = \pm ա$․ այսինքն, Եթէ ուրացական իցէ բաժանարարն, քանորդն զհակառակ նշան բաժանելւոյն առնու։ Վասն այսորիկ,

$$\begin{aligned} + աբ &: + բ = + ա \\ - աբ &: + բ = - ա \\ + աբ &: - բ = - ա \\ - աբ &: - բ = + ա \end{aligned}$$

յորմէ յառաջ գայ հանօրէն օրէնքս, եթէ․ Յորժամ բաժանարարն եւ բաժանելին զնոյն նշան ունիցին, քանորդն հաստատական լինի․ ապա եթէ այլակերպք ի միմեանց իցեն նշանք բաժանելւոյն եւ բաժանարարին, քանորդն ուրացական եղանէ։ Զոր օրինակ,

$$35ա^3բ^7գ^6դ : 7ա^2բ^4գ^2 = 5աբ^3գ^4դ$$
$$21ա^5բ^3գ^2 : -3ա^3բգ = -7ա^2բ^2գ$$
$$-15աբ^6գ^5 : 3աբ^4գ^4 = -5բ^2գ$$
$$-27ա^{3մ}բ^{4ն}գ^{պ} : -9ա^{2մ}բ^{2ն}գ^{պ} = 3ա^{մ}բ^{2ն}$$

97․ Եթէ կամք իցեն զչափ ինչ յօդուածոյ ի պարզ կամ ի միամասն չափ բաժանել․ պարտ եւ պատշաճ է զմի մի անդամ բաժանելւոյն ուրոյն ուրոյն ընդ նոյն չափ բաժանել, եւ զմասնաւոր քանորդսն ի միմեանս յաւելուլ։ Որպէս,

$$(աբ + ա) : ա = աբ : ա + ա : ա = բ + 1$$
$$(ա^2 + աբ) : ա = ա^2 : ա + աբ : ա = ա + բ$$
$$(6ա^2բ - 10ադ) : 2ա = 3աբ - 5դ$$
$$(4ա^2բ - 2դ + 3ա) : 2բ = 2ա^2 - \frac{դ}{բ} + \frac{3ա}{2բ}$$
$$(15ա^2բ^3գ - 5աբ^2գ^3) : 5աբ^2գ = 3աբ - գ^2$$
$$(27ա^{մ+3}բ^5գ^3 - 6ա^{մ}բ^4գ^7 + 12ա^5բ^6գ^3) : -3ա^3բ^3գ^3$$
$$= -9ա^{մ}բ^2 + 2ա^{մ-3}բգ^4 - 4ա^2բ^3$$

Ուղղութիւն կանոնացս յայտ անտի լինի, զի իբրեւ զքանորդն բաժանարարաւն բազմացուցանիցես, արդիւնքն հաւասար իցէ բաժանելւոյն։

98․ Իսկ իբրեւ չափք յօդուածոյք իցեն եւ բաժանելին եւ բաժանարարն, զերկոսինն եւս կարգեա (տես ∸․ 82․), ապա այնուհետեւ բաժանեա զառաջին անդամ բաժանելւոյն ընդ առաջին անդամ բաժանարարին, բազմացո զգտեալ քանորդն բոլանդակ բաժանարարիւ, եւ զարդիւնսն հան յոլջոյն բաժանելւոյն։ Եթէ չերեւիցի ինչ մնացորդ, նշանակ է կատարելոյ բաժանմանն։ Զոր օրինակ, Ա.

$$(21ա^3բ^2գ - 35աբգ^3դ) : (3ա^2բ - 5գ^2դ) = 7աբգ$$
$$\begin{array}{l} 21ա^3բ^2գ - 35աբգ^3դ \\ - \quad\quad + \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

Բ.

$$(18ա^{մ+3}բ^2գդ - 12ա^մբգ^{ն+1}դ^2) : (3ա^3բ - 2գ^նդ) = 6ա^մբգդ$$

Ապա եթէ մնացորդ ինչ յաւելուցու, դարձեալ բաժանեա զառաջին անդամ մնացորդին յառաջին անդամ բաժանարարին, զգտեալ քանորդն յաւել ի քանորդն առաջին: Նովին երկրորդ մասամբն քանորդին բազմեա զբովանդակ բաժանարարն եւ զարդիւնսն հան ի բովանդակ մնացորդէն, եւ եթէ երեւիցի միւսանգամ մնացորդ, բաժանեա զայն դարձեալ, ըստ օրինակին, որպէս յառաջագոյն ասացաք, մինչեւ ոչ եւս յաւելուցու ինչ մնացորդ: Բովանդակութիւն մասնաւոր քանորդացն է ողջոյն քանորդն, զոր խնդրես: Որպէս

Ա.

$$(բ^2գ^2ե^2 - 3բ^2գե^3 - 3բ^2գե^4 + 9բ^2ե^5) : (բ^2գե - 3բ^2ե^2) = գե - 3ե^3$$
$$\begin{array}{l} բ^2գ^2ե^2 - 3բ^2գե^3 \\ - \quad\quad + \\ \hline \quad\quad - 3բ^2գե^4 + 9բ^2ե^5 \\ \quad\quad - 3բ^2գե^4 + 9բ^2ե^5 \\ \quad\quad + \quad\quad - \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Բ.

$$(ա^3 - բ^3) : (ա - բ) = ա^2 + աբ + բ^2$$
$$\begin{array}{l} ա^3 - ա^2բ \\ - \quad + \\ \hline \quad ա^2բ - բ^3 \\ \quad ա^2բ - աբ^2 \\ \quad - \quad + \\ \hline \quad\quad աբ^2 - բ^3 \\ \quad\quad աբ^2 - բ^3 \\ \quad\quad - \quad + \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Գ.

$$(32\text{փ}^5-1):(2\text{փ}-1)=16\text{փ}^4+8\text{փ}^3+4\text{փ}^2+2\text{փ}+1$$

$$\begin{array}{l}
32\text{փ}^5-16\text{փ}^4 \\
-\quad + \\
\hline
16\text{փ}^4-1 \\
16\text{փ}^4-8\text{փ}^3 \\
-\quad + \\
\hline
8\text{փ}^3-1 \\
8\text{փ}^3-4\text{փ}^2 \\
-\quad + \\
\hline
4\text{փ}^2-1 \\
4\text{փ}^2-2\text{փ} \\
-\quad + \\
\hline
2\text{փ}-1 \\
2\text{փ}-1 \\
-\quad + \\
\hline
0
\end{array}$$

Դ.

$$(2\text{ք}^5-11\text{աք}^4+18\text{ա}^2\text{ք}^3-14\text{ա}^3\text{ք}^2-5\text{ա}^4\text{ք}+6\text{ա}^5):(\text{ք}^2-3\text{աք}-2\text{ա}^2)$$

$$=2\text{ք}^3-5\text{աք}^2+7\text{ա}^2\text{ք}-3\text{ա}^3$$

$$\begin{array}{l}
2\text{ք}^5-6\text{աք}^4-4\text{ա}^2\text{ք}^3 \\
-\quad +\quad + \\
\hline
-5\text{աք}^4+22\text{ա}^2\text{ք}^3-14\text{ա}^3\text{ք}^2-5\text{ա}^4\text{ք}+6\text{ա}^5 \\
-5\text{աք}^4+15\text{ա}^2\text{ք}^3+10\text{ա}^3\text{ք}^2 \\
+\quad -\quad - \\
\hline
7\text{ա}^2\text{ք}^3-24\text{ա}^3\text{ք}^2-5\text{ա}^4\text{ք}+6\text{ա}^5 \\
7\text{ա}^2\text{ք}^3-21\text{ա}^3\text{ք}^2-14\text{ա}^4\text{ք} \\
-\quad +\quad + \\
\hline
-3\text{ա}^3\text{ք}^2+9\text{ա}^4\text{ք}+6\text{ա}^5 \\
-3\text{ա}^3\text{ք}^2+9\text{ա}^4\text{ք}+6\text{ա}^5 \\
+\quad -\quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

99 . Իբրեւ յետ բազում անգամ հանելոյ, դարձեալ միւսանգամ յաւելցի մնացորդ, մարթ է անդրառին ի միտ առնուլ ճանաչել, եթէ կատարիցի՞ արդեւք բաժանումն թէ ոչ ։ Յորժամ տեսանիցես զկարողութիւն առաջին նշանագրի մնացորդին, ըստ որոյ

համեմատութեան կարգեալ են բաժանարարն եւ բաժանելին, եթէ փոքր իցէ քան զկարողութիւն առաջին նշանագրի կամ արմատոյ բաժանարարին, նշանակ է, թէ առանց կատարելոյ է բաժանումն, եւ թէ բաժանարարն ոչ ճշդիւ ի բաժանելին գտանի. որպիսի ինչ,

Ա.

$$
\begin{array}{l}
(14ք^3-25ք^2+41ք-1):(7ք-2)=2ք^2-3ք+5+\cdots\\
\;14ք^3-\;4ք^2\\
-\qquad+\\
\hline
\qquad-21ք^2+41ք-1\\
\qquad-21ք^2+\;6ք\\
\qquad+\qquad-\\
\hline
\qquad\qquad 35ք-\;1\\
\qquad\qquad 35ք-10\\
\qquad\qquad-\qquad+\\
\hline
\qquad\qquad\qquad 9
\end{array}
$$

Բ.

$$
\begin{array}{l}
(փ^5+փ^3-1):(փ^3-փ+1)=փ^2+2-\cdots\\
\;փ^5-փ^3+փ^2\\
-\;\;+\;\;-\\
\hline
\qquad 2փ^3-փ^2-1\\
\qquad 2փ^3-2փ+2\\
\qquad -\quad+\quad-\\
\hline
\qquad -փ^2+2փ-3
\end{array}
$$

100. Եթէ պարզ ինչ չափ իցէ բաժանելին, եւ յօդուածոյ բաժանարարն, առանց կատարելոյ է բաժանումն. այլ սակայն եթէ բաժանիցի բաժանելին ի մի յանդամոց բաժանարարին, յայնժամ զմի մասն կամ զմասունս ինչ մասնաւորս քանորդին կարիցես գտանել. որպէս,

Ա.

$$ք^5 : (ք^3 + ա^3) = ք^2 - \dots$$
$$ք^5 + ա^3ք^2$$
$$- \quad -$$
$$-ա^3ք^2$$

Բ.

$$ք^7 : (ք^3 - աք^2 + ա^3) = ք^4 + աք^3 + ա^2ք^2 - ա^4 - \dots.$$
$$ք^7 - աք^6 + ա^3ք^4$$
$$- \quad + \quad -$$
$$աք^6 - ա^3ք^4$$
$$աք^6 - ա^2ք^5 + ա^4ք^3$$
$$- \quad + \quad -$$
$$ա^2ք^5 - ա^3ք^4 - ա^4ք^3$$
$$ա^2ք^5 - ա^3ք^4 + ա^5ք^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$-ա^4ք^3 - ա^5ք^2$$
$$-ա^4ք^3 + ա^5ք^2 - ա^7$$
$$+ \quad - \quad +$$
$$-2ա^5ք^2 + ա^7$$

ՀԱՏԱԾ Զ.

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՌՆԵԼԻՄՆ ԼՈՒԾԱՆԵԼՈՑ

101. Թ**ԻՒՔՆ**, *որ յինքն եւեթ եւ ի* 1 *ճշդիւ առանց մնացորդի բաժանել կարիցէ, որպիսի ինչ են թիւքս* 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... *յորջորջի նախաւոր: Իսկ յօդուածոյք են, որք յայլ թիւս կամ յայլ եւս բազումս բաց յանձանց իւրեանց եւ ի* 1 *թուոյ հաւասարեաւ կոտորեսցին, որոյ ազգի են թիւքս* 4, 6, 9, 10, 12, 18, 24, 25, 30, ...:

Թիւքն յոր այլք ճշդիւ բաժանիցին, անուանեալ կոչին Առնելի կամ Կշիռ կամ Բաժանարար այնր թուոյ, զոր օրինակ 3 *եւ* 9 *են առնելի* 27 *թուոյն: Առնելիքն, որ նախաւոր թիւք իցեն, յորջորջին Առնելիք պարզք, կամ նախաւորք. իսկ յօդուածոյք որ յօդուածոյ իցեն, որպէս յառաջնում օրինակի անդ* 3 *պարզ, իսկ* 9 *յօդուածոյ առնելիք են* 27 *թուոյ:*

102․ Մարթ է զամենայն թիւ յօղուածոյ յիւր պարզ առնելիսն լուծանել։ Համարեսցուք եթէ Ն թիւ մի ի թուոց իցէ, եւ Ն = Ա․Բ․Գ․Դ․․․․։ Արդ Ա, Բ, Գ, Դ․․․ առնելեայն, որպէս եւ այլոցն եւս, պարտ է կամ յօղուածոյ եւ կամ նախաւոր թիւ լինել։ Եթէ յօղուածոյք իցեն, մարթ է միւսանգամ յառնելիսն լուծանել օրինակ զայս

Ա = ա․ա′․ա″․․․
Բ = բ․բ′․բ″․․․․
Գ = գ․գ′․գ″․․․․

զորս զհետ դայ, եթէ Ն = ա․ա′․ա″․․․․բ․բ′․բ″․․․ գ․գ′․գ″․․․, այլովքն հանդերձ։

Արդ եթէ դարձեալ յօղուածոյք երեւիցին առնելիքն, մարթ է նովին օրինակաւ միւսանգամ յօղուածոյիցն լուծանել, մինչեւ ի հարկէ ի յետին պարզ առնելիսն հասանիցեմք։ Արդ լուծանիցին յօղուածոյքն ի պարզ առնելիս իւրեանց, յորժամ բաժանիցին ի պարզ ինչ բաժանարար, որ փոքր իցէ քան զայլ պարզ բաժանարարս։ Իբրեւ բաժանիցի հաւասարաւ յայն, եւ քանորդն նախաւոր թիւ իցէ, յայտ է եթէ յիւր պարզ առնելիսն լուծեալ է։ Իսկ եթէ յօղուածոյ իցէ քանորդն, պարտ է միւսանգամ զքանորդն զայն բաժանել ի փոքր բաժանարար, եւ այն օրինակ յառաջ խաղալ մինչեւ ցյետին պարզ առնելիս։ Որպիսի ինչ,

$360 : 2 = 180$, ուստի $360 = 2 \cdot 180$
$180 : 2 = 90$, „ $180 = 2 \cdot 90$, ուրեմն $360 = 2 \cdot 2 \cdot 90$
$90 : 2 = 45$, „ $90 = 2 \cdot 45$, ուրեմն $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45$
$45 : 3 = 15$, „ $45 = 3 \cdot 15$, ուրեմն $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15$
$15 : 3 = 5$, „ $15 = 3 \cdot 5$, ուրեմն $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$,

որով եւ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$։

Նոյն օրինակ

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

103. Եթէ բազում չափք առանձինն ճշդիւ բաժանիցին ի թիւ ինչ, ըստ նմին օրինակի եւ բովանդակութիւն եւ այլակերպութիւն թուոյն այնոցիկ բաժանիցի ի նոյն թիւ։

Համարեսցուք եթէ Ա եւ Բ չափքս բաժանիցին հաւասարեաւ ընդ Ն, որոց եւ քանորդքն ա եւ բ իցեն. ուստի եւ $\text{Ա} = \text{աՆ}$ եւ $\text{Բ} = \text{բՆ}$, յորմէ եւ $\text{Ա} \pm \text{Բ} = \text{աՆ} \pm \text{բՆ}$ եւ $(\text{Ա} \pm \text{Բ}):\text{Ն} = (\text{աՆ} \pm \text{բՆ}):\text{Ն} = \text{ա} \pm \text{բ}$ ապա կարիցես առնուլ ի միտ եթէ եւ բովանդակութիւնս $\text{Ա} + \text{Բ}$, եւ այլակերպութիւնն $\text{Ա} - \text{Բ}$ ընդ Ն բաժանին։ Զոր օրինակ քանզի 72 եւ 48 թիւքս առանձինն բաժանին ի 24, վասն այնորիկ եւ բովանդակութիւն նոցա 120, եւ այլակերպութիւնն 24 բաժանին հաւասարեաւ ընդ նոյն թիւ։

104. Եթէ արդիւնք ինչ բաժանիցի ընդ մին յառնելեաց իւրոց, որչափ եւ զարդիւնսն բազմացուցանիցես, բաժանի ընդ նոյն առնելին։

Դիցուք գրեսցուք եթէ $\text{ա}:\text{գ} = \text{դ}$, եւ $\text{ա} = \text{գդ}$. եթէ զհաւասարս հաւասար բ չափով բազմացուցանիցես $\text{աբ} = \text{գդբ}$ լինիցի. եւ քանզի գդբ բաժանի ընդ գ, ապա եւ աբ (Տ. 93.)։

105. Զամենայն թիւ, որոյ ի տասնկարգեան տախտակս առաջին աջակողմեան նշանակն զատարկ իցէ, հնար է իբրեւ արդիւնս իմն 10 թուոյ ածել զմտաւ, եւ հասարակաց իմն օրինակաւ զայս օրինակ 10ն նշանակել, որպիսի ինչ $750 = 75 \cdot 10$։ Իսկ ամենայն թիւ տասնկարգեան, որոյ յառաջին տեղւոջ ընդ աջմէ որ զինչ եւ իցէ թիւ $= \text{Ն}$ կայցէ, հասարակաց իմն օրինակաւ $10\text{ն} + \text{Ն}$ դրոշմի, որպէս $756 = 75 \cdot 10 + 6$։

106. Զոյգ թիւք են, որ կարիցեն առանց մնացորդի յ2 բաժանել: Այսց թուոց հասարակաց իմն օրինակք են 2ա, 2բ,... 2ն, քանզի փոխանակ ա, բ....ն նշանագրաց մարթ է զամենայն թիւ իմանալ, որ բազմացուցեալ իցէ 2 առնելեաւ: Զոր օրինակ են թիւքս 2, 4, 6, 8, 10, 12...., այլովքն հանդերձ: Իսկ անզոյգք են, որոց չիցէ հնար յ2 առանց մնացորդի բաժանել, որոց առաջին տեղին ընդ աջմէ 1, 3, 5, 7, 9 է. սոցա օրինակ է 2ն+1 կամ 2ն—1 կամ 2ն ± 1: Քանզի փոխանակ ն նշանագրի մարթ է զամենայն թիւս 1, 2, 3,... դնել, յորոց ծագեն անբաւ անզոյգ թիւք 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19....:

107. Ամենայն նախաւոր թիւք բաց յ2 թուոյ, են անզոյգ, քանզի յանձինս եւեթ եւ ի 1 բաժանին:

108. Արկին զոյգ թիւք ասին, որք իբրեւ ընդ 2 բաժանիցին, քանորդն դարձեալ կարիցէ յ2 բաժանել, որպիսի ինչ են 4, 8, 12, 16, 20,... 4ն: Իսկ զոյգ անզոյգ թիւք, որոց յետ ընդ 2 բաժանելոյ, քանորդն անզոյգ թիւ գայ. որպիսի ինչ, 2, 6, 10, 14, 18,... 4ն+2:

109. Բովանդակութիւն եւ այլակերպութիւն երկուց անզոյգ թուոց է թիւ զոյգ: Քանզի համօրէն հասարակաց օրինակ անզոյգ թուոց է 2ա+1, 2բ+1. արդ իբրեւ զսոսա ի միմեանս յաւելուցուս =2ա+2բ+2 ուստի եւ (ա+բ+1)2 լինի, եւ քանզի ճշդիւ բաժանի չափս յ2, ուրեմն է զոյգ (Տ. 106.): Ըստ նմին օրինակի (2ա+1)—(2բ+1)=2ա—2բ=(ա—բ)2, որ բաժանի հաւաստեաւ ընդ 2:

Այլ եթէ զզոյգս յանզոյգս յաւելուցուս կամ ի միմեանց հանցես, բովանդակութիւնն կամ այլակերպութիւնն եղանէ անզոյգ, որպէս բովանդակութիւնս 2ա+2բ+1=2(ա+բ)+1 որ [2(ա+բ)+1]:2 =ա+բ+(1:2). նոյնպէս 2ա—(2բ+1)=2ա

—2բ—1=2(ա—բ)—1 որ [2(ա—բ)—1]:2=ա—բ—(1:2)։

110. Եթէ զոյգ ինչ թիւ անզոյգ թուով կամ որով եւ իցէ թուով բազմացուցանիցի, արդեանցն պարտ եւ պատշաճ է զոյգս լինել։ Որպիսի ինչ 2·աժ=2աժ. արդ 2աժ:2=աժ. (Տ. 106.)։ Իսկ եթէ անզոյգ թիւ անզոյգ թուով բազմացուցանիցի, արդիւնքն եւս անզոյգ լինիցի։ Զոր օրինակ եթէ (2ա+1)(2բ+1)=4աբ+2ա+2բ+1=2(2աբ+ա+բ)+1։ Արդ եթէ բաժանիցեմք ընդ 2, [2(2աբ+ա+բ)+1]:2=2աբ+ա+բ+(1:2), (Տ. 106.)։

111. Եթէ զոյգ թիւ ի զոյգ թիւ բաժանիցի, մնացորդն եւս բաժանմանն զոյգ լինիցի։

Դիցուք գրեսցուք եթէ զոյգ թիւս Զ բաժանեալ ընդ ղ, տայցէ քանորդ ժ եւ մնացորդ ֆ զայս օրինակ, Զ: ղ=ժ+(ֆ:ղ)։ Արդ քանզի մնացորդն հաւասար է այլակերպութեանն, զոր, իբրեւ զարդիւնս քանորդին եւ բաժանարարին ի բաժանելեացն հանցես, գտանիցես, տարբերին մարթ է քեզ առնուլ ի միտ, եթէ ֆ=Զ—ղժ։ Եւ քանզի Զ եւ ղժ են զոյգ թիւք, եւ բաժանին յ2, ապա ուրեմն եւ ֆ (Տ. 103.)։ Զորոյ զհետ գայ եւ այս եթէ,

Յորժամ բաժանարարն եւ բաժանելին բաժանիցին ուրոյն ուրոյն ի թիւ ինչ, բաժանի ընդ նոյն թիւ եւ մնացորդն նոցա։

112. Իբրեւ զոյգ ինչ թիւ բաժանիցի յանզոյգ, եթէ անզոյգ լինիցի քանորդն, անզոյգ իցէ եւ մնացորդն, ապա եթէ զոյգ իցէ քանորդն, զոյգ լինի եւ մնացորդն։

Համարեսցուք եթէ զոյգ թիւս Զ, յանզոյգ ինչ թիւ ա բաժանեալ, տացէ քանորդ ժ եւ մնացորդ ֆ զորոյն ձեւ օրինակի, Զ:ա=ժ+(ֆ:ա), յորմէ յայտ է եթէ ֆ=Զ—աժ։ Արդ եթէ ժ իցէ զոյգ, պարտ է եւ աժ չափոյն զոյգ լինել (Տ. 110.), եւ քանզի Զ նշանագիրն եւս ըստ մերոյ համարելոյ է զոյգ, ապա եւ այլակերպութիւնն եւս երկուց զոյգ չափուցս Զ — աք (∸. 103.) է զոյգ։ Իսկ եթէ ք իցէ անզոյգ, զհետ գայ, եթէ եւ աք իցէ անզոյգ (∸. 110.), եւ մնացորդն Զ — աք չափուցս իցէ անզոյգ (∸. 109.)։

Զսորին զհետ գայ, եթէ յորժամ քանորդն եւ բաժանելին ուրոյն ուրոյն բաժանիցին ի թիւ ինչ, բաժանի եւ մնացորդն նոյա ի նոյն թիւ։

113. Յորժամ թիւ ինչ անզոյգ ի զոյգ թիւ բաժանիցի, մնացորդն անզոյգ է։

Համարեսցուք եթէ անզոյգ թիւ Ա ի զոյգ թիւ զ բաժանել, տայէ ք քանորդ եւ մ մնացորդ զայս ձեւ օրինակի, Ա : զ = ք + (մ : զ), մ մնացորդն անզոյգ է։ Յայտ է ի նոցունց սկզբանց յառաջադոյն ճառելոց։

114. Եթէ թիւ ինչ անզոյգ բաժանիցի յայլ անզոյգ թիւ, մնացորդին գոյ հնար եւ զոյգ եւ անզոյգ լինել․ անզոյգ, յորժամ քանորդն զոյգ իցէ, ապա եթէ անզոյգ իցէ քանորդն, զոյգ լինի մնացորդն։

Դիցուք գրեսցուք, եթէ Ա բաժանել ընդ ա, առնիցէ քանորդ ք եւ մնացորդ մ, զայս օրինակ, Ա : ա = ք + (մ : ա)։ Արդ իբրեւ ք քանորդն զոյգ իցէ, պարտ է եւ աք արդեանցն զոյգս լինել․ եւ քանզի Ա է անզոյգ, ուրեմն եւ մ = Ա — աք անզոյգ իցէ (∸. 109.)։ Այլ եթէ անզոյգ իցէ ք, ուստի եւ աք, ուրեմն մ = Ա — աք (∸. 109.) զոյգ լինիցի։

Յաղագս նշանի բաժանելեաց թուոց։

115. Զամենայն թիւ Ն, որ տասնկարգեան աստիճանօք գրոշմեալ իցէ, մարթ է այսու հասարակաց օրինակաւ Ն = ա + 10բ + 100գ + 1000դ + ... յանդիման կացուցանել, յորում ա, բ, գ, դ, .. ցուցանեն զնշանակս թուոյն, որ ի տասնկարգեան տեղին կայցեն։

116. Առ կարող լինելոյ հասանել ի վերայ, եթէ բաժանիցի արդեւք թիւ ինչ յայլ զինչ եւ իցէ

եւ զերիս տեղիսն եւս, որ զկնի բ չափոյն իցեն,

$$(1000000է + 10000000ը + 100000000թ) = 1000000\,(է + 10ը + 100թ) = 1000^2դ.$$

եւ զայլսն եւս ըստ սմին օրինակի, լինիցին երեք երեք տեղիքն

$$(ա + 1001բ - բ + 1000000գ + 1000000001դ - դ + \cdots):7 = (ա:7) + 143բ + (-բ:7) + 142857գ + (գ:7) + 142857143դ + (-դ:7) + 142857142857ե + (ե:7) + \cdots,$$

յորում եթէ զբովանդակութիւն ողջոյն թուոց $=$ Ն համարիցիմք, լինիցի

$Ն + (ա - բ + գ - դ + ե - զ + \cdots):7$։ Յորում ա, բ, գ, դ, . . . նշանագիրքս ցուցանեն զայլակերպութիւն զոյգ եւ անզոյգ բաժնիցն։ Զայն մարթ է եւ զ13 թուոյ ցուցանել։

Օրինակի ինչ թիւս

3|649|580|932|649|512|036|751|647|905

36	751	
649	512	
580	932	
3	649	
1915	3749	Նով. անզոյգ
	1915	Նով. զոյգ
	1834 : 7 = 262	

Նոյն օրինակ եւ թիւս

1|695|428|100|923|674

428	100	
1	695	
1352	1469	Նով. անզոյգ
	1352	Նով. զոյգ
	117 : 13 = 9	

125. Առ հաստանել ի վերայ եթէ թիւ ինչ նախաւոր իցէ կամ եթէ բաժանիցի արդեւք յայլ ինչ թիւ բաժանարար, պարտ է սկիզբն ի փոքրագոյն բաժանարարէն արարեալ, բաժանել զայն թիւ յամենայն նախաւոր թիւս եւ քննել եթէ բաժանիցի՞ ի

նոսա: Իբրեւ հասանիցես յայնպիսի ինչ թիւ յոր բաժանեալ, առնիցէ քանորդ փոքր քան զբաժանարարն զայն, եւ չբաժանիցի հաւասարեաւ, նշանակ է նախաւոր լինելոյ այնր թուոյ, եւ չբաժանելոյ յայլ նախաւոր թիւս, որ մեծ իցեն քան զվերջին բաժանարարն: Որպիսի ինչ, եթէ կամիցիս զփորձ առնուլ ճանաչել, եթէ 9901 թիւս նախաւոր իցէ, եւ կամ եթէ բաժանիցի արդեւք ճշդիւ յայլ ինչ թիւ, սկիզբն ի փոքրագունէն արարեալ, բաժանեա ի վերայ ամենայն նախաւոր թուոց: Յայտ է եթէ չբաժանի յ2, յ3, ի 5, յ7, ի 11, յ13: Բաժանեա յ17, ըստ սմին օրինակի մի ըստ միոջէ մինչեւ ց101. որ եւ լինիցի 9901 : 101 = 98 + (3 : 101) յորմէ մարթեմք ի միտ առնուլ եթէ 9901 թիւս չբաժանիցի եւ ոչ ի մեծագոյն ինչ չափ քան զ101: Եւ պատճառ սորին է, զի քանորդին որ ելանիցէ ի վերջին բաժանմանէ անտի պարտ է լինել առնելի բաժանելւոյն եւ լինել կամ յօդուածոյ եւ կամ պարզ: Եթէ յօդուածոյ իցէ, ապաքէն յայտ է եթէ ի պարզ առնելեաց կազմիցի, արդ ի պարզն բաժանեցաք, եւ յայտ եղեւ եթէ չբաժանեցաւ, ապա ուրեմն զսորին զհետ գայ, եթէ չիցէ այլ եւս թիւ յոր բաժանել մարթ ինչ իցէ:

Տացուք ընծայութիւնս եւ հաստատակաց իմն օրինակաւ: Համարեսցուք եթէ ն > ա իցէ, այլ ն < աա: Արդ եթէ չբաժանիցի ճշդիւ ն ընդ ա, եւ ոչ յայլ ինչ թիւ, որ քան զչափս ա փոքր իցէ, զհետ գայ, եթէ ն թիւ ինչ նախաւոր է: Քանզի չբաժանի ոչ յա, եւ ոչ յայն՝ որ փոքր իցէ քան զա, ապա եւ ոչ ի մեծագոյն ինչ քան զա: Արդ դիցուք, եթէ ս նախաւոր թիւ իցէ, եւ ս > ա. եւ ն : ս = ծ, ուստի ն = ծս, եւ քանզի ն < աա, ուրեմն ծս < աա: Այլ քանզի ս > ա, չմարթի ոչ ծ = ա եւ ոչ ծ > ա լինել, ապա թէ ոչ յերկոսին եւս դէպսն հարկ էր ծս > աա լինել, ուստի եւ ն > աա որ է հակառակ մերոյ ն < աա համարելոյ: Զսորին զհետ գայ, եթէ Ն < ա իցէ, եւ քանզի Ն = ամ, ուրեմն Ն : ա = մ: Արդ Ն կամ է պարզ եւ կամ յօդուածոյ, որպիսի ինչ եւ իցէ Ն < ա է, որով եւ Ն չափին բաժանի ի փոքր քան զա, որ է հակառակ մերոյ համարելոյ:

126. Իբրեւ զթիւ ինչ յիւր պարզ առնելիսն կամիցիմք լուծանել, պարտ է յամենայն նախաւոր թուոց, որպիսի ինչ են 2, 3, 5, 7, 17, 19, եւ այլ նոյնպիսիք, ընդ որս Ն չափոյն մարթ իցէ բաժանել, զատանել զփոքրն, եւ բաժանել յայն: Համարեսցուք եթէ ա իցէ փոքր քան զամենայն նախաւոր թիւս, եւ Ն : ա = Ա: Աստուստին յայտ է, եթէ Ա արդիւնք իմն է այլոց պարզ առնելեացն Ն չափոյն: Արդ բաժանեա դարձեալ զքանորդն Ա ի փոքր նախաւոր թիւ, յոր բաժանել մարթ իցէ, որ չկարէ քան զա փոքր լինել, քանզի եթէ մարթ ինչ էր, ապաքէն հարկ էր զՆ բաժանել յայն: Այլ կարէ հաւասար լինել ա նշանագրի, քանզի մարթ է միոյ առնելւոյ բազում անգամ գտանել ի Ն: Արդ բաժանեա զայս օրինակ ի բ, եւ զքանորդն յայլ փոքր նախաւոր թիւ կարգ ըստ կարգէ, մինչեւ հասանիցես ի թիւ ինչ, որ այլ եւս չբաժանիցի:

Ն : ա = Ա
Ա : բ = Բ
Բ : գ = Գ
Գ : դ = Դ...

Յորմէ կարիցեմք ի միտ առնուլ, եթէ Ն յիւր պարզ առնելիսն լուծաւ, յա, բ, գ, դ, Դ: Ապա եթէ Ն եւ ոչ ի մի թիւ ի նախաւոր թուոց բաժանիցի, է նախաւոր թիւ: Զայս օրինակ եւ զամխոբական թիւս մարթ է յիւրեանց պարզ առնելիսն լուծանել, եթէ զքանորդսն՝ որ ելանիցեն, բաժանիցես ընդ փոքր բաժանարար, մինչեւ հասանիցես ցվերջին նախաւոր թիւն որ այլ եւս ոչ բաժանիցի:

127. Ի լուծանել զթիւս յիւրեանց պարզ առնելիս, ընդ աջմէ այնր թուոյ, որ յառնելին լուծանիցի, ձգեա գիծ ուղղորդ վերուստ ի վայր, եւ զպարզ առնելիս դրոշմեա առաջի գծին մի ըստ միոջէ յանդիման իւրեանց բաժանելեացն եւ զբաժանելին կարգեա ընդ միմեամբք: Օր օրինակ եթէ 265608 յիւր պարզ առնելին լուծանիցի,

265608	2
132804	2
66402	2
33201	3
11067	3
3689	7
527	17
31	31

եւ է $265608=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot17\cdot31=2^3\cdot3^2\cdot7\cdot17\cdot31$.

128. Պարզ առնելիք չափուց նշանագրաց կազմին ի նշանագրաց, եւ ի պարզ առնելեաց գործակցացն: Օր օրինակ,

$$36\text{ա}^2\text{գդե}=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot\text{ա}\cdot\text{ա}\cdot\text{գ}\cdot\text{դ}\cdot\text{ե}$$
$$30\text{ա}^3\text{բ}^2\text{զե}=2\cdot3\cdot5\cdot\text{ա}\cdot\text{ա}\cdot\text{ա}\cdot\text{բ}\cdot\text{բ}\cdot\text{զ}\cdot\text{ե}$$
$$77\text{աբգ}^2(\text{դ}+\text{ե})(\text{է}-\text{ը})=7\cdot11\cdot\text{ա}\cdot\text{բ}\cdot\text{գ}\cdot\text{գ}\cdot(\text{դ}+\text{ե})\cdot(\text{է}-\text{ը})$$

129. Այլ կարի իմն դժուարին է զչափս յօդուածոյս նշանագրաց յիւրեանց պարզ առնելին լուծանել, քանզի չէք ինչ համօրէն հասարակաց օրէնք եւ կանոնք, բայց ի սակաւուց, որք մարթեն ի դէպս ինչ դիւրինս նպաստել:

Ա. Եթէ ամենայն անդամոց յօդուածոյ չափոյն իցէ մի հասարակաց առնելի, մարթ է զայն փոխանակ միոյ յառնելեացն դնել, եւ զբովանդակութիւն այլոց մասանցն փոխանակ միւսոյ առնելւոյն: Օր օրինակ,

$$\text{աբ}+\text{ագ}-\text{ազ}=\text{ա}(\text{բ}+\text{գ}-\text{զ})$$
$$2\text{ա}^2+6\text{աբ}-4\text{ա}=2\text{ա}(\text{ա}+3\text{բ}-2)$$
$$9\text{ա}^3-12\text{ա}^2+3\text{ա}=3\text{ա}(3\text{ա}^2-4\text{ա}+1)$$
$$5\text{ա}^8\text{բ}^2-20\text{աբ}^4=5\text{աբ}^2(\text{ա}^7-4\text{բ}^2)$$

Ի. Օգէպսն որ բաղում անգամ դիպին ի նշանագրովք համարողութեան, դիցուք աստէն յայսմ վայրի։

Ա. $ա^2 - բ^2 = (ա + բ)(ա - բ)$ կամ բովանդակութիւն երկուց չափուց բազմացուցեալ այլակերպութեամբ նոյին չափուց, գործէ արդիւնս հաւասար այլակերպութեան երկրորդ կարողութեան չափուցն այնոցիկ։

Բ. $(ա + բ)^2 = ա^2 + 2աբ + բ^2$, կամ Երկրորդ կարողութիւն երկմասնեան չափուց հաւասար է երկրորդ կարողութեան առաջնոյ մասին, երկրորդ կարողութեան երկրորդ մասին, եւ կրկնապատիկ արդեանց երկոցունց մասանցն։

Գ. Օրինակքս, որ առաջիս կան, զորս վասն ընդելանելոյ ուսանելեացն դնեմք, լիցին ի կանոնս յառնելեան լուծանելոյ, զոր ջանքն եւեթ եւ ճարտարութիւն միայն ուսուցանիցէ։

Ա. $ա^3 + 3ա^2 + 2ա = ա^3 + ա^2 + 2ա^2 + 2ա$
$= ա^2(ա + 1) + 2ա(ա + 1) = (ա + 1)(ա^2 + 2ա)$
$= ա(ա + 1)(ա + 2)$

Բ. $25 - 10գ + գ^2 = (5 - գ)(5 - գ)$

Գ. $դ^2 - 2դգ^2 + գ^4 = դ^2 - դգ^2 - դգ^2 + գ^4 =$
$դ(դ - գ^2) - գ^2(դ - գ^2) = (դ - գ^2)(դ - գ^2) = (դ - գ^2)^2$

Դ. $ք^4 - 1 = ք^2 . ք^2 - 1.1 = (ք^2 + 1)(ք^2 - 1) =$
$(ք^2 + 1)(ք^2 - 1^2) = (ք^2 + 1)(ք + 1)(ք - 1)$

Ե. $ք^3 + 3ք^2 + 2ք = ք(ք^2 + 3ք + 2) = ք(ք^2 + ք + 2ք + 2) =$
$ք[ք(ք + 1) + 2(ք + 1)] = ք(ք + 1)(ք + 2)$։

Զ. $գ^{մ+ն}ք^{մ} - գ^{2ն}ք^{մ+ն} - գ^{ն}ք^{2ն} = գ^{ն}ք^{մ}(գ^{մ} - գ^{ն}ք^{ն} - ք^{մ})$

Յաղագս յօդուածոյ էլուոց։

130. Ամենայն թիւ յօդուածոյ բաժանի ճշդիւ յարդիւնս երկուց կամ երից կամ բաղում պարզ առնելեաց իւրոց։ Համարեսցուք եթէ ա, բ, գ, դ, ե, զ, ... նախաւոր թիւք իցեն, եւ Ն $=$ աբգդեզ ..., աստանօր մարթ է ի միայն իմանալ եթէ

Ն : աբ = գդեղ . . .
Ն : ագ = բդեղ . . .
Ն : ադ = բգեղ . . . այլովքն հանդերձ
Ն : աբգ = դեղ . . .
Ն : աբգե = դղ . . . այլովքն հանդերձ

Յօդուածոյ թիւքն աբ, ագ, ադ, աբգ, աբգե . . . այլովքն հանդերձ, ընդ որս Ն բաժանի ճշդիւ, անուանեալ կոչին Կշիռք կամ Առնելիք կամ Բաժանարարք յօդուածոյք Ն չափոյն:

Ամենայն թուոց յօդուածոյից, որչափ ինչ բազում իցեն պարզ առնելիքն, նոյնչափ եւ յօդուածոյքն բազմաթիւ են: Ի միջէ օրինակէս կարիցես ի միտ առնուլ եթէ որպէս եւ որո՞վ օրինակաւ դիւրաւ մարթ իցէ զկշիռս յօդուածոյս գտանել:

Եթէ կամիցիս զյօդուածոյ առնելիս 420 թուոյ գտանել, զառաջինն գիտ զնախաւոր առնելիսն, 420 = 2·2·3·5·7: Զայսոսիկ դրոշմեա մի ընդ միով, սկիզբն յերիցագունէն արարեալ մինչեւ ցփոքրն, եւ բազմացո զնոսա ըստ առաջիկայ օրինակիս,

7	
5	35
3	21, 15, 105
2	14, 10, 70, 6, 42, 30, 210
2	4, 28, 20, 140, 12, 84, 60, 420

Զմեծագոյն առնելին բազմացո այնուիկ, որ քան զնա փոքր իցէ, այսինքն 5իւ, եւ զարդիւնս նոցա 35 դրեա յանդիման նոցա ընդ աջմէ, յետ այնորիկ բազմացո զերրորդ առնելին 3, երկուք առաջնովքն որ են 7 եւ 5, եւ նոցա 35 արդեամբք, եւ դրեա զարդիւնսն ընդ աջմէ 3 առնելւոյն: Նովին օրինակաւ բազմացո եւ զայլ առնելիս եւս, որ զհետ գան, եւ եթէ այնպէս իմն դիպիցի, զի նոյն առնելիք իցեն, որ յառաջինսն եւս գտանիցին, պարտ եւ պատշաճ է այնոքիւք եւեթ բազմացուցանել, որովք չիցէ բազմացուցեալ ռուաջինն, որպէս յօրինակին տեսանես, զի մի՛ առնելեքն որ յառաջագոյն ծագեցան միասանգամ կրկնիցին։

131. Նոյնն օրինակաւ գտանին եւ յօդուածոյ կշռոց չափուց նշանագրովք համարողութեան։ Որպիսի ինչ $6ա^2բ = 2\cdot 3\cdot ա\cdot ա\cdot բ$, որոյ եւ յօդուածոյ կշռոքն են

$$\begin{array}{r|l} ա & \\ ա & ա^2 \\ բ & աբ,\ ա^2բ \\ 3 & 3ա,\ 3ա^2,\ 3բ,\ 3աբ,\ 3ա^2բ \\ 2 & 2ա,\ 2ա^2,\ 2բ,\ 2աբ,\ 2ա^2բ,\ 6,\ 6ա,\ 6ա^2,\ 6բ,\ 6աբ,\ 6ա^2բ : \end{array}$$

Զնոյն ձեւ եւ յօդուածոյ առնելիք

$$2ա(բ^2-գ^2) = 2ա(բ+գ)(բ-գ)$$

$$\begin{array}{r|l} բ+գ & \\ բ-գ & բ^2-գ^2 \\ ա & աբ+ագ,\ աբ-ագ,\ աբ^2-ագ^2 \\ 2 & 2(բ+գ),\ 2(բ-գ),\ 2(բ^2-գ^2),\ 2ա,\ 2ա(բ+գ), \\ & \qquad 2ա(բ-գ),\ 2ա(բ^2-գ^2) \end{array}$$

132. Համօրէն առնելի կամ կշիռ կամ բաժանարար երկուց կամ բազում չափուց այն է, ընդ որ երկոքին չափքն ճշգրիւ բաժանիցին, զոր օրինակ 5 է համօրէն կշիռ 20 եւ 15 չափուց։ Բազում թուոց մարթ է բազում համօրէն կշիռս ունել, յորոց կարգս միութիւնն, ընդ որ ամենայն թիւք բաժանել կարիցեն, չմտանէ։ Մեծագոյնն ի համօրէն առնելեաց անուանեալ կոչի Մեծագոյն համօրէն կշիռ կամ բաժանարար թուոց։

133. Թիւք, որոց չէ մարթ բաց ի միութենէ ունել համօրէն կշիռ կամ բաժանարար, ընդ որ երկոքին եւս բաժանել կարիցեն, անուանեալ կոչին Նախաւոր թիւք առ միմեանց համեմատութեամբ, զոր օրինակ 16, եւ 21 կամ $3աբ$, եւ $2գդ$, այլովքն հանդերձ։

Յաղագս Մեծի համօրէն կշռոյ։

134. Մեծ համօրէն կշիռ կամ բաժանարար թուոց բազմաց գտանի, յորժամ զթիւսն զայնոսիկ

առանձինն յիւրաքանչիւր յիւրեանց պարզ առնելիսն լուծանիցես, եւ զայնոսիկ որ ամենայն թուոյն հասարակ իցեն, զատեալ, միմեամբք բազմացուցանիցես, արդիւնքն է մեծագոյն համօրէն կչիռն: Զոր օրինակ,

Ա. $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot$
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

մեծ համօրէն կչիռն հասարակաց է

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Իսկ այլ եւս մնացեալ համօրէն կչիռքն գտանիցին, եթէ զպարզ առնելիսն (Հ. 130.) միմեամբք բազմացուցանիցես, որպիսի ինչ,

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ 3 & 15 \\ 2 & 10,\ 6,\ 30 \\ 2 & 4,\ 20,\ 12,\ 60 \end{array}$$

Յորոց մարթ է ճանաչել հաւաստեաւ, եթէ 420 եւ 360 նշանակաց թուոց մարթ է ընդ 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 եւ ընդ 60 բաժանել, յորոց միջի մեծագոյն կչիռն 60 է, եւ այլքն փոքունք:

Բ. Եթէ որոնիցեմք զմեծագոյն համօրէն կչիռ երից 420, 990, եւ 1470 նշանակացս, գտանեմք

Քանզի $420 = 2^2, 3, 5, 7$
$990 = 2, 3^2, 5, 11$
$1470 = 2, 3, 5, 7^2$, ապա մեծագոյն կչիռն նոցա է $= 2.3.5 = 30$, եւ այլքն 2, 3, 5, 6, 10, 15... փոքունք:

Գ. Յորժամ կամք իցեն զմեծագոյն համօրէն կչիռս երկուց $14\text{ա}^2\text{բգ}$, եւ $10\text{ա}\text{բ}^2\text{գդ}$ չափուցս գտանել,

Քանզի $14\text{ա}^2\text{բգ} = 2.7.\text{ա}^2.\text{բ}.\text{գ}$
$10\text{ա}\text{բ}^2\text{գդ} = 2.5.\text{ա}.\text{բ}^2.\text{գ}.\text{դ}$,

զհետ գայ եթէ մեծագոյն համօրէն բաժանարարն է $= 2\text{աբգ}$, իսկ այլքն

$$\begin{array}{c|l} \text{ա} & \\ \text{բ} & \text{աբ} \\ \text{գ} & \text{ագ},\ \text{բգ},\ \text{աբգ} \\ 2 & 2\text{ա},\ 2\text{բ},\ 2\text{աբ},\ 2\text{գ},\ 2\text{ագ},\ 2\text{բգ},\ 2\text{աբգ} \end{array}$$

Դ. Նոյնպէս

$$4աբ\,(բ^2-գ^2)=2^2\cdot ա\cdot բ\cdot(բ+գ)\cdot(բ-գ)$$
$$6ա^2\,(բ+գ)^2=2\cdot3\cdot ա^2\cdot(բ+գ)\cdot(բ+գ)\cdot$$

մեծագոյն համօրէն կշիռն $=2ա\,(բ+գ)$, իսկ այլքն են 2, ա, բ + գ, 2ա, 2(բ + գ) եւ ա(բ + գ) փոքունք։

Ե. Վասնզի $429=3\cdot11\cdot13$, եւ
$$490=2\cdot5\cdot7^2,$$

զհետ գայ եթէ 429, եւ 490 են պարզ թիւք առ միմեանց համեմատութեամբ, քանզի չունին համօրէն կշիռ։ Ըստ նմին օրինակի պարզ թիւք են $7ա^2բգ$ եւ $5դե^2զ$։

Զ. Եթէ ի մի ի թուոցն, զորս կամիցիմք զմեծագոյն համօրէն չափն գտանել, այլ եւս մնացեալ թիւքն բաժանիցին, այն է մեծագոյն համօրէն կշիռ նոցա։ Զոր օրինակ 6, 12, 18, 30 թուոց, մեծագոյն համօրէն կշիռն 6 է, քանզի չիք մեծագոյն թիւ, յոր 6 բաժանիցի։

135. Մեծագոյն համօրէն կշիռ բազում թուոց բաժանի յայլ համօրէն առնելիս փոքունս թուոցն այնոցիկ։

Մարթեմք ցուցանել զայս հաստատակաց օրինակաւ։ Համարեսցուք եթէ Տ մեծագոյն համօրէն կշիռ իցէ թուոցս Ա, Բ, Գ.... որոց առաջնոյն քանորդն իցէ ա, երկրորդին բ, եւ երրորդին գ, զորս զհետ գայ եթէ Ա = Տա, Բ = Տբ, Գ = Տգ... յորում ա, բ, գ թուոց պարտ է առ միմեանց համեմատութեամբ թիւս նախաւորս լինել։ Արդ եթէ Ն համօրէն կշիռ իցէ Ա, Բ, Գ.... թուոց, յայնժամ պարտ է զի եւ Տ ընդ Ն ճշդիւ բաժանիցի։ Որպէս զի մարթ ինչ իցէ Ա, Բ, Գ.... թուոց ընդ Ն ճշդիւ բաժանել, երից դիպաց հնար է լինել. կամ զի Ն առնելի իցէ Տ չափոյն, եւ կամ զի Ն համօրէն առնելի իցէ ա, բ, գ նշանակացս եւ կամ զի Ն արդիւնք իմն իցէ երկուց դ եւ փ առնելեաց, յորոց առաջինն դ՝ իցէ մին յառնելեաց Ն թուոյ, իսկ միւսն ա՝ համօրէն առնելի իցէ ա, բ, գ . . . թուոց։ Արդ քանզի ա, բ, գ . . . որպէս յառաջագոյն ասացաք, նախաւոր թիւք են, առ-աի իսկ զհետ գայ, եթէ երկրորդ եւ երրորդ երկու դէպքն հակառակ միոյ համարելոյս են մանաւանդ թէ անհնարին ինչ, ապա ուրեմն հարկ է, զի իցէ առաջինն, եւ Ն մեծագոյն համօրէն կշիռ Ա., Բ., Գ. . . չափուց, բաժանիցի հաւասարաւ ի Դ։

136. Օրինակս, որ առաջիս կայ, ցուցանիցէ քեզ, եթէ զիարդ մարթ իցէ եւ այլով օրինակաւ առանց յառնելոյն լուծանելոյ զմեծագոյն համօրէն կշիռ երկուց թուոց գտանել։ Կամք են մեզ զմեծագոյն համօրէն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուցս գտանել, եւ համարեսցուք եթէ իցէ Ա. > Բ.։ Բաժանեա

Ա. զթիւն Ա. ընդ Բ., եթէ բաժանիցի ճշդիւ

Ա. : Բ. = ա, կամ Ա. = Բ.ա,

յայտ է եթէ Բ. իցէ խնդրեալ մեծագոյն կշիռն։

Բ. Ապա եթէ չբաժանիցի Ա. ընդ Բ. ճշդիւ, եւ մնասցէ մնացորդ Գ., ուստի եւ Ա. = աԲ. + Գ., բաժանեա դարձեալ ընդ մնացորդս Գ. զառաջին բաժանարարն Բ., եւ եթէ ճշդիւ բաժանիցի ընդ այն, որպէս,

Բ. : Գ. = բ, կամ Բ. = Գ.բ,

յայտ է եթէ Գ.՝ խնդրեալ մեծագոյն կշիռն իցէ։ Արդ եթէ Գ. համօրէն կշիռ իցէ, յայտ անտի է, զի Բ., ընդ որում եւ աԲ. բաժանի ընդ Գ., զորս զհետ գայ եթէ եւ աԲ. + Գ. = Ա. բաժանիցի ընդ Գ.. ապա Գ. համօրէն առնելի է Ա. եւ Բ. չափուց։ Այն օրինակ եթէ Գ. մեծագոյն համօրէն կշիռ իցէ, այսուիկ յայտ առնիցի. դիցուք դրեսցուք եթէ Ա. եւ Բ. չափուցս, ընդ որոց եւ Ա. եւ աԲ. չափուց, որ ինչ եւ իցէ համօրէն կշիռ Դ > Գ. իցէ, յայնժամ պարտ եւ պատշաճ է, զի եւ Գ. ընդ Դ բաժանիցի, քանզի Ա. = աԲ. + Գ. եւ Ա. — աԲ. = Գ., (∸. 103.), եւ Դ փոքր իցէ քան զԳ. որ անհնարին ինչ է, եւ հակառակ միոյ Դ > Գ. համարելոյ։

Արդ ցուցաւ եթէ Գ. եւ մեծագոյն առնելի իցէ Ա. եւ Բ. չափուց:

Գ. Իսկ եթէ եւ յերրորդում նուագի մնայցէ մնացորդ կամ Բ=քԳ+Դ, յայնժամ բաժանեա ընդ մնացորդս այս Դ զառընթերակայ մնացորդն կամ զչափն Գ: Յորժամ հաւաստեաւ բաժանիցի Գ. ընդ Դ՝ յայտ է թէ Դ. է մեծագոյն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուց զոր խնդրեմք: Քանզի որովհետեւ Գ. բաժանի ճշդիւ ընդ Դ, զարին զհետ գայ, եթէ եւ քԳ+Դ=Բ, բառնմին օրինակի եւ աԲ+Գ=Ա ընդ Դ բաժանիցին: Արդ աւասիկ յայտ արարեալ ցուցաւ եթէ Դ. է համօրէն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուց, եւ եւս մեծագոյն կշիռ, քանզի եթէ լինէր Ե>Դ, յայնժամ պարտ էր եւ Գ=Ա—աԲ, որով եւ Դ=Բ—քԳ ընդ Ե բաժանել, այս ինքն փոքու ընդ մեծագոյնն բաժանել, որ անհնարին ինչ է:

Դ. Արդ յայտ է յասացելոցս, եթէ մեծագոյն համօրէն կշիռ երկուց Ա. եւ Բ. չափուցս գտանիցի, յորժամ զմեծագոյնն Ա. ընդ փոքր Բ. բաժանիցէ ոք, եւ զայն ընդ մնացորդն Գ., եւ զայս օրինակ կարգաւ մի ըստ միոջէ, մինչեւ հասանիցէ յայնպիսի մնացորդ, ընդ որ յետին բաժանարարն բաժանիցի հաւաստեաւ, եւ այն մնացորդ է մեծագոյն կշիռն երկուց Ա. եւ Բ. չափուց:

Մեծագոյն կշիռ երկուց 160 եւ 32 թուոցս է 32, քանզի

$$160 : 32 = 5$$

Իսկ 1260 եւ 360 թուոց մեծագոյն համօրէն կշիռ է 180, քանզի

$$\begin{array}{l} 1260 : 360 = 3 \\ \underline{1080} \\ \;\;180 \mid 360 : 180 = 2 \\ \qquad\;\; \underline{360} \\ \qquad\quad\; 0 \end{array}$$

Մ՝եծագոյն համօրէն կշիռ 1470 եւ 990 թուոց է 30, քանզի

$$\begin{array}{l} \underline{1470}:990=1 \\ 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{990}:480=2 \\ 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{480}:30=16 \\ 0 \end{array}$$

Մարթ է եւ համառօտիւք իմն գրով վճարել, զայս օրինակ, յորժամ կամք իցեն զմեծագոյն համօրէն կշիռ 104 եւ 65 թուոց գտանել։

$$\begin{array}{ccccccccc} & \overset{1}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{2}{\frown} & \\ 104 & : & 65 & : & 39 & : & 26 & : & 13 \\ \underline{65} & & \underline{39} & & \underline{26} & & \underline{26} & & \\ 39 & & 26 & & 13 & & 0 & & \end{array}$$

Այսինքն 104:65, եղանէ 39 մնացորդ. 65:39, եղանէ 26 մնացորդ. 39:26, մնացորդն է 13, իսկ 26:13, գտանի ճշգիւ։ Արդ 13 է մեծագոյն համօրէն կշիռ 104 եւ 65 թուոց։

137. Եթէ յետ ըստ այնմ օրինակի բազմիցս բաժանելոյ ժամանիցես ի մնացորդ $=1$, յայնժամ նշանակ է, եթէ չիք Ա. եւ Բ. չափուց համօրէն մեծագոյն կշիռ, վասն որոյ են նախաւոր առ համեմատութեամբ միմեանց։ Որպիսի ինչ եւ 935 եւ 546 թիւք,

$$\begin{array}{l} \underline{935}:546=1 \\ 389 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{546}:389=1 \\ 157 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{389}:157=2 \\ 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{157}:75=2 \\ 7 \end{array}$$

$$75 : 7 = 10$$
$$5$$
$$7 : 5 = 1$$
$$2$$
$$5 : 2 = 2$$
$$1$$

Կամ համառօտիւք եւս ,

$$\begin{array}{ccccccccc} & \overset{4}{\frown} & & \overset{7}{\frown} & & \overset{12}{\frown} & & \overset{1}{\frown} \; \overset{3}{\frown} & \\ 1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : 3 : & 1 \\ 1444 & & 357 & & 48 & & 3 & \;3 & \\ \hline 51 & & 4 & & 3 & & 1 & \;0 & \end{array}$$

138. Մեծագոյն համօրէն կշիռ երից Ա., Բ., Գ. չափուց գտանի զայս օրինակ.

Յառաջագոյն որոնեա զԿ մեծագոյն համօրէն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուց. յորժամ Գ. եւս բաժանիցի յայն, յայտ է եթէ Կ մեծագոյն համօրէն կշիռ իցէ Ա., Բ., Գ. չափուց: Քանզի եթէ փոխանակ այսր կշռոյ հասարակաց դնիցեմք Է > Կ, յայնժամ պարտ իսկ էր եւ Կ չափոյն ընդ Է բաժանել (∸. 135.), որովհետեւ Կ է մեծագոյն համօրէն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուց. որով լինէր փոքու ընդ մեծագոյնն բաժանել, որ է անհնարին ինչ:

Ապա եթէ Գ. ընդ Կ չբաժանիցի, յայնժամ որոնեա զմեծագոյն համօրէն կշիռ Գ. եւ Կ չափուցն, եւ համարեսցուք զինն եթէ իցէ ∸՝ ընդ այն եւ Ա., Բ. չափուց պարտ է բաժանել, իբրեւ ընդ առնելի Կ չափոյն (∸. 104.): Արդ զայս օրինակ ∸ լինիցի մեծագոյն համօրէն կշիռ Ա., Բ. եւ Գ. չափուց: Եւ այս յայտ անտի է, զի եթէ ∸ լինէր մեծագոյն համօրէն կշիռ, յայնժամ եւ Կ չափոյն (քանզի է համօրէն կշիռ Ա. եւ Բ. չափուց), որով եւ ∸ չափոյն, (քանզի համօրէն առնելի է Գ. եւ Կ չափուց), պարտ էր ընդ այն բաժանել. եւ այս ոչ այլ ինչ իցէ, եթէ ոչ ∸ փոքր չափոյն ընդ հ մեծագոյնն բաժանել, որ անպատեհ իմն է։

Այնգունակ 420, 990 եւ 1470 թուոց մեծագոյն համօրէն կշիռ է 30. քանզի 420 եւ 990 թուոց մեծագոյն համօրէն կշիռ է 30. եւ դարձեալ 1470 : 30 = 49, ապա ուրեմն այն իսկ իցէ խնդրեալ կշիռն։

Եթէ որպէս գտանիցի 35 մեծագոյն համօրէն կշիռ 210, 770 եւ 1365 թուոցս, տեսանիցեն ուսանելիքն յառաջիկայ օրինակիս.

$$\begin{array}{l} 770 : 210 = 3 \\ \underline{}140 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 210 : 140 = 1 \\ 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 140 : 70 = 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1365 : 70 = 19 \\ 665 \\ 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 70 : 35 = 2 \\ 0 \end{array}$$

Այն օրինակ գտանի մեծագոյն համօրէն կշիռ չորից եւ բազում թուոց։

139. Ըստ օրինակին, որ ի ∸. 131, ճառեցաւ, մարթ է գտանել զմեծագոյն համօրէն կշիռ նշանագրովք չափուց, որոց կարի դժուարին է յիւրեանց առնելիսն նախաւորս լուծանել։ Զոր օրինակ եթէ կամիցիմք ճանաչել զմեծագոյն համօրէն կշիռ չափուցս $21\text{ք}^2-\text{բ}\text{ք}-10\text{բ}^2$, եւ $63\text{ք}^2-66\text{բ}\text{ք}+15\text{բ}^2$։

$$(63\text{ք}^2-66\text{բ}\text{ք}+15\text{բ}^2) : (21\text{ք}^2-\text{բ}\text{ք}-10\text{բ}^2) = 3$$

$$\begin{array}{l} 63\text{ք}^2-3\text{բ}\text{ք}-30\text{բ}^2 \\ - \quad\;\; + \quad\;\; + \\ \hline \phantom{63\text{ք}^2}-63\text{բ}\text{ք}+45\text{բ}^2=-9\text{բ}(7\text{ք}-5\text{բ}) \end{array}$$

Բաժանեալ ի վերայ միոյ յառնելեաց միացորդին, այս ինքն ընդ $7\text{ք}-5\text{բ}$ զբաժանարարն $21\text{ք}^2-\text{բ}\text{ք}-10\text{բ}^2$, գտցես եթէ $7ք - 5փ$ մեծագոյն կչիռն իցէ զայս օրինակ

$$\begin{array}{l} (21ք^2 - փք - 10փ^2) : (7ք - 5փ) = 3ք + 2փ \\ \;\; 21ք^2 - 15փք \\ - \quad + \\ \hline \qquad\quad 14փք - 10փ^2 \\ \qquad\quad 14փք - 10փ^2 \\ \qquad\quad - \quad + \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Ըստ նմին օրինակի եթէ գչափս $ք^4 + ա^2ք^2 - 6ա^4 = $ Ա. ընդ $ք^3 + 5աք^2 - 2ա^2ք - 10ա^3 = $ Բ բաժանիցէ ոք, գտանէ մնացորդ $28ա^2ք^2 - 56ա^4 = 28ա^2(ք^2 - 2ա^2)$, եւ թէ՝ եւ Ա. եւ Բ ընդ $ք^2 - 2ա^2$ բաժանին ճշգիւ:

Եթէ բաժանիցի $5ա^2 - 2աք + ք^2$ ընդ $ա^2 - 2աք + 5ք^2$, ելանէ մնացորդ $8աք - 24ք^2 = 8ք(ա - 3ք)$: Արդ իբրեւ առաջին բաժանարարն $ա^2 - 2աք + 5ք^2$ ընդ $ա - 3ք$ բաժանիցի, տայէ մնացորդ $8ք^2$. եւ քանզի այսր մնացորդի եւ $ա - 3ք$ բաժանարարին չիք այլ ինչ համօրէն առնելի բաց ի 1 թուոյ, ապա ուրեմն երկու առաջին չափքն նախաւոր թիւք են առ միմեանց համեմատութեամբ:

Յաղագս գտից բաժանելւոյ, որ ընդ բազում թիւս բաժանիցի:

140. Մարթ է ամենայն արդեանց Ա.Բ.Գ.Դ... բաժանել ընդ որ եւ իցէ առնելի իւր Ա., Բ., Գ... յորմէ կազմին: Դարձեալ մարթ է եւ անբաւ թուոց, յորս Ա., Բ., Գ., Դ..., առնելի իցէ, ընդ Ա., Բ., Գ.... բաժանել:

Փոքր թիւն յամենայն թուոց, որ ընդ Ա., Բ., Գ.... կարիցեն բաժանել, գտանի զայս օրինակ:

Զառաջինն քննեա մանր, եւ տես եթէ թիւքս Ա., Բ., Գ., Դ... նախաւոր թիւք իցեն, կամ թէ նախաւորք իցեն արդեւք առ միմեանց համեմատութեամբ, կամ եթէ իցեն նոցա մի կամ երկու կամ բազում առնելիք հասարակաց:

Եթէ իցեն նախաւոր թիւքն, կամ առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւոր, յայնժամ արդիւնք նոցա իցէ միայն փոքր թիւն յայլոց թուոց, որ ընդ նոսա բաժանիցի: Զոր օրինակ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ է փոքր քան զամենայն թիւս, որ ընդ 2, 3, 5, 7 միանգամայն կարիցէ բաժանել: Սոյնգունակ, քանզի 4, 9, 35 նախաւորք են առ միմեանց համեմատութեամբ փոքր թիւն, որ ընդ նոսա բաժանիցի՝ է $1260 = 4 \cdot 9 \cdot 35$:

Ապա եթէ թիւքն չիցեն նախաւոր թիւք կամ նախաւորք առ միմեանց համեմատութեամբ, որպիսի ինչ են 6, 9, 12, 15, 18, 24 կամ լուծեալ յառնելիս իւրեանց, $2 \cdot 3$, 3^2, $2^2 \cdot 3$, $3 \cdot 5$, $2\ 3^2$, $2^3 \cdot 3$, յայնժամ ի բաց հան ի նոցանէ զթիւսն զայնոսիկ, ընդ որս այլքն ի նոցունց իսկ թուոյն բաժանել կարիցեն. վասն որոյ յառաջին օրինակին բարձ ի միջոյ զ6, զ9, եւ զ12, քանզի թիւն որ ընդ 18, եւ ընդ 24 բաժանիցի, ապաքէն եւ ընդ 6, 9, 12 բաժանի: Իսկ յայլոցն զատեալ որոշեա զնախաւորսն զայնոսիկ, որք այլակերպք իցեն ի միմեանց, որպիսի ինչ 2, 3, 5, եւ դրոշմեա ի վերայ նոցա զմեծագոյն կարողութիւնսն, զոր օրինակ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, արդիւնքն նոցա $= 360$ է փոքր թիւն որ ընդ 6, 9, 12, 15, 18 եւ 24 բաժանիցի ճշդիւ:

Զորին զհետ գայ ինքնին, եթէ 64 է փոքր թիւն, որ ընդ 2, 4, 8, 16, 32, 64 բաժանիցի. ըստ նմին օրինակի 243 է փոքր բաժանելի 3, 9, 27, 81, 243 թուոց. սոյնգունակ $\text{ա}^{\text{ն}}$ փոքր թիւն, որ ընդ ա^2, ա^3, $\text{ա}^4 \ldots \text{ա}^{\text{ն}}$ բաժանիցի: Իսկ քանզի

$$
\begin{aligned}
12 &= 2^2 \cdot 3 \\
18 &= 2 \cdot 3^2 \\
30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
70 &= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \text{եւ} \\
105 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot
\end{aligned}
$$

ապա ուրեմն $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ իցէ փոքր թիւն, որ հաւասարեաւ ընդ 12, 18, 30, 70, 105 բաժանիցի:

Նոյնպէս ի ձեռներցս առցուք ի միտ, եթէ $1800ա^4բ^3գ^2դ^5եղ$ փոքր չափն իցէ, որ ընդ $24ա^3բ^2գդ$, $18ա^4բ^3դ^5ե$, $50աբգ^2դ^3$ եւ $30ա^3գդղ$ չափս բաժանիցի: Գործեալ որովհետեւ

$$21ա^2բ(գ^2-դ^2)=3\cdot7\cdot ա^2բ(գ+դ)(գ-դ),$$
$$14աբ^2(գ+դ)=2\cdot7\cdot աբ^2(գ+դ) \text{ եւ}$$
$$150աբգ(գ-դ)=2\cdot3\cdot5^2\cdot աբգ(գ-դ).$$

զհետ գայ եթէ փոքր բաժանելին է $=$
$2\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot ա^2բ^2գ(գ+դ)(գ-դ)=1050ա^2բ^2գ(գ^2-դ^2)$:

141. Փոքր թիւն, որ ընդ բազում թիւս բաժանել կարիցէ, գտանի եւ այլով իմն օրինակաւ, առանց ինչ յառնելոյն լուծանելոյ:

Համարեսցուք եթէ Ա եւ Բ իցեն թիւք, որոց զփոքր համօրէն բաժանելին որոնեմք. մ մեծագոյն համօրէն կշիռ իցէ երկոցունցն, ուստի եւ Ա $=$ մա, Բ $=$ մբ, յորում ա եւ բ նախաւոր թիւք են առ միմեանս համեմատութեամբ: Արդ խոկ յայտ է, եթէ մաբ իցէ փոքր թիւն, որ ընդ Ա եւ Բ բաժանիցի: Քանզի ա $=$ Ա, եւ բ $=$ Բ : մ, զորոյ զհետ գայ եթէ մաբ $=$ Ա $\times$ Բ : մ: Արդ փոքր բաժանելին երկուց Ա եւ Բ թուոց գտանիցի, եթէ որոնեալ զմեծագոյն համօրէն կշիռն նոցա, ընդ այն զմին բաժանեսցես յԱ եւ Բ թուոց, եւ քանորդին բազմապատկեսցես զմեւսն, արդիւնքն իցէ փոքր թիւն, որ ընդ Ա եւ Բ բաժանիցին: Զոր օրինակ 180 է մեծագոյն համօրէն կշիռ 1260 եւ 360 թուոց, եւ $360:180=2$, ապա $2\times1260=2520$ է փոքր թիւն որ ընդ 1260 եւ 360 բաժանիցի:

142. Համարեսցուք եթէ Կ իցէ փոքր թիւն որ ընդ Ա եւ Բ բաժանիցի, եւ Ա $=$ մա, եւ Բ $=$ մբ ըստ առաջնոյ 141 համարոյ իցեն. ուրեմն եւ Կ $=$ մաբ: Արդ ամենայն թիւ Ն, որ ընդ Ա եւ Բ բաժանիցի, ունի օրինակ հասարակաց մաբղ, յորում ղ մարթ է զամենայն առնել նշանակել: Արդ որովհետեւ Ն $=$ մաբղ կամ Ն $=$ Կղ, եւ Կ $=$ մաբ, զառին

գհեա զայս եթէ ամենայն թիւ Ն որ ընդ Ա. եւ ընդ Բ. բաժանիցի, բաժանի եւ ընդ փոքր բաժանելին նոցա: Օրինակ 360 բաժանի ընդ 15 եւ ընդ 18, ապա եւ ընդ 90, որ բաժանի ընդ 15 եւ ընդ 18:

143. Արդ է եւ զփոքր թիւն որ ընդ երիս նշանակս Ա., Բ., Գ. բաժանիցի՝ գտանել, յորժամ զառաջինն զերկուց Ա. եւ Բ. առաջնոյն խնդրեցէ ոք (∸. 140), որ է Կ: Արդ եթէ Կ ընդ Գ. բաժանիցի, այն է փոքր թիւն զոր որոնեա, քանզի եթէ այլ ինչ թիւ Է<Կ ընդ Ա., Բ., Գ. բաժանէր, յայնժամ պարտ իսկ էր (∸. 142.) Է չափոյն եւ ընդ Կ բաժանել, այս ինքն փոքու ընդ մեծագոյնն:

Ապա եթէ Կ չբաժանիցի ընդ Գ., յայնժամ որոնել պարտ է զփոքր թիւն ∸, որ ընդ Կ եւ ընդ Գ. բաժանիցի. զի եթէ ∸ ընդ Կ եւ ընդ Գ. բաժանիցի, ապա առանց երկմտութեան եւ ընդ Ա., Բ. եւ Գ. բաժանիցի, եւ լինիցի թիւն զոր խնդրեմս: Եւ այս յայտ անտի է զի եթէ ընդ Ա., Բ., Գ., բաժանելի թիւն Ֆ<∸ լինէր, յայնժամ պարտ էր այսմ թուոյ ընդ Կ եւ ընդ ∸ բաժանել, որ է անպատեհ, եւ հակառակ Ֆ<∸ զոր համարեցաք:

Օրինակ փոքր թիւն, որ ընդ 15, 18 եւ 24 բաժանիցի, գտանել: Մեծագոյն համօրէն չափ թըւոցս 15 եւ 18 է 3, արդ

$$15:3=5 \text{ եւ } 18\cdot5=90$$

ապա ուրեմն 90 է փոքր բաժանելի թիւն 15 եւ 18 չափուց: Մեծագոյն համօրէն կշիռ 90 եւ 24 թուոց է 6 եւ

$$90:6\times24=15\times24=360,$$

որ է փոքր թիւն որ ընդ 15, 18 եւ 24 թիւս բաժանիցի:

ԳԼՈՒԽ Բ.

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄԱՐԵԼՈՑ ԶՉԱՓՍ ԿՈՏՈՐԵԱԼՍ

ՀԱՏՈՒԾ Ա.

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄՕՐԷՆ ԿՈՏՈՐՈՑ

144. Յորժամ *զմի միութիւն ի բազում մասունս բաժանեալս ածիցեմք զմտաւ, մի մի մասն անուանեալ կոչի Մասն կոտորեալ կամ Կոտոր, որպիսի ինչ կէսն է, երրորդ մասն, չորրորդ մասն, հինգերորդ մասն, եւ այլ եւս նոյնպիսիք, որ ի բաժանելոյ անտի միութեանն ծագիցեն: Ըստ նմին օրինակի կէս մի, երկու երրորդք, երեք չորրորդք, եւթն հինգերորդք, այլովքն հանդերձ, քանզի կէս մի զկէս միութեանն յայտ առնէ, իսկ երկու երրորդք՝ զերկուց երրորդ մասանց. Նոյնպէս եւ այլքն: Յասացելոցս աստի մարթ է ի միտ առնուլ. եթէ երկու թիւք են, յորոց կոտորն կազմիցի, մին յայտ առնէ, եթէ ի քանի ինչ մասունս հաւասարաչափս մի միութիւնն բաժանեալ իցէ, որ եւ անուանի Անուանիչ, իսկ միւսն ցուցանէ, եթէ որչափ ինչ հաւասար մասունք առեալ իցեն ի մասանցն կոտորելոյ, եւ ասի Համարիչ: Անուանիչն գրի ի ներքոյ համարչին. որոց ի միջոցին ձգի գիծ հարթ, զոր օրինակ* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{6}$:

145. Եթէ *մի միութիւն յողջոյն ինչ թիւ բաժանիցի, զոր օրինակ ի* 5, *յայնժամ քաներորդն* $=\frac{1}{5}$, *քանզի յորժամ* 5*իցս առնուցումք զայս մասն կոտորեալ, կամ այսուիկ մասամբ բազմացուցանիցեմք զբաժանարարն* 5 *ծագէ միութիւնն կամ բաժանելին: Ըստ հասարակաց օրինակաւ* $1:ս=\frac{1}{ս}$, *քանզի* $\frac{1}{ս}\times ս=1$. *զորմէ տեսցուք ի* Հ. 168:

Եւ քանզի $2=1+1$, ապա ուրեմն եւ $2:մ=1:մ+1:մ=\frac{1}{մ}+\frac{1}{մ}=\frac{2}{մ}$. նոյնպէս որովհետեւ $3=1+1+1$, գտեա զայ եթէ $3:մ=1:մ+1:մ+1:մ=\frac{3}{մ}$: Արդ որովհետեւ զոր զ2 եւ զ3 թուոց ասացաք, մարթ է եւ զամենայն ն թուոց ածել զմտաւ, վասն որոյ համօրէն օրինակաւ $ն:մ=\frac{ն}{մ}$, այս ինքն Ամենայն կոտոր ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ քանորդ՝ որ անդստին ի բաժանելոյ համարչին ընդ անուանիչն ելանիցէ:

146. Աստի իսկ կարիցես ինքնին իմանալ եթէ զիարդ ի դէպս ինչ որ ընդ առաջ ելանիցեն, յորժամ բաժանարարն ի բաժանելին հաւասարեաւ ոչ գտանիցի, պարտ իցէ զքանորդն գրոշմել: Որպիսի ինչ,

$$5:7=\frac{5}{7},\ 3աբ:5գդ=\frac{3աբ}{5գդ},\ 2ա:(2ա-բ)=\frac{2ա}{2ա-բ}$$

$$(2ա+3բ):7աբ=\frac{2ա+3բ}{7աբ},\ (5ա-2բ):(5ա+2բ)=\frac{5ա-2բ}{5ա+2բ}$$

147. Յերկուս բաժանին կոտորքն, ի Բունս եւ յԱնբունս: Բուն կոտոր այն է, որոյ համարիչն փոքր իցէ քան զանուանիչն, եւ որ նուազագոյն քան զ1 նշանակիցէ, որպէս $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. եւ այլ եւս նոյնպիսիք: Ի սոյն կարգի հաշուին եւ համօրէն կոտորքս $\frac{ա}{բ}$, $\frac{2ա-բ}{գ}$, $\frac{7ա+բ}{5ա-դ}$, որոց չէ մարթ վասն անյայտ լինելոյ զօրութեան նշանագրացն ի վերայ հասանել, եթէ փոքր իցէ քան զ1 զօրութիւն նոցա:

Անբունք ասին, որոց համարիչքն մեծագոյն քան զիւրեանց անուանիչսն իցեն, ոյք եւ յերկուս կերպարանս զատանին: Առաջին՝ ի կոտորս անբունս, որոց համարիչն հաւասար իցէ անուանչին, կամ բազմապատիկն անուանչին, որ եւ ողջոյն թիւս յայտ առնեն, զոր՝ իբրեւ զհամարիչն ընդ անուանիչն բաժանիցեմք, գտանեմք: Օր օրինակ

$$\frac{հ}{հ}=1,\ \frac{7}{7}=1,\ \frac{2աբ}{2աբ}=1,\ \frac{ա+3բ}{ա+3բ}=1 \text{ կամ } \frac{հա}{հ}=ա,$$
$$\frac{35}{7}=5,\ \frac{4աբ}{2ա}=2բ,\ \frac{3(ա^2-դ^2)}{ա+դ}=3(ա-դ):$$

Երկրորդ անգամ, ի կոտորս անբուժս, որոց համարիչն մեծագոյն քան զանուանիչն իցէ, եւ ընդ այն ճշդիւ ոչ բաժանիցի. որպէս $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$: Այսպիսի կոտորոց դրոշմն հասարակաց օրինակաւ այսպէս $\frac{հա+բ}{հ}$, յորում $հ$ եւ $բ$ նախաւոր թիւք են առ միմեանց համեմատութեամբ, եւ $բ<հ$: Արդ՝ եթէ բաժանիցեմք զհամարիչն կոտորոյս ընդ անուանիչն, քանորդն լինիցի ողջոյն ինչ թիւ, հանդերձ բուն կոտորով, քանզի

$$\frac{հա+բ}{հ}=(հա+բ):հ=ա+(բ:հ)=ա+\frac{բ}{հ}.$$ Նոյնպէս

$$\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}:$$

148. Արդ՝ յորժամ յետ բաժանման թուոց կամ չափուց նշանագրաց, յաւելուցու մնացորդ, պարտ է ի քանորդն յաւելուլ զմնացորդն ըստ նմանութեան կոտորոց, զմնացորդն եդեալ ի վերայ գծին, եւ զբաժանարարն ի ներքոյ, որպէս վերագոյն (Հ. 32. Բ.) տեսաք:

$$327:13=25\tfrac{2}{13}$$

$$դ^3:(դ+բ)=դ^2-բդ+բ^2-\frac{բ^3}{դ+բ}$$

$$(10դ^2-բդ-20բ^2):(2դ-3բ)=5դ+7բ+\frac{բ^2}{2դ-3բ}:$$

149. Առ կարող լինելոյ հասանել ի վերայ զօրութեան բուն կոտորոց թուոց, պարտ եւ պատշաճ է յառաջագոյն գիտել եթէ միութիւնն զոր անուանիչն ցուցանիցէ, քանի՞ ինչ միութիւնս բովանդակիցէ յայնմանէ, որ փոքր իցէ քան զեւր ազգն: Արդ իբրեւ լինիցիս տեղեակ, բազմացո միութեամբքն այնուքիւք զհամարիչ կոտորոյն ; եւ զարդիւնսն բաժանեա ընդ անուանիչն, քաներորդն է զօրութիւն կոտորոյն, այսինքն չափ միութեան փոքրագոյն ազգի: Զոր օրինակ,

$$\frac{11}{24}\text{ գաւ. գերմ} = \frac{11\cdot 60}{24}\text{ նուք.} = \frac{660}{24} = 27\,\frac{12}{24}\text{ նուք.}$$

$$= 27\text{ նուք.} + \frac{12}{24}\text{ նուք.} = 27\text{ նուք.} + \frac{12\cdot 4}{24}\text{ լումայք}$$

$$= 27\text{ նուք.} + \frac{48}{24}\text{ լում.} = 27\text{ նուք. եւ } 2\text{ լումայք:}$$

$$\frac{23}{96}\text{ ձող} = \frac{23\cdot 6}{96}\text{ ոտք} = \frac{138}{96}\text{ ոտք} = 1\,\frac{42}{96}\text{ ոտն} =$$

$$1^{\text{Ո}} + \frac{42\cdot 12^{\text{ռ}}}{96} = 1^{\text{Ո}} + \frac{504^{\text{ռ}}}{96} = 1^{\text{Ո}} + 5^{\text{ռ}}\,\frac{24}{96}\text{ մատ.} =$$

$$1^{\text{Ո}} + 5^{\text{ռ}} + \frac{24\cdot 12^{\text{դ}}}{96} = 1^{\text{Ո}} + 5^{\text{ռ}} + 3^{\text{դ}}:$$

$$\frac{31}{64}\text{ լիտր} = \frac{31\cdot 32}{64}\text{ կէս ուն.} = 15\,\frac{32}{64}\text{ կ. ուն}$$

$$= 15\text{ կ. ուն} + \frac{32\cdot 4}{64}\text{ դրամ} = 15\text{ կ. ուն} + 2\text{ դր.}$$

$$\frac{2}{240}\text{ ժամ} = \frac{2\cdot 60}{240}\text{ վայրկ.}$$

$$= \frac{120\cdot 60}{240}\text{ երկր. վայր.} = 30\text{ երկ. վայրկ:}$$

150. Յորժամ զողջոյն թիւ ինչ ի կոտոր ինչ շրջել կամիցի ոք, եւ դնել անուանիչ, ըստ կամաց իւրոց, պարտ է զողջոյն թիւն այնու անուանչաւ բազ-

մացուցանել. եւ զարդիւնսն դնել փոխանակ համարչի. եւ զանուանիչն զայն դնել ընդ գծիւն: Զոր օրինակ,

$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$, այլովքն հանդերձ. կամ

$3աբ = \frac{3աբգ}{գ} = \frac{15աբ^2}{5բ} = \frac{21աբ(ա+գ)}{7(ա+գ)}$, նոյնօրինակ եւ

$$ա + բ = \frac{(ա+բ)(ա-բ)}{ա-բ} = \frac{ա^2-բ^2}{ա-բ}$$

Այնգունակ եւ զամենայն թիւ կարիցէ ոք կոտորս համարել. որոյ անուանիչ իցէ $= 1$. Զոր օրինակ

$$4 = \frac{4}{1},\ եւ\ ա = \frac{ա}{1},\ նոյնպէս\ մ+ն = \frac{մ+ն}{1}:$$

Նոյնգունակ եւ զամենայն թիւս նշանակիչս մարթեմք ի կոտոր շրջել, յորժամ զմի միութիւն մեծագոյն ազգին, ի միութիւնս փոքր ազգին շրջեսցեմք, եւ զայն փոխանակ անուանչի դրոշմեսցեմք ընդ նովին նշանակիչ թուով: Զոր օրինակ,

5 նուաքարակիտ Տաճկաց $= \frac{5}{40}$ դահ. Տաճկաց,

25 նուաք. դերմ. $= \frac{25}{60}$ դահ. դերմ:

11 կէս ունկի $= \frac{11}{32}$ լիտր:

151. Մարթեմք եւ զողջոյն թիւ, որ առընթեր բուն ինչ կոտորոյ կայցէ, յանբուն կոտոր շրջել, յորժամ զողջոյն թիւն անուանչաւ կոտորոյն բազմացուցանիցեմք, եւ զարդիւնսն յաւելուցումք ի համարիչ բուն կոտորոյն: Զոր օրինակ,

$$ա + \frac{բ}{մ} = \frac{ամ+բ}{մ},\ 11\frac{3}{5} = \frac{58}{5}$$

8 դահ. Տաճ. $+$ 20 նուաք. $=$ 8 դահ. $+ \frac{20}{40}$ դահ.

$= 8\frac{20}{40}$ դահ. $= \frac{340}{40}$ դահ. Տաճ:

152. Յորժամ առաւելուցուս զհամարիչ կոտորոյ իրիք, առանց ինչ զանուանիչն փոփոխելոյ, առաւելու զօրութիւն կոտորոյն, ապա եթէ նուազեցուցանիցես զհամարիչն, նուազի եւ կոտորն: Զորոյ զհետ գայ, եթէ 2, 3, 4...նիցս առաւելու կոտորն, յորժամ 2, 3, 4...նիցս համարիչն բազմացուցանիցի. բանդին նմանութեան իբրեւ 2, 3, 4...նիցս նուազիցի համարիչն, 2, 3, 4...նիցս նուազի եւ կոտորն: Նոյն պատճառ սորին է. Քանզի (Տ. 144.) համարիչն զչափ մասանցն առելոց ցուցանէ, իբրեւ իւիք թըւով բազմանայցէ, յայտ է եթէ այնուհետեւ բազում մասունս առեալս ցուցանիցէ, ապա եթէ նուազիցի, նուազին եւ առեալ մասունքն: Վասն որոյ,

$$\frac{8}{9} > \frac{7}{9}, \frac{29}{4} < \frac{35}{4}, \frac{3}{4} < \frac{6}{4} < \frac{12}{4}$$

153. Այնգունակ եթէ առանց ինչ զհամարիչ կոտորոյն փոփոխելոյ, զանուանիչն նուազեցուցանիցես, առաւելու զօրութիւն կոտորոյն, ապա եթէ առաւելուցուս, նուազի եւ կոտորն: Զորոյ զհետ գայ, եթէ 2, 3, 4... նիցս առաւելու եւ բազմանայ զօրութիւն կոտորոյն, իբրեւ բաժանիցես ընդ 2, 3, 4...ն զանուանիչ կոտորոյն, առանց ինչ զհամարիչն փոփոխելոյ: Նոյն իբրեւ 2, 3, 4...նիցս բազմանայցէ անուանիչն, նուազի 2, 3, 4, ...նիցս եւ կոտորն: Քանզի որովհետեւ անուանիչն իւրով միութեամբք զհաւասարաչափ մասունս միոյ միութեան յայտ առնէ, վասն որոյ իբրեւ բազմացուցանիցի անուանիչն, թէպէտեւ բազմանայցեն մասունք միութեանն, սակայն յայտ է եթէ մանունք լինիցին, վասն որոյ եւ մանունք իցեն առեալ մասունքն: Զայն կարիցես իմանալ եւ զնորին հակառակէն: Վասն որոյ,

$$\frac{4}{7} > \frac{4}{8} > \frac{4}{9} > \frac{4}{30} < \frac{4}{2}, \frac{3}{12} < \frac{3}{6} < \frac{3}{3},$$

154. Չփոփոխի զօրութիւն կոտորոց, յորժամ եւ համարիչն եւ անուանիչն նոյն չափով բազմացուցանիցին կամ ի վերայ նորին չափոյ բաժանիցին։

$\frac{\text{ա}}{\text{բ}} = \frac{\text{ագ}}{\text{բգ}}$, նոյնպէս $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{9}{12}$. ընդ հակառակս $\frac{25}{10} = \frac{25:5}{10:5} = \frac{5}{2}$. Ճշմարտութիւն առաջելոցս ի 152 եւ 153 համարոց յայտ է։

155. Զամենայն կոտորս, որոց եւ համարիչքն եւ անուանիչքն համօրէն կշիռք կամ առնելիք իցեն, մարթ է առանց ինչ զօրութեանն փոփոխելոյ համառօտիւք գրոշմել, յորժամ զհամարիչն եւ զանուանիչն ի վերայ նորին իսկ մեծագոյն համօրէն բաժանարարին բաժանիցեմք։ Այս եթէ նախաւոր թիւք իցեն եւ համարիչն եւ անուանիչն, կամ առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւորք, չկարէ ոք այնուհետեւ կարճ ի կարճոյ գրոշմել։ Զոր օրինակ,

$$\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{105}{210} = \frac{105:5}{210:5} = \frac{21}{42} = \frac{21:3}{42:3} = \frac{7}{14} = \frac{7:7}{14:7} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{30\text{ա}^4\text{բ}^2}{60\text{ա}^2\text{բ}^3\text{գ}} = \frac{30\text{ա}^4\text{բ}^2 : 30\text{ա}^2\text{բ}^2}{60\text{ա}^2\text{բ}^3\text{գ} : 30\text{ա}^2\text{բ}^2} = \frac{\text{ա}^2}{2\text{բգ}}$$

$$\frac{\text{ա}^2 - \text{գ}^2}{3\text{ա} - 3\text{գ}} = \frac{(\text{ա}+\text{գ})(\text{ա}-\text{գ})}{3(\text{ա}-\text{գ})} = \frac{\text{ա}+\text{գ}}{3},$$

$$\frac{5(\text{ա}-\text{բ})}{10(\text{ա}^2-\text{բ}^2)} = \frac{1}{2(\text{ա}+\text{բ})}$$

$$\frac{2\text{ա}^2 - 5\text{աբ} + 3\text{բ}^2}{2\text{ա}^2 - \text{աբ} - 3\text{բ}^2} = \frac{\text{ա}-\text{բ}}{\text{ա}+\text{բ}}\,։$$

156. Որովհետեւ $\text{ԳՐ} : \text{ՏՐ} = \frac{\text{ԳՐ}}{\text{ՏՐ}} = \frac{\text{Գ}}{\text{Տ}}$, (÷· 155·)

ապա ուրեմն ամենայն քանորդ կոտորեալ համառօտիւք գրոշմի, յորժամ զհամօրէն առնելիսն, որ հաւասարաչափ ի բաժանելին եւ ի բաժանարարն կայցեն, եղծանիցէ ոք, եւ զմնացեալ առնելին ըստ օրինակի չափուց կոտորելոց դրոշմիցէ, զոր օրինակ

$$27ա^3բ^2գ : 9ա^2բ^2գ^2 = \frac{3ա}{գ},\ 20ա^մբ^3գ^5 : 25ա^2բ^նգ^3 = \frac{4ա^{մ-2}գ^2}{5բ^{ն-3}}$$

$$14ա(ա^2 - դ^2) : 21(ա - դ)^2դ = \frac{2ա(ա + դ)}{3(ա - դ)դ}$$

157. Արդ է զկոտոր ինչ $\frac{ա}{բ}$ յայլ կոտոր շրջել, այս ինչ կամ այն ինչ ռ անուանչաւ, որ բազմապատիկն իցէ բ չափոյ: Բաժանեա զնոր անուանիչն ռ ընդ առաջինն բ, եւ քանորդաւն բազմացո զհամարիչն ա, եւ զարդիւնսն դրոշմեա փոխանակ համարչին, ընդ որում գրեա զնոր ռ անուանիչն: Արդ համարեսցուք եթէ կամք իցեն մեզ, զանուանիչն $\frac{ա}{բ}$ կոտորոյն շրջել, եւ զնել ռ, եւ $ռ : բ = ա'$, ուստի եւ $ռ = բա'$: Յայտ է եթէ անուանիչն բ բազմացաւ $ա'$ չափով, արդ զի մի փոփոխիցի զօրութիւն կոտորոյն (֊. 154.), պարտ է եւ զհամարիչն բազմացուցանել զայս օրինակ $\frac{աա'}{բա'}$, եւ քանզի $բա' = ռ$, ապա ուրեմն $\frac{աա'}{բա'} = \frac{աա'}{ռ}$: Այնդունակ եւ

$$\frac{86}{125} = \frac{688}{1000},\ \text{քանզի}\ 86 \cdot 1000 : 125 = 688 \cdot$$

$$\frac{5}{6} = \frac{26\frac{2}{3}}{32}\ \text{քանզի}\ (32 : 6) \times 5 = 26\tfrac{2}{3}$$

158. Նոյնպէս իբրեւ զկոտոր ինչ յայլ կոտոր շրջել կամիցի ոք, զինչ եւ իցէ համարչաւ, պարտ է զնոր համարիչն անուանչաւ կոտորոյ բազմացուցանել, եւ զարդիւնսն բաժանել ի վերայ հին համարչին, որոյ քանորդն իցէ անուանիչն նորոյ համարչի, զոր օրինակ զկոտորս $\frac{3}{4}$, մարթեմք յայլ կոտոր շրջել, որոյ հա-

մարիչ իցէ 12: Արդ անուանիչ նոր կոտորոյն է $=$ $\frac{12\cdot 4}{3}=16$, ապա $\frac{12}{16}$:

159. Նոյնն օրինակաւ եւ զբազում $\frac{\text{ա}}{\text{բ}}, \frac{\text{գ}}{\text{դ}}, \frac{\text{ե}}{\text{զ}}, \frac{\text{է}}{\text{ը}}\ldots$ կոտորոց անուանիչս կարեմք առանց ինչ զօրութեանն փոփոխելոյ ի մի համօրէն անուանիչ շրջել: Յառաջագոյն որոնեա զփոքր Ն բաժանելին, որ ընդ ամենայն անուանիչս հաւասարաւ բաժանիցի: Համարեսցուք

$$\begin{array}{lll} \text{Ն}:\text{բ}=\text{պ}, & \text{ուստի եւ} & \text{Ն}=\text{պբ} \\ \text{Ն}:\text{դ}=\text{պ}', & ,, & \text{Ն}=\text{պ}'\text{դ} \\ \text{Ն}:\text{զ}=\text{պ}'', & ,, & \text{Ն}=\text{պ}''\text{զ} \\ \text{Ն}:\text{ը}=\text{պ}''', & ,, & \text{Ն}=\text{պ}'''\text{ը} \end{array}$$

Արդ իբրեւ զհամարիչ եւ զանուանիչ կոտորոյն յառաջագոյն տացելոց բազմացուցանիցես քանորդիւքն պ, պ′, պ″, պ‴, որ անդստին ի բաժանելոյ անտի համօրէն Ն բաժանելոյն ծագեցան, ելանիցէ

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}}=\frac{\text{ապ}}{\text{բպ}}=\frac{\text{ապ}}{\text{Ն}}$$
$$\frac{\text{գ}}{\text{դ}}=\frac{\text{գպ}'}{\text{դպ}'}=\frac{\text{գպ}'}{\text{Ն}}$$
$$\frac{\text{ե}}{\text{զ}}=\frac{\text{եպ}''}{\text{զպ}''}=\frac{\text{եպ}''}{\text{Ն}}$$
$$\frac{\text{է}}{\text{ը}}=\frac{\text{էպ}'''}{\text{ըպ}'''}=\frac{\text{էպ}'''}{\text{Ն}}$$

Կոտորքս, որոց համօրէն անուանիչ է Ն, հաւասարք են առաջնոց կոտորոցն: Ապա ուրեմն պարտ է զփոքր թիւն, որ ընդ ամենայն անուանիչս բաժանիցի, փոխանակ համօրէն անուանչի դնել, յետ այնորիկ բաժանել զայն ընդ անուանիչս առաջնոց կոտորոցն, եւ քանորդիւքն բազմացուցանել զհամարիչս նոցա, եւ զարդիւնսն իւրաքանչիւր ուրոյն ուրոյն դնել փոխանակ համարչի: Զոր օրինակ,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7} = \text{են կոտորքս } \frac{105,\ 140,\ 126,\ 150}{210}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8} = \quad '' \quad \frac{4,\ 6,\ 5}{8}$$

$$\frac{3}{14}, \frac{4}{2} = \quad '' \quad \frac{3}{14}, \frac{28}{14}$$

$$\frac{5}{6}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15} = \quad '' \quad \frac{25}{30}, \frac{9}{30}, \frac{8}{30}$$

$$\frac{1}{2աբ}, \frac{գ}{3աա}, \frac{դ}{4բբ} = \frac{6աբ,\ 4բ^2գ,\ 3ա^2դ}{12ա^2բ^2}$$

$$\frac{3գ}{8ա^մբ^2}, \frac{5դ}{12ա^3բ^ն} = \frac{9բ^{ն-2}գ,\ 10ա^{մ-3}դ}{24ա^մբ^ն}$$

$$\frac{1}{1+ք}, \frac{1}{1-ք} = \frac{1-ք}{1-ք^2}, \frac{1+ք}{1-ք^2}$$

$$\frac{ա}{(ա+բ)^2}, \frac{բ}{ա^2-բ^2} = \frac{ա(ա-բ)}{(ա+բ)^2(ա-բ)}, \frac{բ(ա+բ)}{(ա+բ)^2(ա-բ)}:$$

160. *Ըստ նմին նմանութեան եւ համարիչք բազում կոտորոց փոփոխին ի մի համօրէն համարիչ, յորժամ փոխանակ համարչի դիցես զփոքր թիւն որ ընդ ամենայն համարիչս առաջին կոտորոց բաժանիցի, եւ յետ զայն ընդ ամենայն համարիչսն բաժանելոյ զմի մի անուանիչ կոտորոյն ուրոյն ուրոյն քանեբարդաւ համարչին իւրոյ բազմացուցանիցես, եւ զարդիւնան իւրաքանչիւր ի ներքոյ համօրէն համարչին դրոշմիցես: Զոր օրինակ,*

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7} = \frac{30}{60}, \frac{30}{45}, \frac{30}{50}, \frac{30}{42}$$

161. *Կոտորքն որոց —նշան իցէ, որպէս* $-\frac{ա}{բ}$, *յայտ արարեալ ցուցանեն, եթէ յառաջագոյն կամ անուանիչին եւ կամ համարչին էր —նշան.* $\frac{+ա}{-բ}$ *կամ* $\frac{-ա}{+բ}$:
Քանզի ոչ այլ ինչ է կոտորն, եթէ ոչ բաժանումն,

որոյ քանորդ իցէ նոյն կոտորն։ Արդ ուրացական լինիցի քանորդն, յորժամ կամ բաժանելին, եւ կամ բաժանարարն նշան ուրացական ունիցին։ Զա-րին զհետ գայ եթէ չփոփոխի զօրութիւն կոտորոյն, յորժամ նշանքն փոփոխիցին եւ անուանչին եւ համարչին միանգամայն. եւ այս լինիցի, յորժամ զերկոսինն եւս — 1 *թուով բազմացուցանիցես։ Զոր օրինակ,*

$$\frac{-ա}{բ-գ}=\frac{-1\times -ա}{-1\times(բ-գ)}=\frac{ա}{-բ+գ}=\frac{ա}{գ-բ}$$

$$\frac{-(բ-ա)}{գ-դ}=\frac{ա-բ}{գ-դ}=\frac{-ա+բ}{-գ+դ}=\frac{բ-ա}{դ-գ}$$

$$\frac{-(բ-ա-գ)}{դ-ե-զ}=\frac{ա-բ+գ}{դ-ե-զ}=\frac{բ-ա-գ}{ե+զ-դ}$$

162. *Յորժամ ի համարիչն եւ յանուանիչն թիւս հաւասարս յաւելուցուս, փոփոխի կոտորն. աճէ զօրութիւնն, եթէ բուն իցէ կոտորն, եւ նուազէ, եթէ անբուն կոտոր իցէ։ Զոր օրինակ* $\frac{ա}{բ}<\frac{ա+գ}{բ+գ}$, *եթէ* $ա<բ$, *իսկ* $\frac{ա}{բ}>\frac{ա+գ}{բ+գ}$, *եթէ* $ա>բ$։ *Քանզի իբրեւ շրջեցեմք զերկոսին եւս ի կոտորս՝ որոց անուանիչքն նման իցեն միմեանց,* $\frac{ա}{բ}=\frac{աբ+ագ}{բ(բ+գ)}$ *իսկ* $\frac{ա+գ}{բ+գ}=\frac{աբ+բգ}{բ(բ+գ)}$. *արդ* $ագ<բգ$ *լինիցի ըստ մերոյ* $ա<բ$ *համարելոյ եւ* $ագ>բգ$ *լինիցի ըստ* $ա>բ$ *համարելոյ։ Զոր օրինակ,*

$$\frac{1}{2}<\frac{1+3}{2+3}=\frac{4}{5},\ \frac{3}{2}>\frac{3+4}{2+4}=\frac{7}{6}.$$

Նոյն օրինակ յորժամ թիւս հաւասարս իբրաց հանիցեմք ի համարչէն եւ յանուանչէն, փոփոխի կոտորն, այս ինքն $\frac{ա}{բ}>\frac{ա-գ}{բ-գ}$, *եթէ* $ա<բ$, *իսկ* $\frac{ա}{բ}<\frac{ա-գ}{բ-գ}$, *եթէ* $ա>բ$։ *Զոր օրինակ,*

$$\frac{8}{10} > \frac{8-4}{10-4} = \frac{4}{6}\text{, իսկ } \frac{12}{9} < \frac{12-6}{9-6} = \frac{6}{3}\text{ :}$$

Ժ Ա Տ Ա Ն Ի

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՒԵԼԼՈՅ ԵՒ ՀԱՆԵԼՈՅ ԶԿՈՏՈՐՍ

163. **Յորժամ** *միմեանց նմանք իցեն անուանիչք կոտորոցն, ժողովեա միահամուռ զհամարիչսն, եւ զհամօրէն անուանիչն դրոշմեա ընդ բովանդակութեամբ համարչացն: Զոր օրինակ,*

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=\frac{17}{7}=2\,\frac{3}{7}$$

$$\frac{ա}{ս}+\frac{2բ}{ս}+\frac{ա-3բ}{ս}=\frac{ա+2բ+ա-3բ}{ս}=\frac{2ա-բ}{ս}$$

$$\frac{2ա^2}{5բ}-\frac{3ա^2}{5բ}+\frac{ք^2}{5բ}=\frac{ք^2-ա^2}{5բ}$$

$$\frac{5ք}{1+ք}+\frac{3-2ք}{1+ք}=\frac{3+3ք}{1+ք}=\frac{3(1+ք)}{1+ք}=3$$

164. **Ապա** *եթէ անուանիչք կոտորոցն չիցեն նման եւ հաւասարք միմեանց, շրջեա ի մի համօրէն անուանիչ, եւ յետ այնորիկ յաւել ի միմեանս: Զոր օրինակ,*

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{70+84+90}{105}=\frac{244}{105}=2\,\frac{34}{105}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{25+9+8}{30}=\frac{42}{30}=1\,\frac{2}{5}$$

$$\frac{ա}{բ}+\frac{գ}{դ}=\frac{ադ+բգ}{բդ},$$

$$\frac{2գ}{3աբ}+\frac{1}{2}+\frac{5ա}{4բ}=\frac{8գ+6աբ+15ա^2}{12աբ}$$

$$\frac{3ա}{5բ^2գ}+\frac{2բ}{9ագ^2}+\frac{7գ}{15ա^2բ}=\frac{27ա^3գ+10աբ^3+21բգ^3}{45ա^2բ^2գ^2}$$

$$\frac{1}{1+ք}+\frac{1}{1-ք}=\frac{1-ք+1+ք}{(1+ք)(1-ք)}=\frac{2}{1-ք^2}$$

Ըստ այնմ օրինակի լինի եւ հանումն կոտորոց։ Պարտ է յառաջագոյն զանուանիչսն ի մի համօրէն անուանիչ շրջել, եւ ընդ այլակերպութեամբ համարչացն զհամօրէն անուանիչն դրոշմել։

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=\frac{14-15}{21}=\frac{-1}{21}$$

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}}-\frac{2\text{ա}}{3\text{բ}}=\frac{3\text{ա}-2\text{ա}}{3\text{բ}}=\frac{\text{ա}}{3\text{բ}},\quad \frac{\text{ա}}{\text{բ}}-\left(\frac{\text{գ}}{\text{դ}}-\frac{\text{ե}}{\text{զ}}\right)=$$

$$\frac{\text{ա}}{\text{բ}}-\frac{\text{գ}}{\text{դ}}+\frac{\text{ե}}{\text{զ}}=\frac{\text{ադզ}-\text{բգզ}+\text{բդե}}{\text{բդզ}}$$

$$\frac{3\text{ա}}{3\text{ա}-2\text{բ}}-\frac{2\text{ա}}{2\text{ա}+3\text{բ}}=\frac{6\text{ա}^2+9\text{աբ}-6\text{ա}^2+4\text{աբ}}{(3\text{ա}-2\text{բ})(2\text{ա}+3\text{բ})}=$$

$$\frac{13\text{աբ}}{6\text{ա}^2+5\text{աբ}-6\text{բ}^2}$$

165. Եթէ առընթեր կոտորոց եւ ողջոյն թիւք կայցեն, պարտ է կամ զողջոյն թիւս ուրոյն եւ զատ ի կոտորոց գումարել, կամ հանել, եւ կամ շրջել զնոսա ի կոտորս անբուծս, եւ ապա ըստ կանոնացն, զոր վերագոյն ասացաք միանգամայն գումարել կամ հանել։ Զոր օրինակ,

$$3\frac{2}{5}+7\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=3+7+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

$$=10+\frac{12+15+20}{30}=10+\frac{47}{30}=11+\frac{17}{30}$$

$$\text{ա}+\frac{\text{բ}}{3}-\frac{2\text{բ}}{5}+\frac{\text{գ}}{\text{ի}}=\frac{15\text{աի}+5\text{բի}-6\text{բի}+15\text{գ}}{15\text{ի}}$$

$$=\frac{15\text{աի}-\text{բի}+15\text{գ}}{15\text{ի}}$$

$$2+3\text{ի}+\frac{4(2\text{ի}^2-1)}{2-3\text{ի}}=\frac{-\text{ի}^2}{2-3\text{ի}}=\frac{\text{ի}^2}{3\text{ի}-2}$$

$$4\text{ա}-3\text{ի}-\frac{\text{ի}(3\text{ի}-10\text{ա})}{2\text{ա}-\text{ի}}=\frac{8\text{ա}^2}{2\text{ա}-\text{ի}}$$

$$\text{կամ}\ 5\frac{2}{3}+6\frac{5}{7}+7\frac{3}{4}+8\frac{1}{2}=\frac{17}{3}+\frac{47}{7}+\frac{31}{4}+\frac{17}{2}$$

$$=\frac{476+564+651+714}{84}=\frac{2405}{84}=28\frac{53}{84}$$

166. Իբրեւ կոտորն հանելի թուոյն մեծ իցէ քան զկոտոր նուազելի թուոյն, յայնժամ յողջոյն թուոյ, որ առ կոտորովն նուազելի թուոյն կայցէ, առեալ մի միութիւն շրջեա ի կոտոր համազգի, եւ յաւել յայն զնուազելի կոտորն, եւ ապա հան զմիւս հանելին։ Որպէս,

$$8\frac{1}{4}-5\frac{3}{4}=7\frac{5}{4}-5\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}$$

$$12\frac{2}{3}-3\frac{4}{5}=12\frac{10}{15}-3\frac{12}{15}=11\frac{25}{15}-3\frac{12}{15}=8\frac{13}{15}$$

167. Եթէ կոտորք իցեն գործակիցք չափուց ինչ նշանագրաց, յայնժամ գտանի բովանդակութիւնն կամ տարբերութիւնն, յորժամ զկոտորս համազգի չափուց միանգամայն գումարիցես կամ հանցես։ Որ օրինակ,

$$\frac{5}{7}\text{ա}^2-\frac{3}{4}\text{աբ}+\frac{4}{9}\text{բ}^2=\text{Ա}$$

$$\frac{2}{3}\text{ա}^2+\frac{5}{8}\text{աբ}-\frac{7}{12}\text{բ}^2=\text{Բ}$$

$$\frac{29}{21}\text{ա}^2-\frac{1}{8}\text{աբ}-\frac{5}{36}\text{բ}^2=\text{Ա}+\text{Բ}$$

$$\frac{5\text{ա}}{4\text{դ}}-\frac{2\text{գ}}{3\text{զ}}-\frac{7}{9\text{բ}}=\text{Գ}$$

$$\frac{3\text{ա}}{8\text{դ}}+\frac{5\text{գ}}{6\text{զ}}-\frac{2\text{ե}}{3\text{բ}}=\text{Դ}$$

$$-\qquad-\qquad+$$

$$\frac{7\text{ա}}{8\text{դ}}-\frac{3\text{գ}}{2\text{զ}}+\frac{6\text{ե}-7}{9\text{բ}}=\text{Գ}-\text{Դ}։$$

Հ Ա Տ Ա Ծ Գ.

ՅԱՂԱԳՍ ԶԿՈՏՈՐՍ ԲԱԶՄԱՑՈՒՑԱՆԵԼՈՅ

168. Երկոքումբք օրինակօք մարթ է զկոտորս ողջոյն թուովք բազմացուցանել :

Առաջին. Յորժամ առանց ինչ զանուանիչ կոտորոյն փոփոխելոյ զհամարիչն ողջոյն թուովն այնուիկ բազմացուցանիցեմք: Զոր օրինակ,

$$\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\times5=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3},\ \frac{5}{6}\times12=\frac{60}{6}=10$$

$$\frac{ա}{բ}\times մ=\frac{ամ}{բ}$$

Երկրորդ անգամ. Յորժամ առանց ինչ զհամարիչն փոփոխելոյ, զանուանիչն կոտորոյն ի վերայ նորին ողջոյն թուոյ բաժանիցեմք: Զոր օրինակ,

$$\frac{3}{8}\times2=\frac{3}{4},\ \text{նոյնպէս}\ \frac{5ա}{21բգ}\times3բ=\frac{5ա}{7գ}.$$

Քանզի այնչափ ինչ բազմանայ կոտորն, որչափ բազում մասունք հաւասարաչափք առնուցուն (Հ. 152, 153.):

Նոյն բանք են եւ յորժամ զողջոյն թիւ կոտորով բազմացուցանիցես : Քանզի $\frac{մ}{ն}\times Ա=\frac{մԱ}{ն}$,

իսկ արդ $մԱ=Ամ$ (Հ. 68.), ուրեմն $\frac{մԱ}{ն}=\frac{Ամ}{ն}=Ա\times\frac{մ}{ն}$:

169. Յորժամ զերկուս կոտորս միմեամբք կամիցի ոք բազմացուցանել, պարտ է զհամարիչն համարչաւ միւսոյ կոտորոյն եւ զանուանիչն անուանչաւ բազմացուցանել: Զոր օրինակ, $\frac{ա}{բ}\times\frac{գ}{դ}=\frac{ագ}{բդ}$:

Քանզի ոչ այլ ինչ է զ $\frac{գ}{դ}$ բազմացուցանել $\frac{ա}{բ}$ կոտորով, եթէ ոչ զ $\frac{գ}{դ}$ աիցս առնուլ, որ ընդ բ բաժանեալ իցէ, ուստի եւ $\frac{\frac{գ}{դ}\cdot ա}{բ}=\frac{գա}{դ}:բ=\frac{գա}{դբ}$ (Տ· 173·)։

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15},\ \frac{5}{4}\times\frac{3}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8},\ \frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{56}{135}$$

$$\frac{ամ}{բն}\times\frac{բ^2}{գ}=\frac{ամբ^2}{բնգ},\ \frac{ամ}{բն}\times\frac{բն}{ամ}=\frac{ամբն}{բնամ}=1$$

170. Յորժամ առընթեր կոտորոց եւ ողջոյն թիւք կայցեն, պարտ է կամ ի կոտորս անբունս շրջել, եւ ապա բազմացուցանել։ Որ օրինակ,

$$5\frac{2}{3}\times 5\frac{4}{5}=\frac{17}{3}\times\frac{29}{5}=\frac{493}{15}=32\frac{13}{15}$$

$$\left(ա\pm\frac{բ}{գ}\right)\left(դ\pm\frac{մ}{ե}\right)=\frac{(ագ\pm բ)(դե\pm մ)}{գե}$$

Եւ կամ ողջոյն թուով եւ կոտորով միոյ առնելոյ զողջոյն թիւ եւ զկոտոր միւսոյ առնելոյն ուրոյն ուրոյն բազմացուցանել։ Որ օրինակ,

$$2\frac{3}{4}\cdot 5\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\times 2+5\times\frac{3}{4}+5\times 2=$$

$$\frac{6}{28}+\frac{4}{7}+\frac{15}{4}+10=\frac{6+16+105}{28}+10=10+\frac{127}{28}=$$

$$14\frac{15}{28}$$

$$\left(ա+\frac{բ}{գ}\right)\left(դ+\frac{գ}{ա}\right)=ադ+\frac{բդ}{գ}+\frac{ագ}{ա}+\frac{բգ}{ագ}=$$

$$ադ+\frac{բդ}{գ}+գ+\frac{բ}{ա}$$

$$\left(ա+\frac{մ}{ի}\right)\left(ա-\frac{մ}{ի}\right)=\frac{ա^2ի^2-մ^2}{ի^2}=ա^2-\frac{մ^2}{ի^2}$$

171. Յորժամ բազում կոտորք միմեամբք բազմացուցանիցին, մարթեմք զարդիւնսն համառօտիւք դրոշմել յորժամ զառնելիսն որ միով չափով եւ ի համարիչն եւ յանուանիչն կայցեն եղծանիցեմք,

$$\frac{ա}{բ}\times\frac{բ}{գ}\times\frac{գ}{դ}\times\frac{դ}{ե}=\frac{ա}{ե}, \text{ քանզի } \frac{աբգդ}{բգդե}=\frac{ա}{ե}\text{։}$$

172. Համարեսցուք եթէ $մ<ն$, ուստի եւ $\frac{մ}{ն}<1$ բուն կոտոր իցէ, դարձեալ ա ողջոյն կամ կոտորեալ թիւ ինչ իցէ, զհետ գայ, եթէ պարտ է

$$ա\times\frac{մ}{ն}<ա\times 1, \text{ այսինքն } \frac{ամ}{ն}<ա \text{ լինել (Հ. 62.)։}$$

Այս ուրեմն. Եթէ որ զինչ եւ իցէ թիւ՝ բուն կոտորով իւիք բազմացուցանիցի, արդիւնքն փոքր իցէ քան զբազմացուցանելին. զորոյ զհետ գայ, եթէ Արդիւնք երկուց բուն կոտորոց, քան զերկոսին առնելեան եւս փոքր իցեն։ Զոր օրինակ,

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}, \text{ եւ } \frac{1}{2}<\frac{2}{3}, \text{ եւ } \frac{1}{2}<\frac{3}{4}$$

Աստասին մարթ է ի միտ առնուլ, եթէ բուն կոտորն որչափ ինչ ի զօրութիւնս մեծամեծս համբառնայցէ, նուազի, եւ փոքր ինչ նշանակէ. որպէս

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}>\frac{1}{16}>\ldots\text{։}$$

Օրինակք կոտորակաց բազմացուցանելոյ։

$$\frac{ա^2}{2}-\frac{2աբ}{3}+\frac{3բ^2}{4}=Ա$$

$$\frac{2ա^2}{3}+\frac{3աբ}{4}-\frac{4բ^2}{5}=Բ$$

$$\frac{ա^4}{3}-\frac{4ա^3բ}{9}+\frac{ա^2բ^2}{2}$$

$$\frac{3ա^3բ}{8}-\frac{ա^2բ^2}{2}+\frac{9աբ^3}{16}$$

$$-\frac{2ա^2բ^2}{5}+\frac{8աբ^3}{15}-\frac{3բ^4}{5}$$

$$\frac{ա^4}{3}-\frac{5ա^3բ}{72}-\frac{2ա^2բ^2}{5}+\frac{263աբ^3}{240}-\frac{3բ^4}{5}=ԱԲ$$

$$\left(\frac{ա^2բ}{գդ^2}-\frac{բ^2գ}{աե^2}+\frac{դե}{բգ}\right)\times\frac{աբե^2}{գդ}=\frac{ա^3բ^2ե^2}{գ^2դ^3}-\frac{բ^3}{դ}+\frac{աե^3}{գ^2}$$

$$\frac{3(ա-բ)^2}{5(ա+բ)^3}\times\frac{25(ա+բ)}{9(ա-բ)}=\frac{5(ա-բ)}{3(ա+բ)^2}$$

$$\left(ա+\frac{2աբ}{ա-բ}\right)\left(ա-\frac{2աբ}{ա+բ}\right)=\frac{ա^2(ա^2-բ^2)}{ա^2-բ^2}=ա^2$$

ՀԱՏԱԾ Դ

ՅԱՂԱԳՍ ԶԿՈՏՈՐՍ ԲԱԺԱՆԵԼՈՑ

173. ԵՐԿՈՒՔՈՒՄԲՔ օրինակօք բաժանի կոտոր ինչ ի վերայ ողջոյն ինչ թուոյ։ Առաջին. Յորժամ առանց ինչ զանուանիչ կոտորոյն փոփոխելոյ զհամարիչն ի վերայ ողջոյն թուոյ բաժանիցես. զոր օրինակ,

$$\frac{ա}{բ}:դ=\frac{ա:դ}{բ},\ \frac{12}{17}:4=\frac{3}{17},\ \frac{25}{32}:5=\frac{5}{32}$$

Երկրորդ անգամ. Յորժամ առանց ինչ զհամարիչն փոփոխելոյ, զանուանիչն ողջոյն թուովն բազմացուցանիցես։ Զոր օրինակ,

$$\frac{ա}{բ}:դ=\frac{ա}{բդ}\ (Հ.\ 152,\ 153.)$$

$$\frac{2}{3}:4=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ \frac{7}{8}:5=\frac{7}{40},\ \frac{25}{32}:8=\frac{25}{256}$$

Զերկոսին կանոնսն պարտ է ըստ դիպացն ի կիր արկանել։

174. Յորժամ կոտոր կամ ողջոյն թիւ ինչ ընդ այլ կոտոր բաժանիցի, պարտ է շրջել զհամարիչ բաժանարարին յանուանիչ, եւ զանուանիչն ի համարիչ, եւ յետ այնորիկ բազմացուցանել բաժանելեաւ, արդիւնքն է քանորդն։

Դիցուք գրեսցուք եթէ ողջոյն կամ կոտորեալ թիւս Ա. ընդ կոտոր $\frac{դ}{ե}$ բաժանիցի, եւ թէ

$Ա : \frac{մ}{ն} = պ$ իցէ, պարտ եւ պատշաճ է (ըստ §. 84) $պ \times \frac{մ}{ն} = \frac{մպ}{ն} = Ա$ լինել։ Արդ յորժամ զերկուս յետին հաւասար չափս բազմացուցանիցեմք ն չափով $Ան = պմ$, զորս իբրեւ ընդ մ բաժանիցեմք, ծագիցէ $\frac{Ան}{մ} = պ$, ապա ուրեմն եւ $Ա : \frac{մ}{ն} = \frac{Ան}{մ} = Ա \times \frac{ն}{մ}$

Զոր օրինակ եթէ բաժանելի իցէ ողջոյն թիւս ա եւ $\frac{մ}{ն}$ բաժանարար յայտ է եթէ $ա : \frac{մ}{ն} = ա \times \frac{ն}{մ} = \frac{ան}{մ}$ իսկ եթէ բաժանելի իցէ $\frac{ա}{բ}$, յայնժամ $\frac{ա}{բ} : \frac{մ}{ն} = \frac{ա}{բ} \times \frac{ն}{մ} = \frac{ան}{բմ}$, Զոր օրինակ,

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Զսորին զհետ գայ, թէ ամենայն բաժանումն կոտորոց փոխի ի բազմացուցանել, յորժամ համարիչն եւ անուանիչ բաժանարարին շրջիցին, եւ (§. 168, 169) բազմացուցանիցին։ Զոր օրինակ,

$$\frac{ա}{բ} : \left(գ \pm \frac{դ}{ե}\right) = \frac{ա}{բ} : \frac{գե \pm դ}{ե} = \frac{աե}{բ(գե \pm դ)}$$

$$\left(ա + \frac{բ}{գ}\right) : \frac{մ}{ն} = \frac{(ագ + բ)ն}{գմ}$$

$$\left(ա \pm \frac{բ}{գ}\right) : \left(դ \pm \frac{ե}{զ}\right) = \frac{ագ \pm բ}{գ} : \frac{դզ \pm ե}{զ} = \frac{(ագ \pm բ)զ}{(դզ \pm ե)գ}$$

$$\frac{4(ա^2 - 4ք^2)ք^մ}{21(ա + ք)} : \frac{6(ա + 2ք)ք^3}{7(ա^2 - ք^2)} = \frac{2}{9} ք^{մ-3}(ա - ք)(ա - 2ք)$$

$$ա^2 : \left(ա + \frac{ք}{ա}\right) = ա^2 : \frac{ա^2 + ք}{ա} = \frac{ա^3}{ա^2 + ք}$$

$$\left(\frac{5ք^3}{4ս^3}-\frac{169աք^2}{180ս^2}+\frac{ա^2ք}{6ս}+\frac{6ա^3}{25}\right):\left(\frac{5ք}{6ս}+\frac{3ա}{10}\right)=\frac{3ք^2}{2ս^2}-\frac{5աք}{3ս}+\frac{4ա^2}{5}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{5ք^3}{4ս^3}+\frac{9աք^2}{20ս^2} \\
- \quad - \\
\hline
-\frac{25աք^2}{18ս^2}+\frac{ա^2ք}{6ս}+\frac{6ա^3}{25} \\
-\frac{25աք^2}{18ս^2}-\frac{ա^2ք}{2ս} \\
+ \quad + \\
\hline
\frac{2ա^2ք}{3ս}+\frac{6ա^3}{25} \\
\frac{2ա^2ք}{3ս}+\frac{6ա^3}{25} \\
- \quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

175. Համարեսցուք եթէ $ն > ս$ իցէ, ուստի եւ $\frac{ն}{ս} > 1$, եւ $\frac{ս}{ն} < 1$ եւ $\frac{ան}{ս} > ա$, այլ $\frac{ան}{ս} = ա \times \frac{ն}{ս} = ա : \frac{ս}{ն}$ (Հ. 174), վասն որոյ եւ $ա : \frac{ս}{ն} > ա$: Արդ յորժամ թիւ ինչ ընդ բուն կոտոր բաժանիցի, ելանէ քանորդ մեծ քան զբաժանելին, այլ եթէ ա թիւն բուն կոտոր իցէ, եւ ընդ $\frac{ս}{ն} < 1$ բաժանիցի, յայնժամ

եթէ $ա = \frac{ս}{ն}$, քանորդն լինիցի $ա : \frac{ս}{ն} = 1$ ապա եթէ

$ա < \frac{ս}{ն}$, " " $ա : \frac{ս}{ն} < 1$, իսկ եթէ

$ա > \frac{ս}{ն}$, " " $ա : \frac{ս}{ն} > 1$

Ապա ուրեմն. Յորժամ բուն կոտոր ինչ ընդ այլ բուն կոտոր բաժանիցի, որոյ փոքր իցէ քան զայն զօրութիւնն, ծագէ քանորդ մեծագոյն քան զբաժանելին, եւ մեծ քան զ1:

176. Դիցուք գրեսցուք եթէ $\frac{ե}{է} > \frac{ը}{զ}$, ուստի եւ $եզ > էը$, եւ $\frac{զ}{ը} > \frac{է}{ե}$, յորմէ եւ $\frac{ազ}{ը} > \frac{աէ}{ե}$ կամ ըստ 174 համարոյ $ա : \frac{ը}{զ} > ա : \frac{ե}{է}$: Որչափ ինչ մեծագոյն իցէ զօրութիւն կոտորեալ բաժանարարին, այնչափ մեծ իցէ եւ քանորդ:

177. Յորժամ չփոփոխիցի բաժանելին, եւ բաժանարարն առանց վախճանելոյ մի ըստ միոջէ նուազիցի, քանորդն աճէ, որչափ ինչ նուազի բաժանարարն, զոր օրինակ,

$1 : \frac{1}{10} = 10$, $1 : \frac{1}{1000} = 1000$, այլովքն համդերձ: Արդ յորժամ բաժանարարն քան զամենայն չափս հնարաւորս փոքր իցէ, այսինքն $= 0$, յայնժամ եւ քանորդն $ա : 0$ կամ $\frac{ա}{0}$ անհնարին մեծ իցէ եւ առաւել քան զամենայն չափս հնարաւորս, որ եւ նշանակի նշանաւս ∞, որպէս $\frac{ա}{0} = \infty$ եւ $\frac{ա}{\infty} = 0$:

178. Զզօրութիւն կոտորեալ կոտորոյ, զոր օրինակ $\frac{ա}{բ}$ կոտորոյ $\frac{գ}{դ}$ կոտորոյն կարիցեմք ճանաչել, յորժամ զհամարիչսն երկոցունց կոտորոցն, եւ զանուանիչս միմեամբք բազմացուցանիցես զայս օրինակ $\frac{ագ}{բդ}$: Քանզի $\frac{գ}{դ}$ կոտորն $\frac{ա}{բ}$ կոտորոյն ցուցանէ եթէ $\frac{ա}{բ}$ ի դ մասունս բաժանեալ իցէ, եւ ի մասանց անտի գ մասն առեալ, այս ինքն $\frac{ա}{բ}:դ=\frac{ա}{բդ}$, ուստի $\frac{ա}{բդ}\times գ=\frac{ագ}{բդ}$:

179. Երբեւ այնպիսի ինչ կոտորք գիպեսցին, որոց այլեւայլ իցեն զօրութիւնքն, պարտ է զնոսա յառաջագոյն ի մի ազգ շրջել, եւ ապա համարել ըստ կանոնաց: Զոր օրինակ,

$$\frac{3}{4}\text{ ժամ}+\frac{2}{5}\text{ վայր.}=\frac{3}{4}\text{ ժամ}+\frac{2}{5\cdot60}\text{ ժամ}=\frac{225+2}{300}=\frac{227}{300}\text{ ժամ.}$$

$$\frac{3}{5}\text{ ժամ}+\frac{2}{3}\text{ վայր.}=\frac{3\cdot60}{5}\text{ վայր.}+\frac{2}{3}\text{ վայ.}=36\frac{2}{3}\text{ վայր.}$$

$$\frac{4}{5}\text{ լիտր}:\frac{3}{2}\text{ կէս ունկի}=\frac{4}{5}\text{ լիտր}:\frac{3}{64}\text{ լիտր}=\frac{4}{5}\times\frac{64}{3}=\frac{256}{15}=17\tfrac{1}{15}\text{ լիտր}:$$ Կամ

$$\frac{4}{5}\text{ լիտր}:\frac{3}{2}\text{ կէս ունկի}=\frac{4\cdot32}{5}\text{ կէս ուն.}:\frac{3}{2}\text{ կէս ուն.}=\frac{4\cdot32\cdot2}{5\cdot3}=17\tfrac{1}{15}\text{ լիտր}:$$

Յաղագս անկարգ կոտորոց:

180. Անկարգ կոտոր է, յորում համարիչն կամ անուանիչն կամ երկոքեանն եւս միանգամայն կոտորեալ թիւք իցեն: Մարթ է համարչին եւ անուանչին անկարգ կոտորոց՝ թիւս պարզս եւ յօդուածոյս լինել, եւ կամ բազում թուոց արդիւնք, այլովքն հանդերձ: Անկարգ կոտորք շրջին ի կարգաւորս: Համարեսցուք եթէ $\frac{պ}{ռ}$ համարիչ իցէ, եւ $\frac{ր}{ց}$ անուանիչ անկարգ կոտորոյ, ուստի եւ $=\frac{\frac{պ}{ռ}}{\frac{ր}{ց}}$: Արդ երկոքումբք օրինակօք շրջի կոտորս ի կոտոր կարգաւոր:

Առաջին. Իբրեւ զերկուս կոտորան եւս զ $\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}$ եւ զ $\frac{\text{Ր}}{\text{Ց}}$ արդեամբք անուանչացն ՌՑ բազմացուցանիցես, յորմէ եւ

$$\frac{\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}}{\frac{\text{Ր}}{\text{Ց}}}=\frac{\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}\times\text{ՌՑ}}{\frac{\text{Ր}}{\text{Ց}}\times\text{ՌՑ}}=\frac{\text{ՊՑ}}{\text{ՌՐ}}\ (\text{Հ. 154.})$$

Երկրորդ անգամ. Ցորժամ զհամարիչ անկարդ կոտորոյ արդեամբք իսկ ընդ անուանիչն բաժանիցես։ Օ՛ր օրինակ,

$$\frac{\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}}{\frac{\text{Ր}}{\text{Ց}}}=\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}:\frac{\text{Ր}}{\text{Ց}}=\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}\times\frac{\text{Ց}}{\text{Ր}}=\frac{\text{ՊՑ}}{\text{ՌՐ}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},\quad \frac{\frac{\text{ա}-\text{գ}}{\text{բ}+\text{գ}}}{\frac{\text{ա}^2-\text{գ}^2}{\text{բ}^2-\text{գ}^2}}=\frac{(\text{ա}-\text{գ})(\text{բ}^2-\text{գ}^2)}{(\text{բ}+\text{գ})(\text{ա}^2-\text{գ}^2)}=\frac{\text{բ}-\text{գ}}{\text{ա}+\text{գ}}$$

$$\frac{\frac{\text{ա}}{\text{բ}}\pm\frac{\text{գ}}{\text{դ}}}{\frac{\text{ե}}{\text{զ}}\pm\frac{\text{է}}{\text{ը}}}=\frac{\frac{\text{ադ}\pm\text{բգ}}{\text{բդ}}}{\frac{\text{եը}\pm\text{զէ}}{\text{զը}}}=\frac{(\text{ադ}\pm\text{բգ})\text{զը}}{(\text{եը}\pm\text{զէ})\text{բդ}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}+\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{15}-\frac{2}{9}\right)}=\frac{\frac{11}{36}}{\frac{49}{72}\times\frac{11}{45}}=$$

$$\frac{11}{36}\times\frac{72}{49}\times\frac{45}{11}=\frac{90}{49}\text{։}$$

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր։ Այր ոմն ունի պէտս տալոյ, $2\frac{1}{6}$ կանգուն վաւն վերարկուի, եւ $\frac{3}{4}$ կանգուն վաւն պարեգօտի, եւ $\frac{7}{8}$ կանգուն վասն բաճկոնի, արդ որչափ ինչ կանգուն առնուցու ունիցի պէտս։

Պատ․ $2\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=2\frac{4}{24}+\frac{18}{24}+\frac{21}{24}=2\frac{43}{24}=$

$3\frac{19}{24}$ կանգնոց։

Բ․ **Խնդիր**։ Կշիռ ձուլածոյ գլանի կանոնի՝ էր $56\frac{2}{3}$ քանքար, յետ բանալոյ զփոքրիկ ծակն երկայնութեան ի միջի, մնաց կշիռն $51\frac{3}{4}$ քանքար, արդ որչափ ինչ քրէական նիւթ ի բաց բարձեալ իցէ։

Պատ․ $56\frac{2}{3}-51\frac{3}{4}=56\frac{8}{12}-51\frac{9}{12}=$

$55\frac{20}{12}-51\frac{9}{12}=4\frac{11}{12}$ քանք․

Գ․ **Խնդիր**։ Եթէ վասն միոյ ձողոյ գերանի պարտ իցէ 5 դահեկանս, եւ 17 նաքարակիտս գերմանացւոց վճարել, որչափ գնոց առնուլ կարիցեմք զգերան մի, որոյ երկայնութիւն իցէ $11^{\circ}+4^{\prime}+8^{\prime\prime}$։

Պատասխ․ $11^{\circ}+4^{\prime}+8^{\prime\prime}=\left(11+\frac{4}{6}+\frac{8}{6\cdot 12}\right)$ ձող $=\left(11+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{106}{9}$ ձող․ եւ 5 դահ․ 17 նաքա․ $=\left(5+\frac{17}{60}\right)$ դահ․ $=\frac{317}{60}$ դահ․ արդ $\frac{106}{9}\cdot\frac{317}{60}$ դահ․ $=\frac{33602}{540}$ դահ․ $=62\frac{61}{270}$ դահ․ $=62$ դահ․ $13\frac{5}{9}$ նաքարակիտ։

Դ․ **Խնդիր**։ Ընդաստին ի փորձոյ յայտ է, եթէ ոսկի յորժամ ի ջուր ընկղմիցի կորուսանէ $\frac{2}{37}$ մասն ի կշռոյն, իսկ արծաթն $\frac{2}{21}$ մասն, պղնձն $\frac{5}{43}$ մասն. արդ որչափ ինչ մասն ի կշռոյն կորուսանիցէ մարմին ինչ, որ ի $1\frac{1}{2}$ լտերց ոսկւոյ, յ$3\frac{2}{3}$ լտերց արծաթոյ, եւ յ$2\frac{3}{4}$ լտերց պղնձոյ կազմիցի:

Պատասխանի: Քանզի $\frac{2}{37}$ է կոտոր $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ կոտորոյն, ուրեմն զօրութիւն կոտորեալ կոտորոյս է $=\frac{2}{37}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{37}$ (Հ. 178.): Նոյնպէս $\frac{2}{21}$ է կոտոր $3\frac{2}{3}$ կոտորոյն, ուստի $=\frac{2}{21}\times\frac{11}{3}=\frac{22}{63}$, եւ $\frac{5}{43}$ է կոտոր $2\frac{3}{4}$ կոտորոյն, եւ $=\frac{5}{43}\times\frac{11}{4}=\frac{55}{172}$, ապա ուրեմն կորուստ մարմնոյն $=\frac{3}{37}+\frac{22}{63}+\frac{55}{172}=\frac{300721}{400932}$ լտր. գրեթէ $=24$ կէս ունկւոյ:

Հ Ա Տ Ա Ծ Ե

ՑԱՂԱԳՍ ՏԱՍՆԵՐՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐՈՑ

181. **Կոտորք**, որոց անուանիչն կարողութիւն իցէ 10 թուոյ, անուանեալ կոչին Տասներորդական կոտորք, որպիսի ինչ են $\frac{3}{10}$, $\frac{72}{100}$, $\frac{809}{1000}$, եւ հասարակաց օրինակաւ $\frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}}}$:

182. Որպէս ի տասնկարգեան աստիճանս թուոց, զօրութիւն միոյ միոյ ի նշանակաց թուոյն տասնիցս աւելու, յորժամ ըստ մի տեղի յաջմէ ի ձախակողմն կոյս տարցի. կամ ընդ հակառակս նուազէ զօրութիւնն, եթէ ըստ մի տեղի ի ձախմէ յաջակողմն կոյս խաղայցէ: Զնոյն կարգ եւ ի տասներորդական կոտորս է տեսանել, քանզի զօրութիւն եւ չափ նոցա, զոր օրինակ, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\ldots$ կամ $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}\ldots.$

նոյն օրինօք ի ձախմէ ընդ աջակողմն կոյս նուազի որպէս ի նշանակս թուոց, ... 10^3, 10^2, 10, 1։ Արդ իբրեւ յետ ողջոյն ինչ թուոյ կայցեն տասներորդական կէտք, յայնժամ առաջինն, որ կայ առընթեր հանդէպ միաւորի ողջոյն թուոյն, ցուցանէ զտասներորդ մասն միոյ միութեան միաւորին. իսկ երկրորդն զ10^2երորդ մասն, երրորդն զ10^3երորդ մասն, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ։

Համարեսցուք եթէ թիւն, որ զտասներորդ մասն միոյ միութեան միաւորին ցուցանիցէ իցէ, = +. արդ առ հաւասարել + թուոյ միոյ միութեան միաւորին, պարտ է զի $10+=1$։ Իբրեւ բաժանիցի հաւասարութիւնըս ընդ 10, ելանէ քաններորդ $+=1:10$, որ է $=\frac{1}{10}$։ Նոյնպէս յորժամ $\frac{1}{10}:10=\frac{1}{100}$, ըստ նմին օրինակի $\frac{1}{100}:10=\frac{1}{1000}$...։ Զորոյ զհետ գայ եթէ մարթեմք թողուլ ի բաց զանուանիչս տասներորդական կէտորոց, յորժամ զ10երորդ մասն յառաջնում տեղւոջ. զ100որդն յերկրորդում, զ1000երորդն յերրորդում վայրի, եւ զայլսն եւս ըստ նմին օրինակի ընդ աջակողմն կոյս գրոշմիցեմք։ Եւ զի զատեալ որոշեսցին ի միմեանց տասներորդական կէտքն, եւ ողջոյն թիւն որ առընթեր կայցէ, պարտ է ի միջոյն միաւորի ողջոյն թուոյն, եւ առաջին տեղւոյ տասներորդական կէտոյն դրոշմել սուր ստկէս, որ ասի Ստկէս բաժանման, զոր օրինակ $2,5=2\frac{5}{10}$, նոյնպէս $32,72=32\frac{72}{100}$։ Ապա եթէ առընթեր տասներորդական կէտոց չիցէ ողջոյն ինչ թիւ, եւ կամ եթէ տասներորդական տեղիքն եւս պակաս իցեն, փոխանակ նոցա դրոշմի զատարկ թիւ 0, զոր օրինակ $0,3=\frac{3}{10}$։ $0,07=\frac{7}{100}$։ $0,005=\frac{5}{1000}$ այլովքն համդերձ։ Արդ

$$35,7859 = 35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{9}{10^4} =$$

$$35 + \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{9}{10000} =$$

$$35 + \frac{7859}{10000} = \frac{357859}{10000}.$$

183. Արդ յայսց, որ ասացանն, զհետ գայ, եթէ

Ա. Զտասներորդական կոտոր ինչ՝ յորժամ համարիչն ի մի եւեթ թուոյ կազմիցի, առանց անուանչի գրոշմիցէ ոք, եթէ ի ձախմէ կողմանէ համարչին այնչափ ինչ զատարկս յաւելուցու, որչափ ինչ միանգամ յանուանիչն զատարկք կայցեն, կամ որչափ ինչ միութիւնք ի ցուցիչ անուանչին գտանիցին, եւ ընդ աջմէ վերջին զատարկ թուոյն, զատիքան դնիցէ:

Զոր օրինակ, $\frac{7}{10000} = \frac{7}{10^4} = 0,0007$

Բ. Յորժամ համարիչ տասներորդական կոտորոյ ի բազում թուոց կազմեալ իցէ, եւ զայն առանց անուանչի գրոշմել կամիցի ոք, պարտ է յաջմէ կողմանէ ի ձախակողմն կոյս այնչափ ինչ նշանակս թուոց հատանել սուր ստիքսիւ, որչափ ինչ զատարկ թիւք յանուանիչն, կամ միութիւնք ի ցուցիչ անուանչին կայցեն: Քանզի թիւ ինչ տասնկարգեան բաժանի ընդ կարողութիւն 10 թուոյ, եթէ ոք հատանիցէ այնչափ ինչ նշանակս թուոյ ի բաժանելւոյն յաջմէ ընդ ձախակողմն, որչափ ինչ զատարկ թիւք ի բաժանարարին գտանիցին (Տ. 33.): Զոր օրինակ,

$\frac{27}{10} = 2,7$: $\frac{35}{100} = 0,35$: $\frac{302}{100} = 3,02$,

$\frac{456883}{10^4} = 45,6883$

Գ. Այս եթէ նշանակք թուոց համարչին սակաւ իցեն քան զզատարկ թիւս անուանչին, յայնժամ պարտ է ընդ ձախմէ կողմանէ համարչին այնչափ ինչ թիւս զատարկս յաւելուլ, մինչեւ տեղիքն հաւասարիցին զատարկ թուոյ անուանչին: Զոր օրինակ,

$$\frac{3}{100}=0,03:\ \frac{27}{1000}=0,027:\ \frac{325}{10^5}=0,00325$$

184. Ըստ (տ. 182.) $0,327=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{7}{1000}$, կամ յորժամ զանուանիչս ի մի համօրէն անուանիչ շրջեսցեմք, $0,327=\frac{300}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{7}{1000}=\frac{327}{1000}$:

Այս ուրեմն. Երկուքումբք օրինակօք մարթ է ընթեռնուլ տասներորդական կոտորս, որ ի բազում նշանակաց կազմեալ իցէ, կամ յորժամ զզօրութիւն միոյ միոյ ի նշանակացն ուրոյն եւ զատ ի միմեանց ընթեռնուցուք, եւ կամ իբրեւ զողջոյն թիւն միանգամայն ի զօրութիւն յետին տեղւոյն ժողովեալ ի միասին ընթեռնուցուք:

Զայս օրինակ մարթի ընթեռնուլ, յորժամ առընթեր կոտորացն եւ ողջոյն թիւք կայցեն: Զոր օրինակ,

$23,75=23+\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$ ընթերցեալ լինի. Քսան եւ երեք, եւ եւթն տասներորդական, հինգ հարիւրորդական: Կամ զօրութեամբ յետին տեղւոյն

$23,75=\frac{2300}{100}+\frac{70}{100}+\frac{5}{100}=\frac{2375}{100}$ ընթերցեալ լինի. Երկու հազար երեքհարիւր եւթանասուն եւ հինգ հարիւրորդական:

185. Չփոխի զօրութիւն տասներորդական կոտորոց, յորժամ ընդ աջմէ կողմանէ յաւելուցուս թիւս զատարկս, քանզի $\frac{5}{10}=\frac{50}{100}=\frac{500}{1000}$, ապա ուրեմն եւ $0,5=0,50=0,500$, այլովքն հանդերձ, քանզի եւ համարիչն եւ անուանիչն նովին չափով բազմացուցանին:

186. Դնիցուք գրեսցուք եթէ $\frac{Հ}{Ա}$ սովորական կոտոր իցէ. արդ յայտ է եթէ $\frac{Հ}{Ա} = \frac{Հ \cdot 10^{ն}}{Ա \cdot 10^{ն}}$, եւ եթէ զհամարիչն եւ զանուանիչն բաժանիցիմք ընդ Ա, յայնժամ $\frac{Հ}{Ա} = \frac{Հ \cdot 10^{ն} : Ա}{10^{ն}}$: Համարեսցուք եթէ $Հ \cdot 10^{ն} : Ա = Ո$, ապա ուրեմն $\frac{Հ}{Ա} = \frac{Ո}{10^{ն}}$: Արդ. Ամենայն սովորական կոտոր $\frac{Հ}{Ա}$ շրջի ի տասներորդական կոտոր $\frac{Ո}{10^{ն}}$, յորժամ զհամարիչ սովորական կոտորոյն որով եւ իցէ զօրութեամբ 10 թուոյ բազմացուցանիցես, եւ զարդիւնսն ընդ անուանիչն բաժանիցես: Արդ բազմացուցանիցի համարիչն Հ, յորժամ այնչափ ինչ թիւս դատարկս ընդ աջմէ յաւելուցուս, որչափ ինչ միութիւնս ն ցուցիչ 10 թուոյն ցուցանիցէ, զորոյ զարդիւնսն իբրեւ ընդ Ա բաժանիցես, ելանիցէ տասներորդական կոտոր $\frac{Ո}{10^{ն}}$, յորմէ իբրեւ զանուանիչն կամիցիս թողուլ ի բաց, պարտ եւ պատշաճ է քեզ այնչափ ինչ նշանակս ի համարչէն յաջմէ ընդ ձախակողմն կոյս զատանել, որչափ ինչ ն զօրութիւն անուանչին ցուցանիցէ, կամ որչափ ինչ թիւս դատարկս ի Հ յաւելեր:

Բայց սակայն չէն պէտք զի բազում թիւս դատարկս միանգամայն ի սկզբանն յաւելցես ի Հ, այլ շատ է, զի ի Հ, եւ ապա ի մնացորդս որ ի բաժանելոյ անտի Հ համարչին ընդ Ա անուանիչն ելանիցեն, այնչափ ինչ թիւս դատարկս մի ըստ միոջէ յաւելուցուս, որչափ ինչ կարեւոր իցեն բաժանելոյ նոցա ընդ Ա անուանիչ: Ապա ի կատարել բաժանմանն կարիցես հասանել ի վերայ եթէ քանի ինչ թիւս դատարկս պարտ էր քեզ ի ∸ համարիչն յաւելուլ, կամ թէ որով զօրութեամբ 10 թուոյ զ∸ բազմացուցանել, քանզի զատարկ թիւքն զոր մի ըստ միոջէ ի մնացորդսն յաւելեր հաւասար են ն զօրութեան 10 թուոյ: Արդ այնչափ ինչ թիւս հատ ի քանորդէն ընդ աջմէ ի ձախակողմն կոյս, որչափ ինչ մի ըստ միոջէ զատարկ թիւս ի ∸ եւ ի մնացորդսն յաւելեր:

Զոր օրինակ իբրեւ զ $\frac{5}{8}$ ի տասներորդական կոտոր շրջեցեմք, գտանի

$$5,0 : 8 = 625$$

20

40

0

Արդ քանզի երեք զատարկ թիւք յաւելան ի ∸, ապա ուրեմն երիս տասներորդական տեղիս ի քանորդէն պարտ է որոշել, եւ $\frac{5}{8} = 0,625$:

Նոյնպէս ըստ այսմ օրինակի $\frac{3}{64}$ իբրեւ ի տասներորդական կոտոր շրջիցի, գտանի

$$3,00 : 64 = 46875$$

440

560

480

320

0

Ապա ուրեմն $\frac{3}{64} = 0,046875$:

187. Յորժամ կոտորն, զոր շրջել կամիցիս՝ անբաւն իցէ, որ ճշգիւ ընդ բաժանարարն չբաժանիցի, յայնժամ խառն լինիցի քանորդն: Արդ իբրեւ այսպիսի ինչ դիպիցի, պարտ է ըստ վերագոյն աւա-

ցելոցս ի վերայ յետին մնացորդին յաւելուլ դատարկ թիւս՝ որչափ ինչ պիտոյ իցէ վասն ընդ Ն. բաժանելոյ, եւ դարձեալ բաժանել, եւ այսպէս մի ըստ միոջէ մինչեւ ցաւարտել բաժանման, եւ ի քանորդէն այնչափ ինչ նշանակս թուոց զատանել ընդ աջմէ ի ձախակողմն կոյս, որչափ ինչ դատարկ թիւս ի մնացորդսն յաւելեալ ինչ իցէ: Զոր օրինակ,

$$\frac{7269}{125} = 7269 : 125 = 58,152$$

1019
190
650
250
0

188. Եթէ ընդ աջմէ կողմանէ բաժանարարին կամ անուանչին դատարկ թիւք կայցեն, թող ի բաց զդատարկ թիւսն եւ այնպէս կատարեա զբաժանումն, այլ ի զատանելն ի քանորդէն զտասներորդական տեղիս կոտորոցն, հատ այնչափ տեղիս, որչափ ինչ դատարկ թիւս յաւելեր ի վերայ մնացորդացն մի ըստ միոջէ, եւ որչափ ինչ դատարկ թիւս թողեր ի բաժանարարէն:

Զոր օրինակ իբրեւ զկոտորս $\frac{7}{800}$ շրջիցեմք ի տասներորդական կոտոր,

$$70 : 8 = 875$$

60
40
0

Այսմ վայրի քանզի երիս դատարկ թիւս յաւելաք ի վերայ, եւ երկուս եւս թողաք ի բաց ի բաժանարարէն, ապա ուրեմն պարտ է քանորդին ընդ 10^5 բաժանել, ուստի եւ 5 տեղիս կոտորոց զատանել, զայս օրինակ $\frac{7}{800} = 0,00875$:

Նոյնպէս $\frac{13}{25000} = 0,00052$

189. Օրինակքն զորս մինչեւ ցայս վայր ի մէջ բերաք, ճշդիւ բաժանեցան ընդ անուանիչն, որ ոչ բազում անգամ դիպի: Այլ պատահէ բազում անգամ, զի յորժամ սովորական կոտորք ի տասներորդական կոտորս շրջիցին, անբաւ անդիք առանց սպառելոյ ծնանին: Զոր օրինակ եթէ կոտորս $\frac{1}{3}$ ի տասներորդական փոփոխիցի, ծագէ

$$\begin{array}{l}
\underline{1,0}:3 = 0,333\cdots\cdots \\
\quad \underline{10} \\
\qquad \underline{10} \\
\qquad\quad \underline{10} \\
\qquad\qquad 1
\end{array}$$

Բաժանումս առանց կատարելոյ յառաջ խաղայ, քանզի ցանդ մնայ մնացորդ 1: Սոյնգունակ առանց սպառելոյ են կոտորքս

$$\frac{1}{6} = 0,16666\cdots\cdot$$

$$\frac{1}{9} = 0,11111\cdots\cdot$$

Իբրեւ ի տասներորդական կոտոր շրջիցի կոտորս $\frac{1}{7}$, ելանեն

$$\begin{array}{l}
\underline{1,0}:7 = 142857 \\
\quad \underline{30} \\
\qquad \underline{20} \\
\qquad\quad \underline{60} \\
\qquad\qquad \underline{40} \\
\qquad\qquad\quad \underline{50} \\
\qquad\qquad\qquad 1
\end{array}$$

Արդ քանզի վեցերորդ մնացորդն է 1, որ եւ յառաջագոյն պատահեաց միանգամ, յայտ է եթէ առանց սպառելոյ իցէ բաժանումս, եւ եթէ ոք յառաջ եւս մատուցէ զբաժանումն, մի ըստ միոջէ ծագեն վեց նշանակք քանորդին նովին կարգաւ, որպէս յառաջին, գայս ձեւ օրինակի.

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots\ldots$$

Սորին ազգի տասներորդական կոտորք անուանեալ կոչին Շրջմանց տասներորդական կոտորք, եւ թիւքն որ միշտանգամ դառնան՝ Շրջան։ Ի ցուցանել զշրջանն, դնի նշանս ի վերայ առաջին եւ վերջին թուոյ շրջանին։ Զոր օրինակ,

$$\frac{5}{3} = 1,\dot{6}\text{:}\ \frac{7}{11} = 0,\dot{6}\dot{3}\text{:}\ \frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2}\text{:}$$

190. Դիցուք գրեցուք, եթէ $\frac{Ա}{Բ}$ կոտոր ինչ իցէ համառօտիւք գրեալ, վասն որոյ եւ Ա եւ Բ առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւոր թիւք իցեն։ Յայտնին յայտ է, եթէ $Ո = \frac{Ա \cdot 10^{ն}}{Բ}$ չկարէ ողջոյն թիւ լինել, եթէ ոչ $10^{ն}$ հաւասարեաւ ընդ Բ բաժանիցի։ Եւ քանզի $10 = 2 \cdot 5$, ապա ուրեմն $10^{ն} = (2 \cdot 5)^{ն}$, յորմէ դհետ գայ եթէ $10^{ն}$ յայնժամ եւեթ բաժանի ընդ Բ, յորժամ կամ Բ կարողութիւն ինչ իցէ 2 կամ 5 թուոց, եւ կամ արդիւնք իցէ կարողութեանց 2 եւ 5 թուոց, որ համարակաց իմն օրինակաւ $Ն = 2^{գ} \cdot 5^{դ}$, յորում գ եւ դ ողջոյն թիւք են։ Արդ յայսպիսի դէպս $\frac{Ա}{Բ}$ հաւասար է տասներորդական կոտորոյ։

Ապեթէ $Ա \cdot 10^{ն}$ ընդ Բ չբաժանիցի հաւասարեաւ, յայնժամ եւ քանորդն $Ո = \frac{Ա \cdot 10^{ն}}{Բ}$ ընաւ ամենեւին չհաւասարի ողջոյն ինչ թուոյ, եւ զօրութիւն $\frac{Ա}{Բ}$ կոտորոյ չդատանի ճշդիւ, քանզի $\frac{Ա}{Բ}$ հաւասար է անբաւ թուոյ տասներորդական կոտորոյ։

Արդ յորժամ այսպիսի ինչ դիպիցի, զի $Հ \cdot 10^{ն}$ ընդ Բ. հաւասարաւ չբաժանիցի, յայնժամ $Ո = \frac{Հ \cdot 10^{ն}}{Բ}$ քանորդն ելանէ խառն թիւ։ Համարեսցուք եթէ $\frac{Հ \cdot 10^{ն}}{Բ} = Ո = Ր + \frac{Մ}{Ն}$, յորում $\frac{Մ}{Ն}$ է բուն կոտոր, կամ $Մ < Ն$ ուստի եւ < 1։ Օրէն պէտ գայ, թէ Ր ողջոյն թիւ է, եւ $\frac{Մ}{Ն}$ մնացորդ, ուստի եւ

$$\frac{Հ}{Բ} = \frac{Ո}{10^{ն}} = \frac{Ր}{10^{ն}} + \frac{Մ}{Ն \cdot 10^{ն}}\,:$$

Եւ քանզի $\frac{Մ}{Ն} < 1$, ապա ուրեմն $\frac{Մ}{Ն \cdot 10^{ն}} < \frac{1}{10^{ն}}$ (Հ · 87·), եւ որչափ ինչ ն կարողութիւնն աճիցէ, այնչափ նուազին մասունքն, որք ի բաց միջէ առանց ապառելոյ ելանիցեն։ Յառաջելոցս մարթ է ինքնին իմանալ, եթէ յորժամ զ $\frac{Ր}{10^{ն}}$ փոխանակ $\frac{Հ}{Բ}$ կոտորոյ դնիցեմք, յանցմունք լինին. քանզի պակասեն մասունքն $\frac{Մ}{Ն \cdot 10^{ն}}$։ Եւ զի $10^{ն}$ կարէ զամենայն կարողութիւնս 10 թուոյ ցուցանել, ապա ուրեմն այնչափ ինչ նուազեսցի յանցումնն, որչափ ինչ բազմանայցեն մասունքն, որք կարգաւ առանց ապառելոյ ելանիցեն։

Զոր օրինակ, յորժամ զ $\frac{1}{13}$ կոտոր ի տասներորդական կոտոր շրջիցեմք, որ եւ ոչ հազարերորդ մասամբ ի բուն զօրութենէն կոտորոյ հեռանայցէ, ծագէ

$$\begin{array}{l} 1{,}00 : 13 = 76 \\ \underline{90} \\ \underline{12} \end{array}$$

Որովհետեւ երիս դատարկ թիւս յաւելաք, ապա ուրեմն

$\frac{1}{13}=0,076+\frac{12}{13\cdot 10^3}$, որոյ կոտորն

$$\frac{12}{13\cdot 10^3}<\frac{1}{1000}:$$

Արդ քանզի $\frac{1}{13}-\frac{12}{13\cdot 10^3}=0,076$, յորժամ մի միութիւն հազարերորդական յերկոսին անդամն հաւասարութեանն յաւելուցումք, լինիցի հաւասարութիւնս

$$\frac{1}{13}-\frac{12}{13\cdot 10^3}+\frac{13}{13\cdot 10^3}=0,076+\frac{13}{13\cdot 10^3} \text{ ապա}$$

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{13\cdot 10^3}=0,077,$$

յորմէ յայտ է եթէ 0,077 տասներորդական կոտորս առաւել մերձենայցէ զօրութեան $\frac{1}{13}$ կոտորոյն, քան եթէ 0,076, քանզի յառաջնումն յաւելուս $\frac{1}{13\cdot 10^3}$ մասն ի վերայ, իսկ յերկրորդումն թողուս ի բաց զ $\frac{12}{13\cdot 10^3}$ մասունսն: Այլ զի կարիցեմք գիտել, թէ զնշանակն յետին տեղւոյ կոտորոյն պարտ իցէ արդեւք 1 թուով յաւելուլ, պարտ է զմիւս եւս տեղի որ զկնի գալոց իցէ գտանել, եւ տեսանել թէ մեծագոյն իցէ քան զ4. եթէ առաւելուցու քան զ4, յաւել զ1 եւս, զի յայնժամ վերջին մնացեալ մասունքն զոր թողուս ի բաց, մեծագոյն են քան զկէս միութեան յետին տեղւոյն տասներորդական կոտորոյն զոր խնդրես, եւ առաւել լաւ է մի միութիւն յաւելուլ ի վերայ, քան եթէ զբազում միութիւնս թողուլ ի բաց: Արդ սոյնգունակ իբրեւ զ $\frac{1}{13}=0,0769$ գտանիցես, յաւել զմի ի 6, ուստի եւ $\frac{1}{13}=0,077$, զոր մարթես դնել փոխանակ ամենայն անդամոյն, որ զկնի գալոյն իցեն։

Հ Ա Տ Ա Ծ Գ.

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՒԵԼՈՑ, ՀԱՆԵԼՈՑ, ԲԱԶՄԱՑՈՒՑԱՆԵԼՈՑ ԵՒ ԲԱԺԱՆԵԼՈՑ ԶՏԱՍՆԵՐՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐՍ

191. ՅԱՒԵԼՈՒՄՆ տասներորդական կոտորոց այսպիսի օրինակաւ լինի։ Դրոշմեա զամենայն գումարելի կոտորսն ընդ միմեամբք, որպէս զի ամենայն նշանակք թուոց, որ ի նմին տեղւոջ կայցեն, ուղղորդ ընդ միմեամբք անկանիցին։ Արդ՝ քանզի զամենայն նշանակս թուոց, որ յիւրաքանչիւր կարգսն կայցեն, մարթեմք իբրեւ համարիչս կոտորոց ածել զմտաւ, որոց նոյն անուանիչ իցէ ամենեցուն, զորս զհետ գայ, թէ զայն ըստ օրինակի սովորական կոտորոց պարտ իցէ յաւելուլ. վասն այսորիկ պարտ է զհամարիչսն այսինքն զտասներորդական կոտորս, ըստ նմանութեան նշանակաց թուոց գումարել, եւ ի բովանդակութեան դնել զատիկքան ի նմին տեղւոջ, յորում կայր յառաջագոյն։

Ա.	Բ.
5,0159	245,6703
0,703	4038,53
0,64278	78,0035
0,00522	236,349
3,	0,2381
9,3669	4598,7909

192. Ըստ նմին օրինակի լինի եւ հանումն։ Որպէս յառաջագոյն ասացաք (Հ. 19.) կարգեա ըզհանելի թիւն ընդ նուազելի թուով, եւ եթէ տասներորդական տեղիքն պակաս իցեն ի նուազելին կամ ի հանելին, դրոշմեա փոխանակ տեղեացն այնոցիկ թիւս զատարկս, (Հ. 185.) եւ ապա հան զնոսա ի միմեանց ըստ օրինակի ողջոյն թուոց, եւ յայլակերպութեանն

գրոշմեա զտիկսն ի պատշաճական տեղւոջն, յորում կայր յառաջագոյն։

Ա.	Բ.	Գ.
0,067389	0,536802	35,7800
0,065200	0,097820	12,9932
0,002189	0,438982	22,7868

193. Յորժամ զսովորական կոտոր ի տասներորդական կոտոր յաւելուլ կամիցիս, յառաջագոյն զսովորական կոտորն ի տասներորդական կոտոր շրջեա (∸. 186.), եւ ապա յաւել ի միմեանս. ըստ սմին օրինակի արա, յորժամ զսովորական կոտորսն հանցես ի տասներորդական կոտորոց եւ կամ զտասներորդական կոտոր ի սովորական կոտորոց։ Զոր օրինակ,

$3{,}465 + \frac{3}{4} = 3{,}465 + 0{,}75 = 4{,}215$, Նոյնպէս

$\frac{17}{6} - 1{,}34 = 2{,}8333\ldots - 1{,}34 = 1{,}4933\ldots\ldots$

194. Տասներորդական կոտոր ինչ բազմացուցանի 10 թուով կամ որ ինչ եւ իցէ զօրութեամբ 10 թուոյ, $10^{\text{ն}}$, եթէ զտիկսն այնչափ ինչ տեղեօք յառաջակողմն կոյս շարժեսցես, որչափ ինչ միանգամ ն միութիւնս ցուցանիցէ, կամ որչափ ինչ դատարկ թիւք իցեն բազմացուցչին։

Համարեսցուք եթէ $\frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}}} \times 10^{\text{ր}}$։ Ըստ (∸. 168.)

$$\frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}}} \times 10^{\text{ր}} = \frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}} : 10^{\text{ր}}} = \frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}-\text{ր}}}\text{։}$$

Արդ $\frac{\text{ա}}{10^{\text{ն}-\text{ր}}}$ ցուցանէ եթէ այնուհետեւ յա չափն ն—ր տեղիք դատանին, այս ինքն է որչափ ինչ այլակերպութիւն տեղեաց բազմացուցչին եւ բազմացուցանելոյն իցէ։ Զոր օրինակ,

$$4{,}587 \times 10 = 45{,}87$$
$$528{,}3 \times 100 = 52830$$
$$0{,}0083 \times 10^{5} = 830$$
$$27{,}5362 \times 10^{3} = 27536{,}2$$

195. Երկու տասներորդական կոտորք միմեամբք բազմացուցանին, յորժամ զերկուս անուանելին ըստ օրինակի ողջոյն թուոց բազմացուցանիցէ ոք, եւ յարգեանցն այնչափ նիշ տեղիս զատանիցէ յաջմէ ի ձախակողմն կոյս, որչափ նիշ միանգամ տասներորդական տեղիք յերկոսին անուանելին կայցեն։

Դնիցուք գրեցուք, եթէ բազմացուցանելւոյն մ տեղիք իցեն, եւ ի բազմացուցիչն ն տեղիք զատանիցին. որովհետեւ զբազմացուցանելին $\frac{Ա}{10^{մ}}$ չափով, եւ զբազմացուցիչն $\frac{Բ}{10^{ն}}$ չափով մարթեմք դրոշմել, յորս Ա եւ Բ ողջոյն թիւս ցուցանեն, ապա ուրեմն $\frac{Ա}{10^{մ}} \times \frac{Բ}{10^{ն}} = \frac{ԱԲ}{10^{մ+ն}}$։ Արդ ԱԲ արդիւնք են երկուց տասներորդական կոտորոց, որոց տեղիքն $=$ մ $+$ ն, այսինքն բովանդակութիւն տեղեաց երկուց անուանելեաց։ Զոր օրինակ,

2,35	5,372	0,763
4,23	0,053	80
705	16116	61,040 կամ
470	26860	61,04
940	0,284716	
9,9405		

Ապա եթէ յարդիւնսն սակաւ տեղիք զատանիցին. քան զմ $+$ ն տասներորդական տեղիս երկոցունց անուանելեացն, պարտ է յաւելուլ ի ձախակողմն ԱԲ արդեանց թիւս զատարկս մինչեւ $=$ մ $+$ ն իցէ, եւ զայն սաւիքսիւ զատանել։ Զոր օրինակ,

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ 0,07 \\ \hline 0,0175 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12,286 \\ 0,00072 \\ \hline 24572 \\ 86002 \\ \hline 0,00884592 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,035 \\ 0,0062 \\ \hline 70 \\ 210 \\ \hline 0,0002170 \end{array}$$

196. Յորժամ կամիցիս զտասներորդական կոտոր $\frac{ա}{10^{ն}}$ ընդ 10 կամ ընդ կարողութիւն ինչ 10 թուոյ զոր օրինակ $10^{բ}$ բաժանել, զստիքան այնչափ ինչ տեղեօք ի ձախակողմն կոյս տար, որչափ ինչ միանգամ է կարողութիւնն յայտ առնիցէ, կամ որչափ ինչ թիւս զատարկս ունիցի բաժանարարն: Արդ համարեսցուք եթէ $\frac{ա}{10^{ն}} : 10^{բ}$: Իսա (Հ. 173.) $\frac{ա}{10^{ն}} : 10^{բ}$

$$= \frac{ա}{10^{ն} \times 10^{բ}} = \frac{ա}{10^{ն+բ}}$$, յորում $\frac{ա}{10^{ն+բ}}$ ցուցանէ եթէ այնուհետեւ յա չափն $ն+բ$ տեղիք գտանիցին: Զոր օրինակ,

$$528,3 : 100 = 5,283$$
$$17,25 : 1000 = 0,01725$$
$$0,067 : 10^{5} = 0,00000067$$

197. Համարեսցուք եթէ ի բաժանելին $մ$, եւ ի բաժանարարն $ն$ տասներորդական տեղիք կայցեն. արդ զերկոսինն եւս մարթեմք դրոշմել զայս ձեւ օրինակի $\frac{Ա}{10^{մ}}$, եւ $\frac{Բ}{10^{ն}}$, յորս Ա եւ Բ ողջոյն թիւք են. Ա ցուցանէ զնշանակս թուոց, յորոց կազմի բաժանելին, եւ Բ զնշանակս թուոց բաժանարարին: Բաժանեալ

$$\frac{Ա}{10^{մ}} : \frac{Բ}{10^{ն}} = \frac{Ա}{10^{մ}} \times \frac{10^{ն}}{Բ} = \frac{Ա}{Բ} \times \frac{10^{ն}}{10^{մ}} = \frac{Ո \cdot 10^{ն}}{10^{մ}}$$

յորժամ $\frac{Ա}{Բ} = Ո$ իցէ: Զորս զհետ գայ եթէ գտանիցի քանորդն երկուց տասներորդական կոտորոց, յորժամ զտասներորդական կոտորսն իբրեւ ողջոյն թիւս գրիցեմք, եւ ըստ նմանութեան ողջոյն թուոց բաժանիցեմք։ Իսկ թէ քանի ինչ տեղիս պարտ իցէ մեզ ի քանորդէն հատանել, ցուցանէ մ—ն այլակերպութիւն տեղեաց բաժանարարին եւ բաժանելւոյն։ Արդ իբրեւ Ա. ընդ Բ. հաւասարեալ բաժանիցի, յայնժամ Ո. քանորդն ողջոյն թիւ իցէ, յորում

Ա. Եթէ մ $=$ ն, յայնժամ $\frac{\text{Ո.}}{10^{\text{մ}-\text{ն}}} = \frac{\text{Ո.}}{10^{\text{ն}-\text{ն}}} = \frac{\text{Ո.}}{10^0} = \frac{\text{Ո.}}{1} = \text{Ո.}$. ապա ուրեմն Քանորդն Ո. ողջոյն թիւ իցէ, եւ չունիցի այլ եւս փոքր մասունս, յորժամ տեղիք բաժանելւոյն եւ բաժանարարին հաւասար թուով իցեն։ Զոր օրինակ,

$$304,61 : 3,67 = 83$$
$$7,2 : 0,4 = 18$$
$$0,081 : 0,027 = 3$$

Բ. Իսկ եթէ մ $>$ ն, այս ինքն յորժամ բազում տասներորդական տեղիք ի բաժանելին քան ի բաժանարարն գտանիցին, յայնժամ քանորդն $= \frac{\text{Ո.}}{10^{\text{մ}-\text{ն}}}$ իցէ, յորմէ զհետ գայ եթէ ի քանորդէն պարտ եւ պատշաճ է մ—ն տեղիս յաջմէ կողմանէ ընդ ձախակողմն կոյս զատանել, այսինքն այնչափ ինչ տեղիս, որչափ միանգամ բազում իցեն տեղիք բաժանելւոյն քան զբաժանարարին։ Զոր օրինակ,

$$1355,89272 : 23,53 = 57,624$$
$$6,773 : 0,13 = 52,1$$
$$0,0185 : 3,7 = 0,005$$
$$0,00162 : 0,06 = 0,027$$

Այնգունակ, յորժամ բաժանարարն ողջոյն թիւ իցէ կամ ն $=0$, յայնժամ քանորդն $\frac{\text{Ո.}}{10^{\text{մ}}}$, ապա ուրեմն ի Ո. քանորդէն պարտ է այնչափ տեղիս զատանել, որչափ ինչ միանգամ բաժանելւոյն տեղիք իցեն։ Որպէս

$$2534,779 : 73 = 34,723$$
$$0,0144 : 6 = 0,0024$$

Գ․․ Ապա եթէ $\text{մ} < \text{ն}$, այս ինքն յորժամ բազում տասներորդական տեղիք կային ի բաժանարարն քան ի բաժանելին, յայնժամ քանորդն $= \text{Ո·} \times 10^{\text{ն}-\text{մ}}$: Համարեսցուք եթէ ն բաժանարարն փիւ չափ մեծ իցէ քան զմ, ուստի և $\text{ն} = \text{մ} + \text{փ}$ և $\text{փ} = \text{ն} - \text{մ}$: Արդ

$$\frac{\text{Ո·}}{10^{\text{մ}-\text{ն}}} = \frac{\text{Ո·}}{10^{\text{մ}-\text{մ}-\text{փ}}} = \frac{\text{Ո·}}{10^{-\text{փ}}} = \text{Ո·} : \frac{1}{10^{\text{փ}}} = \text{Ո·} \times \frac{10^{\text{փ}}}{1} =$$
$$\text{Ո·} \times 10^{\text{փ}} = \text{Ո·} \times 10^{\text{ն}-\text{մ}},$$

Այս ինքն, պարտ է այնչափ թիւս դատարկս յաւելուլ յաջմէ քանորդին, որչափ ինչ միանգամ բաժանարարն քան զբաժանելին առաւելուցու: Օր օրինակ,

$$0,027 : 0,0009 = 30$$
$$6,25 : 0,0125 = 500$$
$$30548,8 : 7,6372 = 4000$$

Ըստ սմին օրինակի յորժամ ողջոյն թիւ իցէ բաժանելին կամ $\text{մ} = 0$, յայնժամ քանորդն $\text{Ո·} . 10^{\text{ն}}$ իցէ, այս ինքն ի քանորդն Ո· այնչափ դատարկ թիւս յաւելուլ պարտ իցէ, որչափ ինչ տասներորդական տեղիք ի բաժանարարն կային: Օր օրինակ,

$$27 : 0,3 = 90$$
$$15 : 0,05 = 300$$
$$36911 : 5,273 = 7000$$

Արդ յառաջելոյս բղխէ հասարակաց կանոնս: Պարտ և պատշաճ է զբաժանելին և զբաժանարարն իբրև սովորական ողջոյն թիւս համարել, և ըստ օրինակի ողջոյն թուոց բաժանել: Եթէ բաժանելւոյն և բաժանարարին հաւասար չափով տասներորդական տեղիք իցեն, քանորդն ողջոյն թիւ լինիցի, իսկ եթէ չիցեն միմեանց հաւասար տեղիք բաժանելւոյն և բաժանարարին, պարտ է ի քանորդէն այնչափ տեղիս զատանել, որչափ ինչ աւելի իցեն տեղիք բաժանելւոյն քան զբաժանարարին: Բայց սակայն եթէ ի բաժանարարին բազում տեղիք գտանիցին, յայնժամ պարտ է ի քանորդին այնչափ թիւս զատարկս յաւելուլ ընդ աջմէ, որչափ ինչ բաժանարարն քան զբաժանելին առաւելուցու:

198. Բանքս, զորս ցայս վայր ասացաք, են զգիտացն, որք մարթեն դիպել, յորժամ Ա. ընդ Բ. հաւասարաւ բաժանիցի: Ապա եթէ Ա. ընդ Բ. ճշգիւ ոչ բաժանիցի, յայնժամ պարտ է զայն (Տ. 186.) ի տասներորդական կոտոր $\frac{Ո.}{10^{գ}}$ շրջել, եւ մի ըստ միոջէ բաժանել: Արդ

$$\frac{Ա.}{10^{դ}} : \frac{Բ.}{10^{ե}} = \frac{Ա.}{Բ.} \times \frac{10^{ե}}{10^{դ}} = \frac{Ո.}{10^{գ}} \times \frac{10^{ե}}{10^{դ}} = \frac{Ո.\cdot 10^{ե}}{10^{դ+գ}}:$$

Իբրեւ ըստ սմին օրինակի զ$\frac{Ա.}{Բ.}$ ի տասներորդական կոտոր շրջիցես, պարտ է քեզ եւ զէ զատարկ թիւս, զոր մի ըստ միոջէ յաւելեր, համարել փոխանակ տասներորդական տեղեաց բաժանելւոյն, եւ այնչափ եւս տեղիս զատանել ի քանորդին: Զոր օրինակ,

$$73{,}45 : 8 = 9{,}18125$$
$$97{,}268 : 1{,}25 = 77{,}8144$$
$$11{,}68 : 3{,}65 = 3{,}2$$
$$3 : 6{,}25 = 0{,}48$$
$$3{,}7 : 62{,}5 = 0{,}0592$$
$$3{,}7 : 0{,}625 = 5{,}92$$
$$3{,}7 : 0{,}000625 = 5920:$$

Յօրինակին, զորս յանդիման կացուցաք, բաժանելին բաժանեցաւ հաւասարաւ ընդ բաժանարարն, այլ սակայն բազում անգամ դէպ լինի, զի առանց աւարտելոյ յառաջ խաղայ բաժանումն: Զոր օրինակ,

$$0{,}00837 : 0{,}063 = 0{,}13\dot{2}85714\dot{2}85714\ \cdots$$
$$0{,}476 : 0{,}0037 = 128{,}648648\cdots\cdot:$$

199. Բաց յայսցանէ, զորոց մինչեւ ցայս վայր ասացաք, է միւս եւս այլ բաժանման տասներորդա-

կան կոտորոց որ առանց ինչ աշխատութեան եւ կարճ ի կարճոյ կոտորի։

Աներթ է զքանորդն ըստ նմանութեան սովորական կոտորոյ դրոշմել, որոյ համարիչ իցէ բաժանելին, եւ բաժանարարն անուանիչ։ Ըստ 154 համարոյ զօրութիւն կոտորոյն չփոփոխի, յորժամ եւ համարիչն եւ անուանիչն նովին չափով բազմացուցանիցին. արդ բազմացո զբաժանելին եւ զբաժանարարն, եթէ մին եւ եթէ միւսն, կամ երկոքեանն եւս տասանորդական կոտորք իցեն, կարգութեամբ ինչ 10 թուոյ, որով եւ երկոքեանն եւս յողջոյն թիւ շրջիցին. ապա այնուհետեւ զսովորական կոտորն զայն շրջեա ի տասանորդական կոտոր։

Եթէ ի բաժանելին եւ ի բաժանարարն հաւասար թուով իցեն տասանորդական տեղիքն = ն յայնժամ երկոքեանն եւս բազմանան որ ինչ եւ իցէ $10^{\text{ն}}$ կարգութեամբ, յորժամ զտեղիքն բաժանման յերկոցունց եւս ի բաց թողուցուս (Հ. 194)։ Օր օրինակ,

$$5{,}78 : 0{,}63 = \frac{578}{63} = 9{,}1746031746\ldots\text{։}$$

Ապա եթէ չիցեն հաւասար միմեանց տասանորդական տեղիքն, ընդ աջմէ կողմանէ այնր թուոյ, որոյ պակաս իցեն տեղիքն դրոշմեա թիւս զատարկս, մինչեւ հաւասարիցին միմեանց, եւ ապա թող ի բաց զտեղիքն բաժանման։ Որպէս

$$26{,}7035 : 2{,}73 = \frac{267035}{27300} = 9{,}7815\ldots$$
$$0{,}0659 : 0{,}009342 = \frac{65900}{9342} = 7{,}05416\ldots\text{։}$$

Յաղագս շրջելոյ տասանորդական կոտորոց ի սովորական կոտորս։

200. Տասանորդական կոտոր ինչ շրջի ի սովորական կոտոր, յորժամ դրոշմեալ ի ներքոյ զանուա-

նիշն իւր ըստ օրինակի սովորական կոտորոց ըստ 182 համարոյ, ընդ համօրէն չափն բաժանի եւ։ Զոր օրինակ,

$$3,875 = \frac{3875}{1000} = \frac{13}{9} = 3\,\frac{7}{8}$$
$$3,14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50} = 3\,\frac{7}{50}$$

201. Շրջմանց տասներորդական կոտոր ինչ շրջի ի սովորական կոտոր, յորժամ զմի շրջանն միայն դիցես փոխանակ համարչի, եւ փոխանակ անուանչի զանուանիչ տասներորդական, միով միութեամբ նուազեցուցեալ։

Արդ զշրջմանց կոտորս տասներորդական

$$0,123123123\ldots$$

մարթ է ի մասունս մասունս կոտորել զայս ձեւ օրինակի

$$0,123 + 0,000123 + 0,000000123 + \ldots$$
$$\text{կամ}\ \frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} + \ldots$$

Արդ դիցուք գրեսցուք եթէ զայս հասարակացիմն օրինակաւ կամիցիմք դրոշմել։ Շրջանն իցէ Շ, եւ թիւ-տեղեաց շրջանին դ, յայտ է եթէ

$$\frac{\text{Շ}}{10^{\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{2\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{3\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{4\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{5\text{դ}}} + \ldots$$

Եւ քանզի կամք են մեզ զտասներորդական կոտորս ի սովորական կոտոր շրջել, որ միմեանց հաւասար իցեն, դիցուք գրեսցուք եթէ սովորական կոտորն իցէ ֆ, եւ

$$\text{ֆ} = \frac{\text{Շ}}{10^{\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{2\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{3\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{4\text{դ}}} + \ldots$$

իբրեւ զերկուս անդամն եւս հաւասարութեանն $10^{\text{դ}}$ չափով բազմացուցանիցեմք, արդիւնքն եւս հաւասար իցեն միմեանց,

$$10^{\text{դ}}\text{ֆ} = \text{Շ} + \frac{\text{Շ}}{10^{\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{2\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{3\text{դ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{4\text{դ}}} + \ldots$$

իբրեւ հանիցեմք յայսմանէ զվերջին հաւասարութիւնն, այլակերպութիւնն իցէ

$$10^{\text{տ}}\text{ք} - \text{ք} = \text{Շ}, \text{ եւ քանզի (Հ. 129. Ա.)}$$
$$(10^{\text{տ}} - 1)\text{ք} = \text{Շ},$$

եւ եթէ բաժանիցեմք զհաւասարութիւնս ընդ $10^{\text{տ}} - 1$, լինիցի

$$\text{ք} = \frac{\text{Շ}}{10^{\text{տ}} - 1}:$$

Զոր օրինակ, $\text{ք} = 0{,}090909 \ldots$, յորում $\text{Շ} = 9$, եւ $\text{տ} = 2$,

$$\text{ուրեմն } \text{ք} = \frac{9}{10^2 - 1} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}:$$

$$\text{Նոյնպէս } 0{,}142857 = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

Այլ եթէ այնպիսի ինչ իցէ շրջմանց կոտորն, զի յառաջագոյն քան զշրջանն ողջոյն թիւ կամ այլ եւս տասներորդական տեղիք կայցեն, յայնժամ պարտ է զթիւն զայնոսիկ, որ առընթեր շրջանին իցեն, ի բովանդակ տասներորդական կոտորոյն հանել, եւ զայլակերպութիւնն դնել փոխանակ համարչի: Իսկ ի տեղի անուանչի գրոշմել այնչափ ինչ 9, որչափ ինչ միանգամ ի շրջանն նշանակք թուոց կայցեն, եւ ընդ աջմէ նոցա գրել այնչափ թիւս դատարկս, որչափ ինչ միանգամ տասներորդական տեղիք կայցեն յառաջ քան զշրջանն:

Համարեսցուք, եթէ թիւքն որ յառաջ քան զշրջանն իցեն $= \text{ա}$, իսկ տասներորդական տեղիք, որ յառաջ քան զշրջանն $= \text{ռ}$, արդ

$$\text{ք} = \frac{\text{ա}}{10^{\text{ռ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{\text{ռ}+\text{տ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{\text{ռ}+2\text{տ}}} + \frac{\text{Շ}}{10^{\text{ռ}+3\text{տ}}} + \cdots$$

եւ քանզի $\frac{1}{10^{\text{ռ}}}$ է առնելի համօրէն շրջանին, ապա ուրեմն

$$ք = \frac{ա}{10^{ր}} + \frac{1}{10^{ր}}\left(\frac{Շ}{10^{ւ}} + \frac{Շ}{10^{2ւ}} + \frac{Շ}{10^{3ւ}} + \frac{Շ}{10^{4ւ}} + \dots\right)\text{.}$$

եւ քանզի $ք = \frac{ա}{10^{ր}} + \frac{1}{10^{ր}} \times \frac{Շ}{10^{ւ}-1}$

յորմէ եւ $ք = \frac{ա \cdot 10^{ւ} - ա + Շ}{(10^{ւ}-1)\,10^{ր}}$, որով եւ

$$ք = \frac{ա \cdot 10^{ւ} + Շ - ա}{(10^{ւ}-1)\,10^{ր}}\text{։}$$ Զոր օրինակ,

$$17{,}52\dot{3}2\dot{4} = \frac{1752324 - 1752}{99900} = \frac{1750572}{99900} =$$

$$= \frac{194508}{11100} = \frac{64836}{3700} = \frac{16209}{925}$$

Յաղագս համառօտիւ բազմացուցանելոյ եւ բաժանելոյ։

202. Բազում անգամ դէպ լինի զի ի բազմացուցանել տասներորդական կոտորս, յորդեանցն զառաջին տեղիսն եւեթ կամիցիմք առնուլ, եւ զայլսն թողուլ ի բաց։ Համառօտիւք իմն վճարի բազմացուցանելն ըստ առաջիկայ կանոնացս։

Ա. Զբազմացուցիչն կարգեա ընդ այնչափ տեղեօք բազմացուցանելոյն, որչափ ինչ միանգամ կամիցիս առնուլ յորդեանցն. ընդ առաջին աջակողմեան թուով բազմացուցանելոյն դրոշմեա զձախակողմեան առաջին թիւ բազմացուցչին, ընդ երկրորդ աջակողմեան թուովն զերկրորդ ձախակողմեան թիւ բազմացուցչին, եւ զայլսն եւս մի ըստ միոջէ, ըստ օրինակիս ըստ այսմիկ, որով բազմացուցիչն յետս ընդդէմ ընդ բազմացուցանելեան դրոշմիցի։ Զցատարկ վայրսն որ ընդ աջմէ եւ ընդ ահեկէ բազմացուցչին եւ բազմացուցանելոյն կայցեն, համարեա որպէս թէ լցեալ իցեն դատարկ թուովք։

Բ. Ապա սկիզբն արա բազմացուցանել առանձինն մի մի թուով բազմացուցչին զբազմացուցանելին, *ակիզըն արարեալ յայնմանէ, որ ուղղորդ ի վերայ այնր մասնաւոր բազմացուցչին կայցէ, եւ զմասնաւոր արդիւնս դրոշմեա ընդ միմեամբք: Մասնաւոր արդեանց բովանդակութիւնքն են առաջին տեղիքն զոր խնդրես: Այլ յիւրաքանչիւր նուազի, յորժամ սկսանիցիս բազմացուցանել զառաջին թիւն, որ կայցէ ուղղորդ ի վերայ բազմացուցչին, յարդիւնս յաւել եւ զտասնաւոր արդեանց բազմացուցչին, եւ առընթերակաց թուոյն՝ որ կայցէ ընդ աջմէ բազմացուցանելւոյն եւ եթէ միաւոր արդեանցն աւելի իցէ քան զ5, յայնժամ ի տասնաւորն յաւել եւ մեւս եւս: Որով լիցի նուազել վրիպանաց վերջին թուոյ արդեանցն, եւ մի թողցի ի բաց թիւ ինչ ի նմին տեղւոջէ:*

Զոր օրինակ արդիւնք տասներորդական կոտորոցս **3,6498** *եւ* **6,937** *մինչեւ յերկուս տեղիս գտանի պէս զայս օրինակ*

$$\begin{array}{r} 3{,}6498 \\ 7396 \\ \hline 2189 \\ 328 \\ 11 \\ 2 \\ \hline 25{,}30 \end{array}$$

203. *Նոյնպէս համառօտիւք լինի բաժանումն տասներորդական կոտորոց, յորժամ զախու առաջին տեղեաց կամիցիս առնուլ:*

Բաժանեա զբաժանելին ընդ բաժանարարն, որպէս ի բաժանման թուոյ: Յետ զարդիւնս քանե-րորդին եւ բաժանարարին հանելոյ, փոխանակ դնելոյ ի մնացորդն զատարկ թիւ, եղծ եւ ջնջեա թիւ մի յաջմէ կողմանէ բաժանարարին, եւ զայս օրինակ բաժանեա զմնացորդն: Նոյնպէս արա յիւրաքանչիւր նուազի, եւ այսպէս յորժամ մի բառ միայն մի մի նշանակս եղծանիցես, վաղվաղակի կատարեսցի բաժանումն: Այլ զգուշ լեր, յորժամ զբաժանարարն եւ գքանակորդն միմեամբք բազմապատկանիցեն, յարդիւնս յաւելցեն եւ զտասնաւոր արդեանց յետին եղծեալ թուոյ, որպէս ի մօտաւոր օրինակացն ուսանիցիս:

0,439865 : 0,58432 = 0,75278	3,0756 : 0,6437 =
409024	2,5748 4,778
30841	5008
29216	4506
1625	502
1169	450
456	52
409	51
47	1
46	
1	

Հ Ա Տ Ա Ծ Ի

ՅԱՂԱԳՍ ՅԵՌԵԱԼ ԿՈՏՈՐՈՑ

204. Եթէ իցէ կոտոր ինչ անկարգ, որոյ անուանիչն յերկուց մասանց կազմիցի, որոյ առաջին մասն ողջոյն թիւ իցէ, եւ երկրորդ մասն միւս եւս կոտոր, եւ այնր կոտորոյ եւս անուանիչն, եթէ չիցէ յետին անուանիչ, դարձեալ յերկուց մասանց կազմիցի, անուանեալ կոչի կոտորն այն Յեռեալ կոտոր: Այսպիսի կոտորոց հասարակաց օրինակ է

$$\cfrac{\text{ա}}{\text{ա}+\cfrac{\text{բ}}{\text{բ}+\cfrac{\text{գ}}{\text{գ}+\cfrac{\text{դ}}{\text{դ}+\cfrac{\text{ե}}{\text{ե}+\cdots}}}}}$$

կամ եւս $\text{զ}+\cfrac{\text{ա}}{\text{ա}+\cfrac{\text{բ}}{\text{բ}+\cfrac{\text{գ}}{\text{գ}+\cfrac{\text{դ}}{\text{դ}+\cfrac{\text{ե}}{\text{ե}+\cdots}}}}}$

յորում ա, բ, գ, դ.... եւ ա, բ, գ, դ..., չափքն կարեն զամենայն չափս հնարաւորս ցուցանել: Բայց սակայն ընդ անուամբ յեռեալ կոտորոյ այնոքիկ ճանաչին, յորս ամենայն համարիչքն ա, բ, գ, դ,... միում միութեան հաւասար իցեն, եւ անուանիչքն ա, բ, գ, դ, ... ողջոյն թիւս հաստատականս յայտ աբարեալ ցուցանիցեն, յորմէ կարիցես առնուլ ի միտ, եթէ հասարակաց օրինակ յեռեալ կոտորոց իցէ մօտաւոր կոտորս

$$\text{ք}+\cfrac{1}{\text{ա}+\cfrac{1}{\text{բ}+\cfrac{1}{\text{գ}+\cfrac{1}{\text{դ}+\cdots}}}} \quad \text{կամ} \quad \cfrac{1}{\text{ա}+\cfrac{1}{\text{բ}+\cfrac{1}{\text{գ}+\cfrac{1}{\text{դ}+\cdots}}}} \quad \text{ք}=0 \text{ եղեալ:}$$

Մի մի իւրաքանչիւր կոտոր, որ գտանի ի յեռեալ կոտորն, զոր օրինակ $\frac{1}{\text{ա}}$, $\frac{1}{\text{բ}}$, $\frac{1}{\text{գ}}$, $\frac{1}{\text{դ}}$, ... յորջորջի Անդամ յեռեալ կոտորոյ. իսկ թիւն՝ որով կարգ անդամոցն յայտ առնիցի, ասի Ցանդխմանիչ կամ Թիւ անդամոց: Եթէ չափ եւ սահման գուցէ թուոյ անդամոց յեռեալ կոտորոյն, ասի Բովանդակելի, ապա թէ ոչ, Անբաւ: Կամ Շրջմանց յեռեալ կոտոր, յորժամ սահմանեալ ինչ թիւ անդամոցն միով կարգաւ շրջիցի: Զոր օրինակ,

$$\text{ք}+\cfrac{1}{\text{ա}+\cfrac{1}{\text{բ}+\cfrac{1}{\text{գ}+\cfrac{1}{\text{դ}+\cdots+\cfrac{1}{\text{ֆ}+\cfrac{1}{\text{ռ}+\cfrac{1}{\text{ղ}}}}}}}}$$

է յեռեալ կոտոր, որ սահմանեալ ինչ թուով անդամոցն կատարի: Իսկ այս

$$\text{ք}+\cfrac{1}{\text{ա}+\cfrac{1}{\text{բ}+\cfrac{1}{\text{գ}+\cfrac{1}{\text{ա}+\cfrac{1}{\text{բ}+\cfrac{1}{\text{գ}+\cfrac{1}{\text{ա}\ldots}}}}}}} \quad \text{անբաւ:}$$

205. Եթէ ի յեռեալ ինչ կոտորոյ զառաջին կամ զերկրորդ կամ զերրորդ, կամ զ... եւ կամ զր, անդամս միայն առնուցուս, եւ զայլսն որ զհետ դայցեն, թողուցուս ի բաց, եւ զայն՝ զոր առերդ ի սովորական կոտոր շրջիցես, այն անուանեալ կոչի Մօտաւոր կոտոր, կամ Շրջեալ զօրութիւն յեռեալ կոտորոյ: Զոր օրինակ եթէ առնուցումք զյեռեալ կոտորս

$$\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{1}{\text{ք}_3+\cdots}}}$$

եւ զշրջեալ զօրութիւնս ըստ կարգի անդամոցն զայս օրինակ նշանակիցեմք

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0},\ \frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1},\ \frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2},\ \ldots\ \frac{\text{Հ}_\text{ր}}{\text{Ա}_\text{ր}}$$

յայտ է եթէ լինիցի

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0}=\text{ք}_0=\frac{\text{ք}_0}{1},\quad \frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1}=\text{ք}_0+\frac{1}{\text{ք}_1},\quad \frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2}},$$

$$\frac{\text{Հ}_3}{\text{Ա}_3}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{1}{\text{ք}_3}}}$$, այլովքն հանդերձ:

Եւ հասարակաց օրինակաւ,

$$\frac{\text{Հ}_\text{ր}}{\text{Ա}_\text{ր}}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{1}{\text{ք}_3+\cdots\cfrac{1}{\text{ք}_{\text{ր}-1}+\cfrac{1}{\text{ք}_\text{ր}}}}}}$$

206. Եթէ զիարդ գտանիցի կամ եղանիցէ յեռեալ կոտորն ցուցցուք օրինակաւ որ առաջիս կայ:

Համարեցուք եթէ իցէ

$\text{Ա}=\text{ք}_0\text{Բ}+\text{ա}$, *յորում* $\text{ա}<\text{Բ}$ *է, ուստի* $\dfrac{\text{Ա}}{\text{Բ}}=\text{ք}_0+\dfrac{\text{ա}}{\text{Բ}}$

$\text{Բ}=\text{ք}_1\text{ա}+\text{բ}$, „ $\text{բ}<\text{ա}$ „ $\dfrac{\text{Բ}}{\text{ա}}=\text{ք}_1+\dfrac{\text{բ}}{\text{ա}}$

$\text{ա}=\text{ք}_2\text{բ}+\text{գ}$, „ $\text{գ}<\text{բ}$ „ $\dfrac{\text{ա}}{\text{բ}}=\text{ք}_2+\dfrac{\text{գ}}{\text{բ}}$

$\text{բ}=\text{ք}_3\text{գ}+\text{դ}$, „ $\text{դ}<\text{գ}$ „ $\dfrac{\text{բ}}{\text{գ}}=\text{ք}_3+\dfrac{\text{դ}}{\text{գ}}$

$\text{գ}=\text{ք}_4\text{դ}+\text{ե}$, „ $\text{ե}<\text{դ}$ „ $\dfrac{\text{գ}}{\text{դ}}=\text{ք}_4+\dfrac{\text{ե}}{\text{դ}}$

. . . .

$\text{ր}=\text{ք}_{\text{ն}-2}\text{ց}+\text{փ}$ „ $\text{փ}<\text{ց}$ „ $\dfrac{\text{ր}}{\text{ց}}=\text{ք}_{\text{ն}-2}+\dfrac{\text{փ}}{\text{ց}}$

$\text{ց}=\text{ք}_{\text{ն}-1}\text{փ}+1$ „ $1<\text{փ}$ „ $\dfrac{\text{ց}}{\text{փ}}=\text{ք}_{\text{ն}-1}+\dfrac{1}{\text{փ}}$,

եւ եթէ $\text{փ}=\text{ք}_{\text{ն}}$ *դնիցեմք, յայնժամ* $\dfrac{1}{\text{փ}}=\dfrac{1}{\text{ք}_{\text{ն}}}$:

Արդ եթէ զհաւասար զօրութիւն $\dfrac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$ *կոտորոյն ի հասարակաց օրինակէս խնդրիցեմք, գտանեմք*

$$\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}=\text{ք}_0+\frac{\text{ա}}{\text{Բ}}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\cfrac{\text{Բ}}{\text{ա}}}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{\text{բ}}{\text{ա}}}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\cfrac{\text{ա}}{\text{բ}}}}$$

$$=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{\text{գ}}{\text{բ}}}}=\ldots\ldots$$

$$=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{1}{\text{ք}_3+\cdots+\cfrac{1}{\text{ք}_{\text{ն}-2}+\cfrac{\text{փ}}{\text{ց}}}}}}$$

$$=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2+\cfrac{1}{\text{ք}_3+\cdots+\cfrac{1}{\text{ք}_{\text{ն}-2}+\cfrac{1}{\cfrac{\text{ց}}{\text{փ}}}}}}}$$

$$=փ_0+\frac{1}{փ_1+\frac{1}{փ_2+\frac{1}{փ_3+\frac{1}{փ_4+\cdots+\frac{1}{փ_{ն-2}+\frac{1}{փ_{ն-1}+\frac{1}{փ_ն}}}}}}}:$$

Եթէ ընդ օրինակս ընդ այս մանր միտ եդեալ նայիցիմք, վաղվաղակի գտանեմք եթէ զիարդ յեռեալ կոտորն յօրինեալ կազմեցաւ: Յօրինակի անդ ի Հաշուելն զկոտորսն $\frac{ա}{Բ}$, $\frac{բ}{ա}$, $\frac{գ}{բ}$, $\frac{դ}{գ}$, ... ցանդ զՀամարիչն եւ զանուանիչ իւրաքանչիւր կոտորոցն ընդ Համարիչն բաժանեցաք, որով եւ անուանիչն յերկմասնեան չափ շրջեցաւ, որոյ առաջին մասն քաներորդն է եւ երկրորդ մասն մնացորդ. զնոյն կատարեցաք ընդ մնացորդն, դարձեալ ընդ երրորդ եւ ընդ այլ մնացորդսն, մինչեւ ի Հարկէ իսկ ժամանեցաք ի մնացորդ 1, Համարեալ այնպէս, եթէ Ա եւ Բ առ Համեմատութեամբ իրերաց նախաւոր թիւք իցեն, կամ գոնեայ եթէ Ա ընդ Բ ճշգրտիւ ոչ բաժանիցի:

Յաստացելոցս ինքնին ի վերայ Հասանիցես, եթէ այն, որ վասն յեռեալ կոտորոյն ասացաւ ամենեւին զոյգ եւ նման է վարդապետութեանն, զոր վասն զմեծագոյն Համօրէն կշիռ երկուց թուոց գտանելոյ (Տ. 136.) ընծայեցուցաք: Արդ ուրեմն սովորական կոտորս $\frac{Ա}{Բ}$ շրջիցի ի յեռեալ կոտոր, յորժամ զմեծագոյն Համօրէն կշիռ երկուց Ա եւ Բ չափուց խնդրիցէ ոք, եւ զքաներորդսն $փ_0$, $փ_1$, $փ_2$, $փ_3$, $փ_4$ ... որ ելանիցեն կարգաւ մի ըստ միոջէ, զայս օրինակ դրոշմիցէ.

$$\frac{Ա}{Բ}=փ_0+\frac{1}{փ_1+\frac{1}{փ_2+\frac{1}{փ_3+\frac{1}{փ_4+\cdots\cdots}}}}$$

այսինքն է, Հաւասար առաջին քաներորդի, եւ + 1 բաժանեալ ընդ երկրորդ քաներորդն, եւ + 1 բա-

ժանեալ ընդ երրորդ քանորդն , +1 այլովքն հանդերձ :

Եթէ $\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$ *բուն կոտոր իցէ, այսինքն* $\text{Ա} < \text{Բ}$, *յայնժամ* $\text{ք}_0 = 0$ *լինիցի , ուստի եւ*

$$\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}} = \cfrac{1}{\text{ք}_1 + \cfrac{1}{\text{ք}_2 + \cfrac{1}{\text{ք}_3 + \cfrac{1}{\text{ք}_4 + \cdots}}}}$$

Ապա եթէ անբուն կոտոր իցէ $\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$ *կամ* $\text{Բ} < \text{Ա}$, *յայնժամ* ք_0 *ողջոյն թիւ իցէ , ուստի եւ*

$$\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}} = \frac{1}{\text{Բ}:\text{Ա}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{\text{Բ}}{\text{Ա}}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\cfrac{\text{Ա}}{\text{Բ}}}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\text{ք}_0 + \cfrac{1}{\text{ք}_1 + \cfrac{1}{\text{ք}_2 + \cdots}}}}$$

ուստի եւ

$$\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}} = \text{ք}_0 + \cfrac{1}{\text{ք}_1 + \cfrac{1}{\text{ք}_2 + \cfrac{1}{\text{ք}_3 + \cdots}}}$$

Որպիսի ինչ եթէ կամիցիմք զառաջարկեալ կոտորս $\frac{2509}{725}$ *ի յեռեալ կոտոր շրջել , որ զնոյն հաւասար զօրութիւն ունիցի , ըստ օրինակին՝ զորմէ վերագոյն ասացաք , գտանի*

$$\frac{2509}{725} = 3 + \frac{334}{725} = 3 + \frac{1}{725:334} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{57}{334}} =$$

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{334:57}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{49}{57}}} =$$

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{57:49}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{8}{49}}}} =$$

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{49:8}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}}}$$

Որ առաւել դիւրագոյն գտանի, յորժամ զմեծագոյն կշիռն երկուց 2509 եւ 725 չափուցն խնդրիցես : Արդ

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{3}{\frown} & \overset{2}{\frown} & \overset{5}{\frown} & \overset{1}{\frown} & \overset{6}{\frown} & \overset{8}{\frown} \\ 2509 : & 725 : & 334 : & 57 : & 49 : & 8 : & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{2175} & \underline{668} & \underline{285} & \underline{49} & \underline{48} & \underline{8} \\ 334 & 57 & 49 & 8 & 1 & 0 \end{array}$$

ուստի եւ

$$\frac{2509}{725}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}}}$$

207. Եթէ որով օրինակաւ յեռեալ կոտոր ինչ ի սովորական կոտոր շրջիցի, եւ կամ եթէ զիարդ կարիցեմք զշրջեալ զօրութիւն յեռեալ կոտորոյ գտանել, ցուցցուք հասարակաց օրինակաւ :

Համարեսցուք եթէ յեռեալ կոտորն իցէ,

$$\text{պ}_0+\cfrac{1}{\text{պ}_1+\cfrac{1}{\text{պ}_2+\cfrac{1}{\text{պ}_3+\cfrac{1}{\text{պ}_4+\cdots}}}}$$

եւ շրջեալ զօրութիւնքն որ զմիմեանց կնի գայցեն, իցեն

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0},\ \frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1},\ \frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2},\ \frac{\text{Հ}_3}{\text{Ա}_3},\ldots.$$

Արդ շրջեալ զօրութիւնն

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0}=\text{պ}_0=\frac{\text{պ}_0}{1},\quad \frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1}=\text{պ}_0+\frac{1}{\text{պ}_1}=\frac{\text{պ}_0\text{պ}_1+1}{\text{պ}_1},$$

իսկ $\frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}$ կազմի ի $\frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1}$ կոտորոյ, եթէ ի նմա փոխանակ պ_1 չափոյն դիցի $\text{պ}_1+\frac{1}{\text{պ}_2}$, քանզի

$$\frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}=\text{ք}_0+\cfrac{1}{\text{ք}_1+\cfrac{1}{\text{ք}_2}}=\frac{\text{ք}_0\left(\text{ք}_1+\frac{1}{\text{ք}_2}\right)+1}{\text{ք}_1+\frac{1}{\text{ք}_2}}=$$

$$\frac{\text{ք}_0\text{ք}_1\text{ք}_2+\text{ք}_0+\text{ք}_2}{\text{ք}_1\text{ք}_2+1}=\frac{\text{ք}_2(\text{ք}_0\text{ք}_1+1)+\text{ք}_0}{\text{ք}_2\text{ք}_1+1}=\frac{\text{ք}_2\,\text{Հ}_1+\text{Հ}_0}{\text{ք}_2\,\text{Ա}_1+\text{Ա}_0}$$

Բստ նմին օրինակի $\frac{\text{Հ}_3}{\text{Ա}_3}$ կազմի ի $\frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}$ կոտորոյ, եթէ ի նմա փոխանակ ք_2 չափոյն $\text{ք}_2+\frac{1}{\text{ք}_3}$ դրոշմեսցեմք, ուստի

$$\frac{\text{Հ}_3}{\text{Ա}_3}=\frac{\text{ք}_0\,\text{ք}_1\left(\text{ք}_2+\frac{1}{\text{ք}_3}\right)+\text{ք}_0+\text{ք}_2+\frac{1}{\text{ք}_3}}{\text{ք}_1\left(\text{ք}_2+\frac{1}{\text{ք}_3}\right)+1}=$$

$$\frac{\text{ք}_0\text{ք}_1\text{ք}_2\text{ք}_3+\text{ք}_0\text{ք}_1+\text{ք}_0\text{ք}_3+\text{ք}_2\text{ք}_3+1}{\text{ք}_1\text{ք}_2\text{ք}_3+\text{ք}_1+\text{ք}_3}=$$

$$\frac{\text{ք}_3(\text{ք}_0\text{ք}_1\text{ք}_2+\text{ք}_0+\text{ք}_2)+(\text{ք}_0\text{ք}_1+1)}{\text{ք}_3(\text{ք}_1\text{ք}_2+1)+\text{ք}_1}=\frac{\text{ք}_3\,\text{Հ}_2+\text{Հ}_1}{\text{ք}_3\,\text{Ա}_2+\text{Ա}_1}։$$

Այնպէսնաև եթէ յառաջ ևս խաղացցեմք, օրինակ հաշուելոյն չփոփոխի, որով և

$\frac{\text{Հ}_4}{\text{Ա}_4}=\frac{\text{ք}_4\,\text{Հ}_3+\text{Հ}_2}{\text{ք}_4\,\text{Ա}_3+\text{Ա}_2}$, $\frac{\text{Հ}_5}{\text{Ա}_5}=\frac{\text{ք}_5\,\text{Հ}_4+\text{Հ}_3}{\text{ք}_5\,\text{Ա}_4+\text{Ա}_3}$, այլովքն համագերձ. և հասարակաց օրինակաւ

$$\frac{\text{Հ}_\text{ն}}{\text{Ա}_\text{ն}}=\frac{\text{ք}_\text{ն}\,\text{Հ}_{\text{ն}-1}+\text{Հ}_{\text{ն}-2}}{\text{ք}_\text{ն}\,\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{Ա}_{\text{ն}-2}}$$ · այսինքն է,

$\text{Հ}_\text{ն}=\text{ք}_\text{ն}\,\text{Հ}_{\text{ն}-1}\,\text{Հ}_{\text{ն}-2}$, իսկ $\text{Ա}_\text{ն}=\text{ք}_\text{ն}\,\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{Ա}_{\text{ն}-2}$

յորմէ բղխեն հասարակաց օրէնքս, եթէ Ամենայն շղջեալ գործութիւն յերկուց միմեանց կից մասնաւոր կոտորոց կայ։ Այսինքն՝ զի զՆերորդ շղջեալ գործութիւնն գտանիցեմք, պարտ և պատշաճ է զհամարիչն և զանուանիչ (Ն—1)երորդ մասնաւոր կոտորոյն $\text{ք}_\text{ն}$ Ներորդ քանորդաւն բազմացուցանել, և յաւելուլ յարդիւնս համարչին զհամարիչն $\text{Հ}_{\text{ն}-2}$ և յարդիւնս անուանչին զանուանիչն $\text{Ա}_{\text{ն}-2}$ $(\text{ն}-2)$րդ մասնաւոր կոտորոյն, որով ի բովանդակութենէ համարչին կազմիցի $\text{Հ}_\text{ն}$, եւ ի բովանդակութենէ անուանչին $\text{Ա}_\text{ն}$ նրորդ շրջեալ զօրութիւն: Եւ զի առաւել զօրաւոր իցէ, եւ համօրէն ամենայն թուոց պատշաճիցի կանոնս, ցուցցուք զայն զայս ձեւ օրինակի: Եթէ $\frac{\text{Հ}_\text{ն}}{\text{Ա}_\text{ն}}$ զօրութեանն կարի ուղղութեամբ պատշաճիցին օրէնքս, զոր վերագոյն յիշատակեցաք, զորին զհետ գայ, եթէ եւ շրջեալ զօրութեանն $\frac{\text{Հ}_{\text{ն}+1}}{\text{Ա}_{\text{ն}+1}}$ պատշաճական լինիցի եթէ փոխանակ $\text{ք}_\text{ն}$ քանորդին ի նմա դնիցեմք $\text{ք}_\text{ն}+\frac{1}{\text{ք}_{\text{ն}+1}}$: Այսինքն է

$$\frac{\text{Հ}_{\text{ն}+1}}{\text{Ա}_{\text{ն}+1}}=\frac{\left(\text{ք}_\text{ն}+\frac{1}{\text{ք}_{\text{ն}+1}}\right)\cdot\text{Հ}_{\text{ն}-1}+\text{Հ}_{\text{ն}-2}}{\left(\text{ք}_\text{ն}+\frac{1}{\text{ք}_{\text{ն}+1}}\right)\cdot\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{Ա}_{\text{ն}-2}}$$

$$=\frac{\text{ք}_\text{ն}\,\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Հ}_{\text{ն}-1}+\text{Հ}_{\text{ն}-1}+\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Հ}_{\text{ն}-2}}{\text{ք}_\text{ն}\,\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Ա}_{\text{ն}-2}}$$

$$=\frac{\text{ք}_{\text{ն}+1}(\text{ք}_\text{ն}\,\text{Հ}_{\text{ն}-1}+\text{Հ}_{\text{ն}-2})+\text{Հ}_{\text{ն}-1}}{\text{ք}_{\text{ն}+1}(\text{ք}_\text{ն}\,\text{Ա}_{\text{ն}-1}+\text{Ա}_{\text{ն}-2})+\text{Ա}_{\text{ն}-1}}=\frac{\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Հ}_\text{ն}+\text{Հ}_{\text{ն}-1}}{\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Ա}_\text{ն}+\text{Ա}_{\text{ն}-1}}$$

ուրեմն
$$\frac{\text{Հ}_{\text{ն}+1}}{\text{Ա}_{\text{ն}+1}}=\frac{\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Հ}_\text{ն}+\text{Հ}_{\text{ն}-1}}{\text{ք}_{\text{ն}+1}\text{Ա}_\text{ն}+\text{Ա}_{\text{ն}-1}}$$

Ապա ուրեմն եւ օրինակ կազմածոյ շրջեալ զօրութեանցն կարի պատշաճական է եւ $(\text{ն}+1)$երորդ շրջեալ զօրութեանն, եթէ նրորդ մասնաւոր կոտորոյն պատշաճիցի: Արդ քանզի վերագոյն մի ըստ միոջէ տուաք ընծայութիւնս, եթէ օրէնքս որ վասն կազմածոյ մասնաւոր կոտորոց կարի պատշաճականք են երրորդ եւ չորրորդ անդամոյն, ապա եւ հինգերորդին, իսկ արդ եթէ հինգերորդին պատշաճիցի, ուրեմն եւ վեցերորդին, եւ այլոցն ամենեցուն, որ զհետ գայցեն, ուստի եւ ճշմարիտ են օրէնքս ։

Որ ընթեռնուցունն ի միտ առցեն, եթէ որչափ դիպօղ իցէ զանդամն որ զմիմեանց կնի կարգիցին միով նշանագրաւ դրոշմել, եւ զնախին որով ի միմեանց խորիցին, յանդիմանիչս ինքըրդ նշանագրաց յաւելլով նշանակել, քանզի այսու վաղվաղակի յական թօթափել կարէ ոք զկարգ տեղեացն ճանաչել, յորս անդամքն կայցեն։

Դարձեալ ինքնին իսկ յայտ է, զի յորժամ յեռեալ կոտորոյ վախճան եւ կատարած գուցէ, վերջին շրջեալ զօրութիւնն զամփոփական կոտորն ամենեւին նշանակէ, եւ այնմ զոյգ եւ հաւասար է։

Որպիսի ինչ եթէ խնդրիցեմք զշրջեալ զօրութիւնս յեռեալ կոտորոյս

$$2+\frac{1}{5+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{10}}}}}$$

գտանեմք

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0}=2=\frac{2}{1}$$

$$\frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1}=\frac{\text{պ}_0\text{պ}_1+1}{\text{պ}_1}=\frac{2\cdot5+1}{5}=\frac{11}{5}$$

$$\frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}=\frac{4\cdot\text{Հ}_1+\text{Հ}_0}{4\cdot\text{Ա}_1+\text{Ա}_0}=\frac{4\cdot11+2}{4\cdot\ 5+1}=\frac{46}{21}$$

$$\frac{\text{Հ}_3}{\text{Ա}_3}=\frac{2\cdot\text{Հ}_2+\text{Հ}_1}{2\cdot\text{Ա}_2+\text{Ա}_1}=\frac{2\cdot46+11}{2\cdot21+\ 5}=\frac{103}{47}$$

$$\frac{\text{Հ}_4}{\text{Ա}_4}=\frac{3\cdot\text{Հ}_3+\text{Հ}_2}{3\cdot\text{Ա}_3+\text{Ա}_2}=\frac{3\cdot103+46}{3\cdot\ 47+21}=\frac{355}{162}$$

$$\frac{\text{Հ}_5}{\text{Ա}_5}=\frac{10\cdot\text{Հ}_4+\text{Հ}_3}{10\cdot\text{Ա}_4+\text{Ա}_3}=\frac{10\cdot355+103}{10\cdot162+\ 47}=\frac{3653}{1667}$$

ուստի եւ $\frac{3655}{1667}$ է ամփոփական կոտորն, յորմէ յեռեալ կոտորն ծագեալ է։

Այլ զի առաւել դիւրաւ կարիցես զշրջեալ զօրութիւնան գտանել . կարգեա զայս օրինակ։ Դրոշմեա զքանորդսն $փ_0$, $փ_1$, $փ_2$, $փ_3$, ... միով կարգաւ ի վերայ հարթ գծի. ընդ ձախակողմն առաջին քանորդին ընդ հարթ գծին դիջիր զկոտորս $\frac{1}{0}$, որ անուանեալ կոչի Օգնականութեան կոտոր, եւ եթէ $փ_0 = 0$ իցէ, դիջիր $\frac{0}{1}$։ Ապա յետ այնորիկ բաժանեա զ$փ_0$ ընդ 1, եւ եթէ $փ_0 = 0$ իցէ, զ1 ընդ $փ_1$, եւ զորոշմեա զայն ընդ առաջին քանորդաւ, որով առաջին մասնաւոր կոտորն գտանիցի. իսկ զայլ կոտորսն կարիցես ըստ օրինացն վերագոյն ճառելոց գտանել։ Պատճառ առընթերակաց դնելոյ զօգնականութեան կոտորն $\frac{1}{0}$ կամ $\frac{0}{1}$ այս ինչ է, զի այնու կարեմք ի գտանել զերկրորդ շրջեալ զօրութիւնն, զկանոնն զոր վերագոյն եդաք՝ ի կիր արկանել։ Արդ զկարգ իրացս ցուցցուք նովին օրինակաւ՝ զոր յառաջագոյն յիշատակեցաք։

$$\begin{array}{cccccc} & 2. & 5. & 4. & 2. & 3. \\ \hline \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5\cdot2+1}{5\cdot1+0}, & \frac{4\cdot11+2}{4\cdot\ 5+1}, & \frac{2\cdot46+11}{2\cdot21+5}, & \frac{3\cdot103+46}{3\cdot47+21}, \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ \hline \frac{10\cdot355+103}{10\cdot162+\ 47} \end{array}$$

Ըստ նմին օրինակի գտանին շրջեալ զօրութիւնքն յետեալ կոտորոյս,

$$+ = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}}}}$$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Քանորդք} & & 3, & 5, & 1, & 4, & 7, \\ \hline \text{Մասնաւոր կոտորք} & \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{5}{16}, & \frac{6}{19}, & \frac{29}{92}, & \frac{209}{663} \end{array}$$

ուստի եւ $+ = \frac{209}{663}$։

Դիցուք գրեցուք եթէ իցէ

$$\frac{\text{Հ}}{\text{Ա}}=\text{ա}_0+\frac{1}{\text{ա}_1+\frac{1}{\text{ա}_2+\frac{1}{\text{ա}_3+\cdots+\frac{1}{\text{ա}_{\text{ն}-1}+\frac{1}{\text{ա}_\text{ն}+\frac{1}{\text{ա}_{\text{ն}+1}+\cdots}}}}}}$$

Արդ վասն կարճ ի կարճոյ գիրսն կարդելոյ, զբուն զօրու-թիւն յեռեալ կոտորոյս նշանակեմք ղ չափով կամ $\frac{\text{Հ}}{\text{Ա}}=\text{ղ}$, իսկ զշրջեալ զօրութիւնսն ըստ իւրաքանչիւր կարգաց զայս օրինակ,

$$\frac{\text{Հ}_0}{\text{Ա}_0}=\text{ք}_0,\ \frac{\text{Հ}_1}{\text{Ա}_1}=\text{ք}_1,\ \frac{\text{Հ}_2}{\text{Ա}_2}=\text{ք}_2\ \cdots\ \frac{\text{Հ}_\text{ն}}{\text{Ա}_\text{ն}}=\text{ք}_\text{ն}:$$

Այլ սակայն յարժամ կարեւոր դէպք դիպիցին, զերկուսինն եւս ի կիր արկանեմք: Դարձեալ զշրջեալ զօրութիւնսն ք_1, ք_3, ք_5, ք_7, ... $\text{ք}_{2\text{ն}+1}$, $\text{ք}_{2\text{ն}+3}$, ... կոչեմք Մասնաւոր կոտորս զոյգ կարգի, կամ Զոյգ մասնաւոր կոտորս, եւ զսո-րին հակառակն զկոտորսն ք_2, ք_4, ք_6, ... $\text{ք}_{2\text{ն}-2}$, $\text{ք}_{2\text{ն}}$, ... Մասնաւոր կոտորս անզոյգ կարգի, կամ համառօտիւք Ան-զոյգ մասնաւոր կոտորս: Այլ սակայն եթէ $\text{ա}_0=0$ իցէ. փոփոխին եւ անուանքն հակառակ առաջնոյն:

208. Եթէ ի յեռեալ կոտորոյ զանդամն ինչ ի յետին անդամոց ի բաց թողուցուս, մնացեալ մաս-նաւոր կոտորն մեծագոյն կամ փոքրագոյն է քան զբուն զօրութիւնն ղ, ըստ զոյգ կամ անզոյգ լինելոյ մասնաւոր կոտորոյն այնորիկ:

Արդ զկարգ անդամոյն, որ ի բաց թողուցուն, ըստ իւրեանց կարգին նշանակեսցուք զայս ձեւ օրի-նակի ր_1, ր_2, ր_3, ր_4, ..., ուստի եւ

$$\frac{\text{Հ}}{\text{Ա}}=\text{ղ}=\text{ա}_0+\text{ր}_1=\text{ա}_0+\frac{1}{\text{ա}_1+\text{ր}_2}=\text{ա}_0+\frac{1}{\text{ա}_1+\frac{1}{\text{ա}_2+\text{ր}_3}}$$

$$=\text{ա}_0+\frac{1}{\text{ա}_1+\frac{1}{\text{ա}_2+\frac{1}{\text{ա}_3+\text{ր}_4}}}$$

$$=\text{ա}_0+\frac{1}{\text{ա}_1+\frac{1}{\text{ա}_2+\frac{1}{\text{ա}_3+\frac{1}{\text{ա}_4+\text{ր}_5}}}}$$ = այլովքն հանդերձ:

Արդ քանզի $\text{ղ}=\text{ա}_0+\text{ր}_1$, ուրեմն $\text{ա}_0<\text{ղ}$ կամ $\text{ք}_0<\text{ղ}$:

Դարձեալ՝ քանզի $\frac{1}{ա_1} > \frac{1}{ա_1+բ_2}$ (Տ. 88.), ուրեմն

$ա_0+\frac{1}{ա_1} > ա_0+\frac{1}{ա_1+բ_2}$, այսինքն $փ_1 > ղ$: Այն օրինակ, քանզի $\frac{1}{ա_2} > \frac{1}{ա_2+բ_3}$, ուրեմն

$$ա_1+\frac{1}{ա_2} > ա_1+\frac{1}{ա_2+բ_3}, \text{ ուստի եւ}$$

$$\frac{1}{ա_1+\frac{1}{ա_2}} < \frac{1}{ա_1+\frac{1}{ա_2+բ_3}} \quad (\text{Տ. } 88.)$$

ուստի եւ

$$ա_0+\frac{1}{ա_1+\frac{1}{ա_2}} < ա_0+\frac{1}{ա_1+\frac{1}{ա_2+բ_3}}, \text{ այսինքն } փ_2 < ղ$$

Այսմին նման գտանի $փ_3 > ղ$, $փ_4 < ղ$, $փ_5 > ղ$, այլովքն հանդերձ, եւ հասարակաց իմն օրինակաւ $փ_{2ն} < ղ$, $փ_{2ն+1} > ղ$: Այսմին հակառակ, եթէ $ա_0=0$ իցէ, ամենեւին հակառակքն երեւին:

209. Տարբերութիւն երկուց մասնաւոր կոտորոց, որ կից զմիմեանց կնի գան, է ± 1, բաժանեալ ընդ արդիւնս անուանչաց կոտորոցն այնոցիկ:

Դիցուք գրեսցուք եթէ $\frac{Ն_{ն-1}}{Ա_{ն-1}}$, $\frac{Ն_ն}{Ա_ն}$, եւ $\frac{Ն_{ն+1}}{Ա_{ն+1}}$ մասնաւոր կոտորք իցեն միմեանց կիցք. արդ

$$\frac{Ն_{ն-1}}{Ա_{ն-1}} - \frac{Ն_ն}{Ա_ն} = \frac{Ն_{ն-1}Ա_ն - Ն_ն Ա_{ն-1}}{Ա_{ն-1}Ա_ն} =$$

$$\frac{-(Ն_ն Ա_{ն-1} - Ն_{ն-1}Ա_ն)}{Ա_{ն-1}Ա_ն} \text{ եւ}$$

$$\frac{Ն_ն}{Ա_ն} - \frac{Ն_{ն+1}}{Ա_{ն+1}} = \frac{Ն_ն Ա_{ն+1} - Ն_{ն+1}Ա_ն}{Ա_ն Ա_{ն+1}} =$$

$$\frac{Ն_ն(ա_{ն+1}Ա_ն + Ա_{ն-1}) - (ա_{ն+1}Ն_ն + Ն_{ն-1})Ա_ն}{Ա_ն Ա_{ն+1}} \quad (\text{Տ. } 207)$$

$$= \frac{Ն_ն Ա_{ն-1} - Ն_{ն-1}Ա_ն}{Ա_ն Ա_{ն+1}} = \frac{-(Ն_{ն-1}Ա_ն - Ն_ն Ա_{ն-1})}{Ա_ն Ա_{ն+1}}$$

Արդ եթէ ընդ երկուս այլակերպութիւնս միա եղեալ նայիցիս, տեսանես եթէ համարիչքն երկոցունց, նոյն չափք են, այլ հակառակ նշանօք։ Արդ եթէ այդ այդպէս իցէ, ուրեմն

$$\text{Հ}_0\text{Ն}_1-\text{Հ}_1\text{Ն}_0=\text{ա}_0\cdot\text{ա}_1-(\text{ա}_0\text{ա}_1+1)\cdot 1=-1,$$

զորս զհետ գայ, եթէ եւ

$$\text{Հ}_1\text{Ն}_2-\text{Հ}_2\text{Ն}_1=-(-1)=+1$$
$$\text{Հ}_2\text{Ն}_3-\text{Հ}_3\text{Ն}_2=-1,$$
$$\text{Հ}_3\text{Ն}_4-\text{Հ}_4\text{Ն}_3=+1$$

. . . . եւ հասարակաց օրինակաւ

$$\text{Հ}_{\text{ն}-1}\text{Ն}_{\text{ն}}-\text{Հ}_{\text{ն}}\text{Ն}_{\text{ն}-1}=\pm 1։$$

Ապա ուրեմն. Համարիչն այլակերպութեան երկուց մասնաւոր կոտորոց, որ զմիմեանց կնի կարգիցին է $+1$ կամ -1, ըստ Ն թուոյ անդամոցն զոյգ կամ անզոյգ լինելոյ. եւ այս ± 1 այլակերպութիւնս բաժանեալ ընդ արդիւնս անուանչաց երկուց մասնաւոր կոտորոցն։ Այսինքն է

$$\frac{\text{Հ}_{\text{ն}-1}}{\text{Ն}_{\text{ն}-1}}-\frac{\text{Հ}_{\text{ն}}}{\text{Ն}_{\text{ն}}}=\frac{\pm 1}{\text{Ն}_{\text{ն}-1}\text{Ն}_{\text{ն}}}\ \text{կամ}\ \text{ք}_{\text{ն}-1}-\text{ք}_{\text{ն}}=\frac{\pm 1}{\text{Ն}_{\text{ն}-1}\text{Ն}_{\text{ն}}}$$

Ի կանոնաց անտի յօրինուածոյ մասնաւոր կոտորոց, զորմէ (Հ. 207.) ճառեցաք, յայտնապէս երեւի, եթէ անուանիչքն շրջեալ զօրութեանց մի ըստ միոջէ աճեն, որպէս զի լինել $\text{Ն}_0<\text{Ն}_1<\text{Ն}_2<\text{Ն}_3$. եւ հասարակաց օրինակաւ $\text{Ն}_{\text{ն}-1}<\text{Ն}_{\text{ն}}$։ Սորին զհետ գայ եթէ

$$\text{Ն}_0\text{Ն}_1<\text{Ն}_1\text{Ն}_2<\text{Ն}_2\text{Ն}_3<\text{Ն}_3\text{Ն}_4<\cdots$$

եւ համօրէն իմն օրինակաւ $\text{Ն}_{\text{ն}-2}\text{Ն}_{\text{ն}-1}<\text{Ն}_{\text{ն}-1}\text{Ն}_{\text{ն}}$. ուստի եւ

$$\frac{1}{\text{Ն}_0\text{Ն}_1}>\frac{1}{\text{Ն}_1\text{Ն}_2}>\frac{1}{\text{Ն}_2\text{Ն}_3}>\frac{1}{\text{Ն}_3\text{Ն}_4}>\cdots$$

եւ համօրէն օրինակաւ

$$\frac{1}{\text{Ն}_{\text{ն}-2}\text{Ն}_{\text{ն}-1}}>\frac{1}{\text{Ն}_{\text{ն}-1}\text{Ն}_{\text{ն}}}։$$

Եւ քանզի

$$\frac{1}{\text{Ն}_0\text{Ն}_1}=-(\text{ք}_0-\text{ք}_1)=\text{ք}_1-\text{ք}_0,\ \text{եւ}\ \frac{1}{\text{Ն}_1\text{Ն}_2}=\text{ք}_1-\text{ք}_2$$

$$\frac{1}{Ա_2 Ա_3} = -(ք_2 - ք_3) = ք_3 - ք_2, \text{ եւ } \frac{1}{Ա_3 Ա_4} = ք_3 - ք_4$$
$$\frac{1}{Ա_4 Ա_5} = -(ք_4 - ք_5) = ք_5 - ք_4, \text{ եւ } \frac{1}{Ա_5 Ա_6} = ք_5 - ք_6$$

եւ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$\frac{1}{Ա_{2ն} Ա_{2ն+1}} = -(ք_{2ն} - ք_{2ն+1}) = ք_{2ն+1} - ք_{2ն}, \text{ եւ }$$
$$\frac{1}{Ա_{2ն+1} Ա_{2ն+2}} = ք_{2ն+1} - ք_{2ն+2}$$

ապա ուրեմն եթէ փոխանակ այլակերպութեանց, զհաւասար զօրութիւնս դնիցեմք, լինիցի

$$(ք_1 - ք_0) > (ք_1 - ք_2) > (ք_2 - ք_3) > (ք_3 - ք_4) > (ք_4 - ք_5) >$$
$$(ք_5 - ք_6) > \ldots \text{ եւ համօրէն օրինակաւ}$$
$$(ք_{2ն+1} - ք_{2ն}) > (ք_{2ն+1} - ք_{2ն+2}) > (ք_{2ն+3} - ք_{2ն+3}) > \ldots$$

Այսինքն է. Այլակերպութիւնքն մասնաւոր կոտորոց, որ կից միմեանց իցեն, ըստ աճելոյ յանդիմանչացն, նուազեն. եւ քանզի բուն իսկ զօրութիւնն $\frac{Տ}{Ա} = ղ$ *ընդ մէջ երկուց միմեանց կից շրջեալ զօրութեանցն կայ, զայրին զհետ գայ, զի մասնաւոր կոտորք, որչափ ինչ աճիցեն յանդիմանիչքն այնչափ ի բուն զօրութիւն* $\frac{Տ}{Ա}$ *մերձենան, եւ վասն այսորիկ իսկ յիրաւի Մերձաւորութեան կոտորք անուանեալ կոչին:*

210. *Այլակերպութիւն մերձաւորութեան կոտորոյ* $ք_ն$ *եւ բուն զօրութեանն* $ղ$ *փոքրագոյն է քան զ*1 *բաժանեալ ընդ երկրորդ կարողութիւն անուանչի մասնաւոր կոտորոյն այնորիկ:*

Քանզի որովհետեւ

$$ք_ն - ք_{ն+1} = \frac{\pm 1}{Ա_ն Ա_{ն+1}}, \text{ եւ } ք_ն - ղ < ք_ն - ք_{ն+1} \ (Տ.\ 208),$$

$$\text{զի } ա_0 + \frac{1}{ա_1} + \cdots + \frac{1}{ա_ն} > ա_0 + \frac{1}{ա_1} + \cdots + \frac{1}{ա_ն + ռ_{ն+1}}$$

ուստի եւ $ք_ն > ղ > ք_{ն+1}$ *ապա ուրեմն*

$$ռ - ղ < \frac{\pm 1}{Ն_ն Ն_{ն+1}} = \frac{\pm 1}{Ն_ն (ք_{ն+1} Ն_ն + Ն_{ն+1})} = \frac{\pm 1}{ք_{ն+1} Ն_ն^2 + Ն_ն Ն_{ն-1}}$$

ապա ուրեմն առաւել եւս $ռ - ղ < \frac{\pm 1}{(Ն_ն)^2}$ (Հ. 153.)

211. Համարիչն եւ անուանիչն մերձաւորութեան կոտորոյ առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւոր թիւք են։

Քանզի եթէ $Հ_ն$ չափուց զատ ի 1 թուոյ այլ համօրէն կշիռ կ ունիցէ, յայնժամ հարկ է եւ $Հ_ն Ն_{ն+1} - Հ_{ն+1} Ն_ն$ չափուց (Հ. 103) ընդ այն բաժանել. այլ սակայն քանզի $Հ_ն Ն_{ն+1} - Հ_{ն+1} Ն_ն = \pm 1$ (Հ. 209.), ուրեմն $\frac{\pm 1}{կ}$ ամբողջն թիւ լինիցի, որ անպատեհ իմն է։

212. Օգուտ եւ շահ յեռեալ կոտորոց, երեւիցի ի բարձրագոյն ուսողութեան։ Քանզի յորժամ այնպիսի իմն դէպք պատահիցեն, զի փոխանակ կոտորոց ինչ, որ երկայնաձիգ նշանակօք գրոշմեալ իցեն, եւ կամ համարիչն եւ անուանիչն առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւոր թիւք իցեն, զորս չիցէ մարթ կարճ ի կարճոյ գրոշմել, այնմ յեռեալ կոտորս ի թիկունս հասանիցէ։ Քանզի իբրեւ (Հ. 206) զամփոփական կոտորն ի յեռեալ կոտոր շրջիցես, եւ ապա մի ըստ միոջէ զշրջեալ զօրութիւնս (Հ. 207) գտանիցես, այնուհետեւ մարթ է քեզ զմին ի շրջեալ զօրութեանց անտի, որ սակաւ նշանակս ունիցի, փոխանակ առաջին կոտորոյ դնել։ Քանզի որպէս վերագոյն (Հ. 210) տեսաք, այլակերպութիւնն որ ի միջի բուն զօրութեան, եւ այնր մերձաւորութեան կոտորոյն իցէ, է $< \frac{\pm 1}{(Ն_ն)^2}$

Զոր օրինակ եթէ կամիցիմք զկոտորս $\frac{10000000000}{31415926536}$ համառօտիւք գրոշմել. գտեալ քանորդքն են 3, 7, 15, 1, 292, …: Իսկ շրջեալ զօրութիւնքն

$$\frac{7}{22},\ \frac{106}{333},\ \frac{113}{355},\ \frac{33102}{103993},\ldots$$

յորոց կարիցես զ $\frac{113}{355}$, փոխանակ առաջին կոտորոյն գնել, քանզի միւսն որ զհետ գայ կարի իսկ մեծ է, եւ $\frac{113}{355}$ կոտոր եւ առաջին կոտորն եւ ոչ 0,00000003 մասամբք ի միմեանց այլակերպք են: Զի

$$\frac{10000000000}{31415926536} = 0{,}318309886\ldots$$

$$\text{իսկ}\quad \frac{113}{355} = 0{,}318309859\ldots$$

Այլակերպութիւն նոցա է $= 0{,}000000027$

Գ Լ Ո Ւ Խ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ ԵՒ ԱՐՄԱՏՈՑ

Հ Ա Տ Ա Ծ Ա

ՑԱՂԱԳՍ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ

213. Արդիւնք *բազում հաւասար թուոց անըւանեալ կոչի կարողութիւն այնր թուոյ, որպէս թէ* 4, 8, 16, *այլովքն հանդերձ, կարողութիւնք իմն են* 2 *թուոյ, քանզի* $4=2.2$, *նոյնպէս* $8=2.2.2$: *Թիւն յորմէ կարողութիւնն կազմիցի, յորջորջի Արմատ այնր կարողութեան, որպէս թէ* 2 *արմատ է* 4, 8, 16 *թուոց:*

214. *Որովհետեւ մարթեմք զանհելին բազում անգամ միմեամբք բազմացուցանել, սաստիկ կարիցես ինքնին ի վերայ հասանել, եթէ որպէս եւ որով օրինակաւ ի միոյ արմատոյ անբաւ կարողութիւնք ծնանիցին, որք ի միմեանց զատեալ որոշին բազմութեամբ հաւասար առնելեացն, որ ի նոսա գտանիցին: Արդ զայն ձեւ օրինակի, զոր տացաք,* $ա \times ա$ *կամ* $ա^2$, *Երկրորդ կարողութիւն է* $ա$ *արմատոյ, որ իբրեւ միւսանգամ նովին* $ա$ *արմատով բազմացուցանիցի* $ա \times ա \times ա$ *կամ* $ա^3$, *ծագէ Երրորդ կարողութիւն* $ա$ *արմատոյն: Նոյնպէս* $ա^3 \times ա = ա^4$ *Չորրորդ կարողութիւն է, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ: Հասարակաց իմն օրինակաւ* $ա^ն$ *կարէ զամենայն կարողութիւնս* $ա$ *արմատոյն ցուցանել, յորում* $ա$ *այնչափ ինչ անգամ իբրեւ առնելի գտանիցի, որչափ ինչ* $ն$ *միութիւնս ցուցանիցէ:*

Ի *ստորեւ պատկերի աստ նշանակեմք զերիս առաջին կարողութիւնս թուոց մինչեւ ց9:*

Արմատ կամ առաջին կարողութիւն	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Երկրորդ կարողութիւն . .	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Երրորդ կարողութիւն . . .	1	8	27	64	125	216	343	512	729

215. Միութիւնն քանիցս անգամ ինքն ինքեամբ բազմացուցանիցի, ածէ արդիւնս 1, ուստի եւ $1^2=1\cdot1=1$, $1^3=1\cdot1\cdot1=1$, այլովքն հանդերձ։ Զորս գրել գայ, եթէ ամենայն կարողութիւն 1ոյ է 1. կամ $1^{մ}=1$։

216. Ամենայն թիւ որպիսի ինչ եւ իցէ ցուցիչ յինքեան վերայ ունիցի, առնէ մի եւեթ կարողութիւն։

Քանզի կարողութիւնն կամ արդիւնք է եւ կամ քանորդ՝ արդ եթէ արդիւնք իցէ երկուց թուոց, յայտ է եթէ երկուց նոյն առնելեաց մի եւեթ արդիւնք է. ապա եթէ քանորդ իցէ կարողութիւնն, յայտ է եթէ նոյն բաժանելոյ եւ բաժանարարի մի քանորդ է, քանզի եթէ միւս եւս այլ քանորդ իցէ զատ յառաջնոյն, հարկ է զի յորժամ զայն բաժանարարաւ ըք բազմացուցանիցէ, արդիւնքն բաժանելին լինիցի, որ անպատեհ իմն է եւ հակառակ 62 համարոյ։ Զօրին գրել գայ, զի

Եթէ հաւասար թուոց հաւասար ցուցիչք իցեն, եւ կարողութիւնքն նոյա միմեանց հաւասարք են։

217. Եթէ չհաւասար չափուց հաւասար հաստատական ցուցիչք իցեն, մեծագոյն կարողութիւն այն է, որոյ մեծագոյն իցէ արմատն։

Քանզի $ա^{մ}$ յայնչափ ինչ առնելեաց կազմի յորչափ ինչ առնելեաց կազմիցի $բ^{մ}$. արդ քանզի $ա > բ$, ապա $ա^{մ} > բ^{մ}$։

218. Եթէ չհաւասար չափք հաւասար ցուցիչս ուրացականս յիւրեանց վերայ ունիցին, այն կարողութիւն մեծագոյն է, յորում փոքրագոյն իցէ արմատն։

Վասնզի $ա > բ$. զօրին զհետ գայ $ա^{մ} > բ^{մ}$, ուս-տի եւ $\frac{1}{ա^{մ}} < \frac{1}{բ^{մ}}$ կամ $ա^{-մ} < բ^{-մ}$ (Ն. 95. Գ..)։

219. Յորժամ հաւասար թուոց չհաւասար հաս-տատական ցուցիչք իցեն, թիւն յորոյ վերայ մեծա-գոյն ցուցիչն կայցէ մեծագոյն կամ փոքրագոյն է քան զմեւսն, ըստ արմատոյն մեծագոյն կամ փոքրագոյն լինելոյ քան զ1։

Վասնզի եթէ $մ > ն$, յայնժամ հարկ է զի ի $ա^{մ}$ ամենայն անդամք $ա^{ն}$ չափոյն գտանիցին եւ աւելի եւս մի կամ բազում թուով։ Իսկ արդ $ա > 1$, ուրեմն մնա-ցեալ անդամքն մեծագոյն իցեն քան զ1, ուստի եւ արդիւնքն $ա^{մ} > ա^{ն}$։ Այլ եթէ զօրին հակառակն $ա < 1$ իցէ, հարկ է եւ այլոց անդամոցն փոքր քան զ1 լինել, եւ աստի իսկ արդիւնքն $ա^{մ} < ա^{ն}$։

220. Եթէ հաւասար չափուց չհաւասար ուրա-ցական ցուցիչք իցեն, կարողութիւնն՝ յորում մեծա-գոյն ցուցիչն գտանիցի, մեծագոյն կամ փոքրագոյն է քան զմեւսն ըստ մեծագոյն կամ փոքրագոյն լի-նելոյ արմատոյն քան զ1։

Վասնզի եթէ $մ > ն$. զօրին զհետ գայ $ա^{մ} \gtrless ա^{ն}$, ուստի եւ $\frac{1}{ա^{մ}} \lessgtr \frac{1}{ա^{ն}}$, կամ $ա^{-մ} \gtrless ա^{-ն}$, ըստ $ա > 1$ կամ $ա < 1$ լինելոյ։

221. Ամենայն թիւ բազմացուցանիցի 10ամբք, եթէ ընդ աջմէ կողմանէ թուոյն դիցես 0։ Արդ

$$10^{1} = 10$$
$$10^{2} = 10 \times 10 = 100$$
$$10^{3} = 100 \times 10 = 1000$$
$$10^{4} = 1000 \times 10 = 10000,$$ այլովքն հանդերձ։

Այս ուրեմն 10 համբառնայ ի կարողութիւն մ, յոր-ժամ ընդ աջմէ կողմանէ 1 թուոյ այնչափ ինչ թիւս դատարկս յաւելուցուս, որչափ ինչ միութիւնք ի ցուցիչն մ կայցեն։

222. Եթէ զիարդ բազմացուցանիցին եւ բաժանիցին այլ եւ այլ կարողութիւնք միոյ արմատոյ, ասացաք ի (Տ. 74, 94, 95)։

223. Քանզի $\frac{աբ^{-ր}}{գ} = \frac{ա}{գ} \times բ^{-ր} =$

$$\frac{ա}{գ} \times \frac{1}{բ^{ր}} = \frac{ա}{գբ^{ր}},$$

եւ դարձեալ $\frac{ա^{մ}}{բգ^{ր}} = \frac{ա^{մ}}{բ} : գ^{ր} = \frac{ա^{մ}}{բ} \times գ^{-ր}$. քանզի

$$գ^{ր} = 1 : \frac{1}{գ^{ր}} = 1 : գ^{-ր} = \frac{1}{գ^{-ր}},$$ ապա ուրեմն

$$\frac{ա^{մ}}{բ} : \frac{1}{գ^{-ր}} = \frac{ա^{մ}}{բ} \times գ^{-ր} = \frac{ա^{մ}գ^{-ր}}{բ}$$

Զորոյ զհետ գայ. եթէ զամենայն կարողութիւն, որ իբրեւ առնելի ի համարիչ կոտորոյ գտանիցի, առանց ինչ զօրութեան կոտորոյն շրջելոյ, մարթ է յանուանիչն ածել, եւ դարձեալ զամենայն առնելիս, որ յանուանիչն գտանիցին, ի համարիչ անդր փոխել, յորժամ զնշանս ցուցչաց չափուցն, զորս փոփոխես, ի հակառակ նշան շրջիցես։ Զոր օրինակ,

$$\frac{ա^3բ^{-2}գ}{զ^5ժ^{-3}ք} = \frac{ա^3գժ^3}{բ^2զ^5ք} = \frac{գք^{-1}}{ա^{-3}բ^2զ^5ժ^{-3}} = \ldots.$$

$$\frac{ք^3 - աք}{բգ^3} = \frac{ք(ք^2 - ա)}{բգ^3} = \frac{ք^2 - ա}{բգ^3ք^{-1}} = \ldots.$$

$$\frac{ա^2ք(գ^2 - ք^2)^{մ}}{դ} = \frac{ա^2ք}{դ(գ^2 - ք^2)^{-մ}} = ա^{-2}դք^{-1}(գ^2 - ք^2)^{-մ}$$

$$\frac{5}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{3^2} = 5 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot 9^{-1}.$$

224. Ի 74, 94, 95 կանոնայն ընծայութենէ, զոր ասացաք վասն բազմացուցանելոյ եւ բաժանելոյ չափս, որոյ հաստատական ցուցիչք իցեն, ցուցանին եւ օրինակք բազմացուցանելոյ եւ բաժանելոյ չափս, որ յուրացական կարողութիւնս իցեն համբարձեալ։

Ա. $ա^{մ}\times ա^{-ն}=ա^{մ}\times\frac{1}{ա^{ն}}=\frac{ա^{մ}}{ա^{ն}}=ա^{մ-ն}$

Բ. $ա^{-մ}\times ա^{-ն}=\frac{1}{ա^{մ}}\cdot\frac{1}{ա^{ն}}=\frac{1}{ա^{մ+ն}}=ա^{-մ-ն}$,

որոց երկոցունցն հասարակաց, իմն օրինակ է

$$ա^{\pm մ}\times ա^{\pm ն}=ա^{\pm մ \pm ն}$$

Գ. $ա^{մ}:ա^{-ն}=ա^{մ}:\frac{1}{ա^{ն}}=ա^{մ}.ա^{ն}=ա^{մ+ն}=ա^{մ-(-ն)}$

Դ. $ա^{-մ}:ա^{ն}=\frac{1}{ա^{մ}}:ա^{ն}=\frac{1}{ա^{մ}.ա^{ն}}=\frac{1}{ա^{մ+ն}}=ա^{-մ-ն}$

Ե. $ա^{-մ}:ա^{-ն}=\frac{1}{ա^{մ}}:\frac{1}{ա^{ն}}=\frac{1}{ա^{մ}}\times\frac{ա^{ն}}{1}=\frac{ա^{ն}}{ա^{մ}}=ա^{ն-մ}$

$$=ա^{-մ+ն}=ա^{-մ-(-ն)}$$

որոց հասարակաց իմն օրինակ է

$$ա^{\pm մ}:ա^{\pm ն}=ա^{\pm մ \mp ն}=ա^{\pm մ-(\pm ն)}\,:$$

Ապա ուրեմն. կարողութիւնքն՝ որոց ցուցիչքն հաստատական իցեն կամ ուրացական բազմացուցանին, յորժամ ի միմեանս յաւելուցուս զցուցիչսն. նոյնպէս բաժանին կարողութիւնքն՝ յորժամ զցուցիչ բաժանարարին հանցես ի ցուցչէ անտի բաժանելւոյն:

225. Կարողութիւն ինչ համբառնայ յայլ իմն կարողութիւն, որոյ հաստատական կամ ուրացական իցէ ցուցիչն, յորժամ ըզ ցուցիչ առաջին չափյննոր ցուցչաւն բազմացուցանիցէ, եւ զարդիւնս ցուցչացն ի վերայ դնիցէ արմատոյն: Զոր օրինակ, $(ա^{մ})^{ն}=ա^{մն}$:

Քանզի իբրեւ զչափս $ա^{\pm մ}$ ըստ նմանութեան արմատոյ ածիցեմք զմտաւ, եւ զայն յայլ կարողութիւնս համբառնայցեմք, ելանիցէ

$(ա^{\pm մ})^{2}=ա^{\pm մ}\times ա^{\pm մ}=ա^{\pm մ \pm մ}=ա^{\pm 2մ}$

$(ա^{\pm մ})^{3}=ա^{\pm 2մ}\times ա^{\pm մ}=ա^{\pm 2մ \pm մ}=ա^{\pm 3մ}$, այլուքն հանդերձ, որ հասարակաց իմն օրինակաւ,

$(ա^{\pm մ})^{ն}=ա^{\pm մ}\times ա^{\pm մ}\times ա^{\pm մ}\times ա^{\pm մ}\times\cdots=$

$$ա^{\pm մ \pm մ \pm մ \pm մ \pm \cdots}=ա^{\pm մն}$$

Զոր օրինակ,

$$(3ա^2բ^3)^2 = 3^2ա^4բ^6 = 9ա^4բ^6$$
$$(-5մ^3գ^2)^2 = +25մ^6գ^4$$
$$(ա^{-մ})^3 = ա^{-3մ}$$
$$(ա^մբ^{-ն})^ն = ա^{մն}բ^{-նն}$$

Զաւրին զհետ գայ. Եթէ նշանագիրքս մ, ն, պ, եւ այլն եւս, փոխանակ որ ինչ եւ իցէ հաստատական կամ ուրացական թուոց համարեսցին, յայնժամ

$(ա^մ)^ն = ա^{մն}$, եւ $(ա^ն)^մ = ա^{նմ}$, եւ քանզի $մն = նմ$,
ապա նոյնպէս $(ա^մ)^ն = (ա^ն)^մ$:

Ըստ սմին օրինակի

$$[(ա^մ)^ն]^պ = ա^{մնպ}, \text{ ուստի եւ}$$
$$[(ա^մ)^ն]^պ = [(ա^ն)^մ]^պ = [(ա^մ)^պ]^ն = [(ա^ն)^պ]^մ = [(ա^պ)^մ]^ն = [(ա^պ)^ն]^մ = ա^{մնպ}:$$

Զայն է տեսանել եւ ի մօտաւոր օրինակս,

$$[2(3ա^2)^{-1}]^2 = 4(3ա^2)^{-2} = \frac{4}{9ա^4}$$
$$[5ա^մ(2բ^նգ^2)^3]^2 = 25ա^{2մ}(2բ^նգ^2)^6 = 25ա^{2մ} \times 64բ^{6ն}գ^{12} = 1600ա^{2մ}բ^{6ն}գ^{12}:$$

226. Արդիւնք բազում թուոց համբառնան ի կարողութիւն ն, յորժամ զառնելիս արդեանցն այնոցիկ ուրոյն ուրոյն յայն կարողութիւն վերացուցանիցես:

Քանզի $(աբ)^2 = աբ \cdot աբ = ա^2բ^2$; Դարձեալ $(աբ)^3 = աբ \cdot աբ \cdot աբ = ա^3բ^3$, այլովքն հանդերձ. որ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$(աբ)^ն = աբ \cdot աբ \cdot աբ \cdot աբ \ldots = ա^նբ^ն:$$

Ըստ սմին օրինակի

$$(աբ)^{-ն} = \frac{1}{(աբ)^ն} = \frac{1}{ա^նբ^ն} = ա^{-ն}բ^{-ն}$$
$$10^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$$
$$(30ա^մ)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ա^{2մ} = 4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot ա^{2մ} = 900ա^{2մ}:$$

227. Կոտորն համբառնայ ի կարողութիւն ն, յորժամ ոք զհամարիչ եւ զանուանիչ կոտորոյն ի նոյն կարողութիւն համբառնայցէ:

Բանզի $\left(\frac{ա}{բ}\right)^2 = \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} = \frac{ա^2}{բ^2}$, Դարձեալ

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)^3 = \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} = \frac{ա^3}{բ^3},$$ այսպէս հան-

գերձ, որ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)^{ն} = \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} \times \frac{ա}{բ} \times \ldots = \frac{ա^{ն}}{բ^{ն}}:$$

Ըստ սմին օրինակի,

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)^{-ն} = 1 : \left(\frac{ա}{բ}\right)^{ն} = 1 : \frac{ա^{ն}}{բ^{ն}} = \frac{բ^{ն}}{ա^{ն}} = \frac{ա^{-ն}}{բ^{-ն}}:$$

Որոց ամենեցուն հասարակաց իմն օրինակ է

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)^{\pm ն} = \frac{ա^{\pm ն}}{բ^{\pm ն}}:$$ Զոր օրինակ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \left(\frac{4ա^2բ}{7գ^{ն+3}}\right)^3 = \frac{4^3 \cdot ա^6բ^3}{7^3գ^{3ն+9}}$$

$$= \frac{64ա^6բ^3}{343գ^{3ն+9}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9},$$

Զսորին զհետ գայ, եթէ այնչափ ինչ զօրութիւն կոտորոյ նուազի, եթէ բուն կոտոր իցէ. եւ առաւելու եթէ անբուն իցէ, քանիցս անգամ թէ ի բարձրագոյն կարողութիւն համբառնայցէ: Որպէս զի

Եթէ $բ > ա$ իցէ, յայնժամ

$$\frac{ա}{բ} > \frac{ա^2}{բ^2} > \frac{ա^3}{բ^3} > \frac{ա^4}{բ^4},$$ եւ այլն: Այլ

Եթէ $բ < ա$, յայնժամ

$$\frac{ա}{բ} < \frac{ա^2}{բ^2} < \frac{ա^3}{բ^3} < \frac{ա^4}{բ^4},$$ եւ այլն եւս մի ըստ միոջէ:

Զոր օրինակ,

$$\frac{3}{4} > \left(\frac{3}{4}\right)^2$$ կամ $\frac{3}{4} > \frac{9}{16}$, այլ $\frac{5}{2} < \left(\frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^3$,

կամ $\frac{5}{2} < \frac{25}{4} < \frac{125}{8}$:

228. Զոր օրինակ յորժամ հաստատական առնելիք միմեամբք բազմացուցանիցին, ցանդ արդիւնս հաստատականս ածեն, նոյն օրինակ հաստատական արմատք, յորպիսի ինչ եւ կարողութիւն համբառնայցեն, տան արդիւնս հաստատականս: Որպիսի ինչ $(+\text{ա})^{\text{ն}}=+\text{ա}^{\text{ն}}$, եւ

$$(+\text{ա})^{-\text{ն}}=\frac{1}{(+\text{ա})^{\text{ն}}}=\frac{1}{+\text{ա}^{\text{ն}}}=+\text{ա}^{-\text{ն}},$$

ուստի եւ հասարակաց օրինակաւ

$$(+\text{ա})^{\pm\text{ն}}=+\text{ա}^{\pm\text{ն}},$$

յորում ն կարէ թէ ինչ զոյգ կամ անզոյգ լինել :

229. Ուրացական արմատոյ զոյգ կարողութիւնքն, հաստատական են, իսկ անզոյգքն ուրացական:

Արդ համբարձցուք զարմատս $-\text{ա}$ յ2 կարողութիւն,

$(-\text{ա})^2=-\text{ա}\times-\text{ա}=+\text{ա}^2$: Եւ քանզի

$(-\text{ա})^2=+\text{ա}^2$, ապա ուրեմն իբրեւ ի ն կարողութիւն համբառնայցեն երկոքին անդամք հաւասարութեանն,

$$[(-\text{ա})^2]^{\text{ն}}=(+\text{ա}^2)^{\text{ն}} \text{ կամ } (-\text{ա})^{2\text{ն}}=+\text{ա}^{2\text{ն}}:$$

Զորս իբրեւ բազմացուցանիցես դարձեալ $-\text{ա}=-\text{ա}^1$ չափով,

$$(-\text{ա})^{2\text{ն}+1}=+\text{ա}^{2\text{ն}}\times-\text{ա}^1=-\text{ա}^{2\text{ն}+1}:$$

Զորոց զհետ գայ, եթէ եւ

$$(-\text{ա})^{-2\text{ն}}=\frac{1}{(-\text{ա})^{2\text{ն}}}=\frac{1}{+\text{ա}^{2\text{ն}}}=+\text{ա}^{-2\text{ն}}$$

$$(-\text{ա})^{-2\text{ն}-1}=\frac{1}{(-\text{ա})^{2\text{ն}+1}}=\frac{1}{-\text{ա}^{2\text{ն}+1}}=-\text{ա}^{-2\text{ն}-1}$$

Ապա ուրեմն

$$(-\text{ա})^{\pm2\text{ն}}=+\text{ա}^{\pm2\text{ն}}, \text{ իսկ } (-\text{ա})^{\pm2\text{ն}\pm1}=-\text{ա}^{\pm2\text{ն}\pm1}$$

Զոր միանգամ ի (∸. 228, ի 229.) ասացաք, մարթ է համառօտիւք առաջի առնել զայս ձեւ օրինակի

$$(\pm\text{ա})^{\pm2\text{ն}}=+\text{ա}^{\pm2\text{ն}}$$
$$(\pm\text{ա})^{\pm2\text{ն}\pm1}=\pm\text{ա}^{\pm2\text{ն}\pm1}$$

այս ինքն, եթէ Զոյգ կարողութիւնն հաստատական է, որպիսի ինչ եւ իցէ արմատն, եթէ հաստատական իցէ, եւ եթէ ուրացական, իսկ անզոյգ կարողութիւնքն ելանեն նշանաւ արմատոյն:

$$(3ա^2բ^3)^2 = 3^2ա^4բ^6 = 9ա^4բ^6$$

$$(-5մ^3ն^2)^2 = +25մ^6ն^4$$

$$\left(-\frac{6մ^2ն}{7պ^3ք^2}\right)^{-3} = \left(-\frac{7պ^3ք^2}{6մ^2ն}\right)^3 = -\frac{343պ^9ք^6}{216մ^6ն^3}$$

230. Իբրեւ զչափ ինչ երկմասնեան $(Ա+Բ)$, ինքեամբ բազմացուցանիցես, արդիւնքն $(Ա+Բ)^2 = Ա^2+2ԱԲ+Բ^2$: Զորոյ զհետ գայ, եթէ երկրորդ կարողութիւն երկմասնեան չափուց կազմի յերկրորդ կարողութենէ առաջնոյ մասին, յերկրորդ կարողութենէ երկրորդ մասին, եւ յերկպատիկ արդեանց երկոցունց մասանցն: Զոր օրինակ,

$\left(ա^2 - \frac{ն^3}{2}\right)^2 = ա^4 - ա^2ն^3 + \frac{ն^6}{4}$ որ նոյն է ընդ հասարակաց օրինակին, քանզի

$$Ա = ա^2,\ եւ\ Բ = -\frac{ն^3}{2}\ ուստի\ եւ$$

$$Ա^2 = ա^4,\ Բ^2 = \frac{ն^6}{4},\ եւ\ 2ԱԲ = 2ա^2 \times -\frac{ն^3}{2} = -ա^2ն^3$$

Իսկ այլն օրինակի,

$$(2ան + բ)^2 = 4ա^2ն^2 + 4աբն + բ^2,$$

$$\left(ն + \frac{բ}{2ա}\right)^2 = ն^2 + \frac{բ}{ա}ն + \frac{բ^2}{4ա^2},\ (ա^2-1)^2 = ա^4 - 2ա^2 + 1,$$

$$\left(բք^2 - \frac{ա}{բ}\right)^2 = բ^2ք^4 - 2աք^2 + \frac{ա^2}{բ^2},$$

$$(1-ն)^2 = 1 - 2ն + ն^2$$

$(99)^2 = (90+9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801$, եւ կամ $(99)^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$:

231. Առնել է զեռեքմասնեան չափս $Ա+Բ+Գ$ յերկրորդ կարողութիւն համբառնալ, յորժամ զայն

ընդ ինքն բազմացուցանիցէ ոք, եւ կամ զայն իբրեւ զերկմասնեան ածիցէ զմտաւ, որոյ առաջին մասն իցէ Ա+Բ, եւ երկրորդ մասն Գ, ուստի եւ

$$(Ա+Բ+Գ)^2=(Ա+Բ)^2+2(Ա+Բ)Գ+Գ^2, \text{ կամ}$$
$$(Ա+Բ+Գ)^2=Ա^2+2ԱԲ+Բ^2+2ԱԳ+2ԲԳ+Գ^2 :$$

Այս ուրեմն. Երկրորդ կարողութիւն եռեքմասնեան չափուց կազմի յերկրորդ կարողութենէ միոյ միոյ ի չափուցն, եւ ի կրկնապատիկ արդեանց իւրաքանչիւր անդամոց հանդերձ յառաջընթաց անդամովքն բազմացուցեալ: Որ օրինակ,

$$\left(ա-բ+\frac{գ}{2}\right)^2=ա^2-2աբ+բ^2+ագ-գբ+\frac{գ^2}{4}$$
$$(2ա^2-3աբ-4բ^2)^2=4ա^4-12ա^3բ+9ա^2բ^2-16ա^2բ^2+24աբ^3+16բ^4$$
$$(1-բ+բ^2)^2=1-2բ+բ^2+2բ^2-2բ^3+բ^4=1-2բ+3բ^2-2բ^3+բ^4$$
$$(999)^2=(900+99)^2=(900+90+9)^2=810000+162000+8100+16200+1620+81=998001 :$$

232. Իբրեւ զերկրորդ կարողութիւն երկմասնեան չափոյ իւիք, դարձեալ նովին արմատովն Ա+Բ բազմացուցանիցես, ելանէ երրորդ կարողութիւնն երկմասնեան արմատոյն, ուստի եւ

$$(Ա+Բ)^3=(Ա+Բ)^2\times(Ա+Բ)=$$
$$(Ա^2+2ԱԲ+Բ^2)(Ա+Բ)=Ա^3+3Ա^2Բ+3ԱԲ^2+Բ^3$$

Այդ՝ Երրորդ կարողութիւն երկմասնեան չափուց կազմի յերրորդ կարողութենէ առաջին անդամոյն, յեռեքպատիկ երկրորդ կարողութենէ առաջնոյ անդամոյն բազմացուցեալ երկրորդին, յեռեքպատիկ երկրորդ կարողութենէ երկրորդ անդամոյն բազմացուցեալ առաջնովն. եւ յերրորդ կարողութենէ երկրորդ անդամոյն: Որպիսի ինչ,

$$\left(3ա^2-\frac{2բ}{3}\right)^3=27ա^6-18ա^4բ+4ա^2բ^2-\frac{8բ^3}{27},$$

զոր մարթ է ածել ի հասարակաց կերպարանս, յորժամ

$\text{Ա}=3\text{ա}^2$, եւ $\text{Բ}=-\frac{2\text{ք}}{3}$ դնիցեմք ։

Ըստ սմին օրինակի եւ

$$(2\text{աք}-\text{ք}^2)^3=8\text{ա}^3\text{ք}^3-12\text{ա}^2\text{ք}^4+6\text{աք}^5-\text{ք}^6,$$
$$(1-\text{ք})^3=1-3\text{ք}+3\text{ք}^2-\text{ք}^3,$$
$$\left(3\text{ա}+\frac{1}{2}\right)^3=27\text{ա}^3+\frac{27\text{ա}^2}{2}+\frac{9\text{ա}}{4}+\frac{1}{8},$$
$$(11)^3=(10+1)^3=1000+300+30+1=1331,$$
$$(99)^3=(90+9)^3=729000+218700+21870+729$$
$$=729000+241299=970299\text{. կամ}$$
$$(99)^3=(100-1)=1000000-30000+300-1$$
$$=970299 ։$$

233. Իբրեւ կամիցի ոք զերեքմասնեան չափ ինչ $\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ}$ յերրորդ կարողութիւն համբառնալ, պարտ եւ պատշաճ է իբրեւ զերկմասնեան համարել որոյ առաջին մասն իցէ $\text{Ա}+\text{Բ}$, եւ երկրորդ մասն Գ, եւ այնպէս ըստ (Հ. **232**.) զիրան վճարել ։ Արդ

$$(\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ})^3=[(\text{Ա}+\text{Բ})+\text{Գ}]^3=(\text{Ա}+\text{Բ})^3+$$
$$3(\text{Ա}+\text{Բ})^2\text{Գ}+3(\text{Ա}+\text{Բ})\text{Գ}^2+\text{Գ}^3=\text{Ա}^3+3\text{Ա}^2\text{Բ}+3\text{ԱԲ}^2+$$
$$\text{Բ}^3+3(\text{Ա}+\text{Բ})^2\text{Գ}+3(\text{Ա}+\text{Բ})\text{Գ}^2+\text{Գ}^3=\text{Ա}^3+3\text{Ա}^2\text{Բ}+$$
$$3\text{ԱԲ}^2+\text{Բ}^3+3\text{Ա}^2\text{Գ}+6\text{ԱԲԳ}+3\text{Բ}^3\text{Գ}+3\text{ԱԳ}^2$$
$$+3\text{ԲԳ}^2+\text{Գ}^3$$

Ըստ սմին օրինակի

$$(1+\text{ք}-\text{ք}^2)^3=1+3\text{ք}+3\text{ք}^2+\text{ք}^3-3\text{ք}^2-6\text{ք}^3-3\text{ք}^4+3\text{ք}^4$$
$$+3\text{ք}^5-\text{ք}^6=1+3\text{ք}-5\text{ք}^3+3\text{ք}^5-\text{ք}^6$$
$$(999)^3=(900+90+9)^3=729000000+218700000$$
$$+21870000+729000+26462700+240570+729$$
$$=997002999 ։$$

234. Զայն պարտ է առնել եւ վասն բազմամասնեան չափուցն զորս իբրեւ կամիցի ոք յերկրորդ եւ յերրորդ կարողութիւնս համբառնալ, պարտ եւ պատշաճ է զանդամսն՝ որ կայցեն ի ձախմէ վերջին անդամոյն իբրեւ առաջին անդամ համարել, եւ այնպէս ըստ նմանութեան երկմասնեան չափուց յերկրորդ եւ յերրորդ կարողութիւն վերացուցանել ։

235. Իբրեւ երրորդ կարողութիւն $Ա+Բ$ չափոյն դարձեալ ընդ $Ա+Բ$ բազմացուցանիցի, ծագէ չորրորդ կարողութիւնն, այսինքն է

$$(Ա+Բ)^4=(Ա+Բ)^3(Ա+Բ)=(Ա^3+3Ա^2Բ+3ԱԲ^2+Բ^3)(Ա+Բ)=Ա^4+4Ա^3Բ+6Ա^2Բ^2+4ԱԲ^3+Բ^4$$

Զայս օրինակ մարթի միւսանգամ բազմացուցանելով, զհինգերորդ կարողութիւնն գտանել, ըստ նմին օրինակի մի ըստ միոջէ զմեծամեծ կարողութիւնս։

236. Արդ է այլ իմն օրինակ համարելոյ, որով զամենայն կարողութիւնս, զոր կարեմք $(Ա+Բ)^ն$ համառաբակաց իմն օրինակաւ յանդիման կացուցանել, առանց ինչ զարմանն արդեամբք բազմացուցանելոյ դիւրաւ գտանել, զոր աստուցուք աստէն կարճ ի կարճոյ, մանր մանրահետեալ զսկիզբն յորմէ յառաջ գայցէ։
Իբրեւ $ք+ա$ բազմացուցանիցի $ք+բ$ չափով արդիւնքն

$$(ք+ա)(ք+բ)=ք^2+(ա+բ)ք+աբ,$$

զոր իբրեւ դարձեալ բազմացուցանիցես $ք+գ$ չափով, արդիւնքն

$$(ք+ա)(ք+բ)(ք+գ)=ք^3+(ա+բ+գ)ք^2+(աբ+ագ+բգ)ք+աբգ։$$

Արդ իբրեւ այս արդիւնք եւս $ք+դ$ չափով բազմացուցանիցի,

$$(ք+ա)(ք+բ)(ք+գ)(ք+դ)=ք^4+(ա+բ+գ+դ)ք^3+(աբ+ագ+ադ+բգ+բդ+գդ)ք^2+(աբգ+աբդ+ագդ+բգդ)ք+աբգդ.$$

Նոյնպէս ըստ նմին օրինակի մի ըստ միոջէ։ Արդ համարեսցուք եթէ թիւ այսպիսի երկմասնեան առնելեաց իցէ $=ն$, յայնժամ եւ արդիւնքն եղանիցէ կարգաւ ըստ առաջիկայ օրինակիս մի ըստ միոջէ,

$$(ք+ա)(ք+բ)(ք+գ)\cdots$$
$$=ք^ն+Աք^{ն-1}+Բք^{ն-2}+Գք^{ն-3}+Դք^{ն-4}\cdots\cdots+Ո.$$

յորում գործակիցքն $Ա$, $Բ$, $Գ$, $Դ$, այլովքն հանդերձ, կազմեալ են ի չափուցս $ա$, $բ$, $գ$, $դ\cdots$, որպէս զի

$$Ա=ա+բ+գ+\cdots\cdots$$

այսինքն $=$ բովանդակութեան $ա$, $բ$, $գ\cdots$ չափուց, իսկ

$$Բ = աբ + ագ + ադ + \cdots$$

այս ինքն = բովանդակութեան խառնուածոյ երկուցունց, եւ

$$Գ = աբգ + աբդ + \cdots$$

այսինքն = բովանդակութեան խառնուածոյ երեքցունցն: Ըստ սմին օրինակի եւ Դ իցէ բովանդակութիւն չորեցունց, Ե բովանդակութիւն հնգեցունց, եւ այլքն եւս նոյնպիսիք, եւ վերջին անդամն Ս արդիւնք իմն իցէ ամենայն չափուց ա, բ, գ, դ ...:

237. Յորժամ ի չափուցս ա, բ, գ, դ ..., որոց թիւ համարոյ ն իցէ, առնուցուս զմին ա, եւ մի ըստ միոջէ կարգաւ ընդ այլոցն խառնիցես, ելանիցեն Երկուքինն աբ, ագ, ադ ..., որոց թիւ համարոյն իցէ $= ն - 1$, եւ իբրեւ ըստ նմին նմանութեան եւ զայլ եւս չափսն բ, գ, դ ... մի ըստ միոջէ բազմացուցանիցես, յայնժամ թիւ համարոյ ամենայն Երկուցունց լինիցի $= ն(ն-1)$: Ի մէջ երկուցունցն ամենայն անդամքն երկիցս գտանին, զոր օրինակ աբ, միանգամ, յորժամ $ա \times բ$, եւ դարձեալ յորժամ $բ \times ա$, յորմէ պէտս գայ, եթէ թիւ համարոյ պէսպէս եւ այլեւայլ անդամոցն $= \frac{ն(ն-1)}{2}$: Որդ ըստ սմին օրինակի յորժամ հինգ չափք իցեն ա, բ, գ, դ, ե, երկուքին չափքն $= \frac{5 \times 4}{2}, = 10$ երկուցունց, որ են աբ, ագ, ադ, աե, բգ, բդ, բե, գդ, գե, դե:

Երեքքինն ի ա, բ, գ, դ, ե ... չափուցս, որոց թիւ համարոյ ն իցէ գտանիցի, յորժամ զերկուսինն մի ըստ միոջէ ընդ ամենայն չափսն ընդ այնոսիկ՝ ա, բ, գ, դ, ե ... խառնիցես, բաց յերկուց չափուց, յորոց երկուքինն ինքնին գլխովին կազմեալ իցէ: Որդ սոյնգունակ երկուքինս աբ ածիցէ արդասիս զերեսին զայսոսիկ աբգ, աբդ, աբե ..., որոց թիւ համարոյ $= ն - 2$: Եւ քանզի թիւ համարոյ երկուցունց, զոր վերագոյնդ ատացաք $= \frac{ն(ն-1)}{2}$ է, եւ երեքունս պատցիկ $ն-2$, ապա ուրեմն թիւ համարոյ ամենայն երեքունս, որք մի բառ միջէ ելանիցեն $= \frac{ն(ն-1)(ն-2)}{2}$: Այլ քանզի ի մէջ երեքունս մի մի երեքքինն երիցս գտանի, որովհետեւ աբգ երեքքինս ծագէ, յորժամ $աբ \times գ$, երկրորդ իբրեւ $բգ \times ա$, եւ երրորդ իբրեւ $բգ \times ա$ ուստի պարտ եւ պատշաճ է վասն զատոյդ թիւ համարոյ այլեւայլ երեքունցն գտանելոյ զթիւն $\frac{ն(ն-1)(ն-2)}{2}$ ընդ 3 բաժանել, ուստի եւ $= \frac{ն(ն-1)(ն-2)}{2 \cdot 3}$: Զոր օրինակ հինգ չափքս ա, բ, գ, դ, ե, տան $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} =$ 10 երիս, այսինքն, աբգ, աբդ, աբե, ագդ, ագե, ադե, բգդ, բգե, բդե, գդե :

Զայն ձեւ յայս արարեալ ցուցանի, եթէ ի ն չափուց ա, բ, գ, դ… թիւ համարոյ չորեքունց $= \frac{ն(ն-1)(ն-2)(ն-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ է :

Արդ աստանօրին ի բանիցս ասացելոց դիւրաւ կարիցես ի միտ առնուլ եւ ճանաչել զհամօրէն օրինակն, եթէ զիարդ եւ որով օրինակաւ խառնուածք թուոցն կարգաւ ելանիցեն, եւ որպէս մի բառ միջէ հնդեքինն, եւ վեցեքին, եւ այլ եւս խառնուածքն ծնանիցին :

238. Համարեսցուք եթէ չափքն զոր ի (Հ. 236.) ասացաք, միմեանց հաւասարք իցեն, $ա=բ=գ=դ\cdots$ դհետ գայ եթէ եւ առնելիքն $ք+ա=ք+բ=ք+գ\cdots$ եւ քանզի թիւ համարոյ նոցա բառ վերագոյն ճառելոցս է ն, զարդի դհետ գայ, եթէ եւ արդիւնք նոցա եւ ներորդ կարողութիւն $ա+ք$ արմատոյ կամ

$$(ք+ա)(ք+բ)(ք+գ)(ք+դ)\cdots=(ք+ա)^{ն}$$ իցէ :

Արդ բառ այսմ համարման,

$Ա = ա + ա + ա \ldots = մա$

$Բ = ա^2 + ա^2 + ա^2 + \ldots = \frac{մ(մ-1)}{2} ա^2$. քանզի ամենայն երկուքին $աբ = ագ = բգ = գդ \ldots = ա^2$

$Գ = ա^3 + ա^3 + ա^3 + \ldots = \frac{մ(մ-1)(մ-2)}{2 \cdot 3} ա^3$. քանզի ամենայն երեքին $աբգ = աբդ = բգդ \ldots = ա^3$

$Դ = ա^4 + ա^4 + ա^4 + \ldots = \frac{մ(մ-1)(մ-2)(մ-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} ա^4$, քանզի ամենայն չորեքին $աբգդ = աբգե \ldots = ա^4$:

Իբրեւ զզօրութիւնս զայսոսիկ դնիցեմք փոխանակ $(խ + ա)(խ + բ) \ldots$ զոր ասացաք (÷. 236.), յայնժամ

$$(խ + ա)^մ = խ^մ + \frac{մ}{1} ախ^{մ-1} + \frac{մ(մ-1)}{1 \cdot 2} ա^2խ^{մ-2} + \frac{մ(մ-1)(մ-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ա^3խ^{մ-3} + \frac{մ(մ-1)(մ-2)(մ-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ա^4խ^{մ-4},$$

եւ այլքն եւս կարգաւ մի ըստ միոջէ:

Արդ այսու հասարակաց օրինակաւ մարթի երկմասնեան չափս յամենայն կարողութիւնս վերանալ: Դնիցուք գրեսցուք եթէ կայ մեզ զ$1 - բ$ չափս ի հինգերորդ կարողութիւն վերացուցանել, մարթեմք $խ = 1$, եւ $ա = -բ$ եւ $մ = 5$ համարել; եւ կարգել ըստ օրինակին զոր ասացաք, որով եւ ելանեն արդիւնքն

$$(1 - բ)^5 = 1 - 5բ + 10բ^2 - 10բ^3 + 5բ^4 - բ^5$$

239. Ամենայն կարողութիւնք երկմասնեան ինչ չափոյ, որոյ ցուցիչն ողջոյն եւ հաստատական թիւ իցէ, ունին թիւ համարոյ անդամոյն, որովք կատարիցին. քանզի յորժամ ըստ (÷. 238.) զանդամսն մի ըստ միոջէ կարգիցէ ոք, տեսանիցէ եթէ ի կատարածին յայնպիսի ինչ չափ հասեալ է, որոյ գործակից իցէ $մ - մ = 0$: Արդ այսու օրինակաւ, յորժամ $մ = 3$ իցէ, հինգերորդն $= 0$ լինիցի:

240. Յօրինակի անդ (÷. 238.) ամենայն կարողութիւնք խ չափոյն սկսանին ի $խ^մ$ թուոյ, եւ հասանեն

մինչեւ ի բ, որոյ եւ վերջին անդամն լինի $ա^մ$: Արդ յամենայն կարողութիւնս $բ+ա$ չափոյն, որոյ մ ցուցիչ իցէ $մ+1$ անդամք գտանին: Յորժամ կարողութիւնն զոյգ իցէ, յայնժամ թիւ համարոյ անդամոցն անզոյգ եղիցի, ապա եթէ անզոյգ իցէ կարողութիւնն, թիւ համարոյն զոյգ լինիցի:

241. Ի 238 համարոյ անտի զհետ գայ, եթէ

$$(ա+բ)^մ = ա^մ + \frac{մ}{1} ա^{մ-1}բ + \frac{մ(մ-1)}{1\cdot 2} ա^{մ-2}բ^2 + \dots բ^մ, \text{ իցէ:}$$

Այս ուրեմն յորժամ զկարգ անդամոցն արմատոյն շրջիցէ ոք, յայնժամ նոյն գործակիցքն նովին կարգաւ ելանեն, աճեն գործակիցքն ի սկզբանէ ի միջին կողմն, եւ նոքին իսկ անտի սկսանին նուազել նովին օրինակաւ ի վերջին կողմն կոյս: Իբրեւ զոյգ իցէ կարողութիւնն, գործակից միջին անդամոյն մեծագոյն է քան զգործակիցս այլոց անդամոցն, իսկ ընդ հակառակս անզոյգ կարողութեան մեծագոյն են գործակիցք երկուց միջին անդամոցն: Զոր օրինակ,

$$(ա+բ)^6 = ա^6 + 6ա^5բ + 15ա^4բ^2 + 20ա^3բ^3 + 15ա^2բ^4 + 6աբ^5 + բ^6$$

$$(ա+բ)^7 = ա^7 + 7ա^6բ + 21ա^5բ^2 + 35ա^4բ^3 + 35ա^3բ^4 + 21ա^2բ^5 + 7աբ^6 + բ^7 :$$

242. Ի հաստատակաց օրինակէ անտի որ ի (∸. 238.) կարիցես յանձնէ իմանալ զհամօրէն կանոնն, որ կայցեն վասն զբազմանման չափս ի մեծամեծ կարողութիւնս հանելոյ: Արդ զցուցիչս նշանագրաց չափոյն զոր ի կարողութիւն կամիցիս բարձրացուցանել, պարտ է զայս օրինակ կարգել, առաջին անդամ կարողութեանն ունիցի զցուցիչն, յոր զերկմասնեան չափն կամիցիս համբառնալ, եւ սկիզբն ի նոյն թուոյ արարեալ ի միւս անդամսն, որ զմիմեանց կնի գայցեն, միով միով թուով նուազիցի, որպէս տեսանես (ի ∸. 241.), յորում ցուցիչքն ա չափոյն ի 6 թուոյ կարգ ըստ կարգէ նուազին: Իսկ զցուցիչ նշանագրի երկրորդ անդամոյ արմատոյն ի 0է սկիզբն արարեալ, պարտ է աճեցու-

յանել, մինչեւ ի վերջին անդամն ի ցուցիչ կարողութեանն համբարձեալ իցէ, որպէս (÷. 241.) յորում ցուցիչ + չափոյն աճէ: Իսկ վասն զգործակիցսն գտանելոյ այս ինչ օրէնք են: Պարտ է զգործակիցն առաջին անդամոյն բազմապատկել ցուցչաւ նշանագրի առաջին անդամոյ արմատոյն եւ զարդիւնսն բաժանել ընդ թիւ համարոյ անդամոյն որ յառաջ քան զնոյն անդամն իցեն եւ զքանորդն գտանել փոխանակ գործակցի անդամոյն որ զհետ գայցէ: Որպէս (÷. 241.) յորում գործակից առաջին անդամոյ է 1, արդ $1 \times 6 = 6$, եւ քանզի թիւ համարոյ անդամոյն որ յառաջ քան զերկրորդ անդամն է 1, ուրեմն $6:1=6$ է գործակից երկրորդ անդամոյ կարողութեանն:

243. Օրինակս, զորս ի համարս 241 վասն $(ա+բ)^ն$ չափոյն տեսաք, յանդիման կացուցանեն զայս ձեւ օրինակի,

$$(ա+բ)^ն = Ա + նԱ\cdot\frac{բ}{ա} + \frac{ն-1}{2}Բ\cdot\frac{բ}{ա} + \frac{ն-2}{3}Գ\cdot\frac{բ}{ա} + \frac{ն-3}{4}Դ\cdot\frac{բ}{ա} + \ldots$$

$$յորում\ Ա = ա^ն,\ Բ = նԱ\cdot\frac{բ}{ա},\ Գ = \frac{ն-1}{2}Բ\cdot\frac{բ}{ա},$$

$$Դ = \frac{ն-2}{3}Գ\cdot\frac{բ}{ա},\ Ե = \frac{ն-3}{4}Դ\cdot\frac{բ}{ա},\ եւ\ այլն:$$

Յորմէ կարիցես ի միտ առնուլ հաստատութեամբ, եթէ զկարգ ամենայն անդամքն երկմասնեան չափոյն, զոր կամիցիս գտանել, կազմիցեն յանդամոցն, որ քան զնոսա յառաջագոյն գտեալ իցեն: Այլ եւ զայս եւս պարտ է գիտել, զի եթէ արմատն $ա-բ$ իցէ, ամենայն անդամքն, յորս անզոյգ իմն կարողութիւն բ չափոյն առնելի իցէ, ուրացական լինին:

Ճ Ա Տ Ա Ն Ի

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՄՕՐԷՆ ԱՐՄԱՏԱԿԱՆ ՉԱՓՈՒՑ

244. Զոր միանգամ մինչեւ ցայս վայր ասացաք, յայտ արարեալ ցուցանեն, եթէ զի՞րդ եւ ո՞րպէս զարմատս մարթ իցէ, յայս ինչ կամ յայն ինչ կարողութիւն, զոր կամիցի ոք, համբառնալ: Արդ սկիզբն արասցուք խօսելոյ զարմատոցն, այս ինքն է, եթէ որո՞վ օրինակաւ, յորժամ կարողութիւնն ծանուցեալ իցէ, զիւր արմատն գտանիցէ ոք:

Յայս նիշ կամ յայն նիշ չափուց զերկրորդ, զերրորդ, զ..., զՆերրորդ արմատս հանել ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ այնպիսի ինչ թիւ գտանել, զոր իբրեւ միանգամ յերկրորդ, յերրորդ, ի..., ի Ներրորդ կարողութիւն համբառնայցէ ոք, նոյն թիւն ծնանիցի, յորմէ հանեալ իցէ արմատն: Նշան արմատոյ այս ($\sqrt{\ }$) է, որ դրոշմի ընդ ձախմէ թուոյն, զորոյ զարմատն խնդրիցեմք: Ի վերին կողմն նշանիս դնի Արմատոյ ցուցիչն, որ նշանակէ, եթէ քանե՞րորդ արմատ իցէ, որ յայնմ թուոյ ելանիցէ, զոր օրինակ $\sqrt[2]{\text{Ա}}$ երկրորդ արմատ, $\sqrt[3]{\text{Ա}}$ երրորդ արմատ յԱ թուոյ, եւ հասարակաց իմն օրինակաւ $\sqrt[\text{ն}]{\text{Ա}}$, այնպիսի ինչ արմատ յԱ թուոյ, որոյ արմատոյ ցուցիչն ն իցէ, եւ կամ իբրեւ ի ներրորդ կարողութիւն համբառնայցէ $=\text{Ա}$ իցէ: Ցուցիչ երկրորդ արմատոյն, վասն համառօտիւք զիրսն վճարելոյ, չդրի ի վերայ նշանի արմատոյն, ուստի եւ $\sqrt{\text{Ա}}=\sqrt[2]{\text{Ա}}$: Յորժամ զարմատս յօդուածոյ չափուց ցուցանել կամիցի ոք, պարտ եւ պատշաճ է կամ զյօդուածոյ չափն յառաջադոյն դնել ի փակիչ գծի եւ կամ գիծ ի վերայ յօդուածոյ չափոյն ձգել, եւ ընդ ձախմէ զարմատոյ նշանն դրոշմել: Զոր օրինակ,

$$\sqrt[\text{ն}]{(\text{ա}+\text{բ})} \text{ կամ } \sqrt[\text{ն}]{\text{ա}+\text{բ}}$$

Զերկրորդ եւ զերրորդ արմատն, յուսողացն ոմանք առանձինն անուամբ անուանեալ կոչեն Զորեքկուսի եւ խորանարդ արմատս, որպէս եւ զերկրորդ եւ զերրորդ կարողութիւն Զորեքկուսի եւ խորանարդ։ Անուանքս որով դեռ եւս մինչեւ ցայսօր վարին սոքա, մնացորդք են այնց ժամանակաց, յորում ամենայն կարողութեանց եւ իւրաքանչիւր արմատոցն առանձինն անուանս եդեալ կարգային. այլ որպէս յայտ է պարզ եւ պատշաճ էր նոցա եւ զմնացորդսս զայսոսիկ ոչ եւս արկանել ի կիր. քանզի յերկրաչափութեան զիրս ինչ, որ ի սոցանէ այլակերպք են, այսու անուամբք անուանեալ կոչեմք. որով մարթի լինել շփոթութեան, եւ երկմտութեան ի բանս, որ անպատեհ իմն է ի գիրս ուսմանց, որպիսի ինչ եւ մաթեմատիկեան ճարտարութիւնս է։ Նոյն իրի խոյ եւ մեք ի գործս մեր, այսու անուամբք չվարիմք։

Զայնց որ ասացանն զհետ գայ, եթէ

Ա. Այնպէս իմն լինել պարզ է արմատոյն, որպէս զի յորժամ միւսանգամ ի նոյն կարողութիւն համբառնայցէ, հաւասար իցէ կարողութեանն, որ ընդ արմատոյ նշանաւն գտանի։

Դնիցուք գրեսցուք եթէ $\sqrt[մ]{Ա}=ա$, արդ $ա^{մ}=Ա$. եւ զորին հակառակն՝ քանզի $ա^{մ}=Ա$, ապա ուրեմն եւ $ա=\sqrt[մ]{Ա}$։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{4}=2,\ \text{քանզի}\ 2^2=4$$

$$\sqrt[3]{8}=2,\quad ,,\quad 2^3=8$$

$$\sqrt[4]{81}=3,\quad ,,\quad 3^4=81$$

Բ. Գտանի արմատ կարողութեան իւիք յորժամ զցուցիչ կարողութեանն ընդ ցուցիչ արմատոյն բաժանիցես։ Զոր օրինակ $\sqrt[մ]{տ^{ն}}=տ^{\frac{ն}{մ}}=ա$

Համարեսցուք եթէ $ա=տ^{ք}$. զորին զհետ գայ եթէ $ա^{մ}=(տ^{ք})^{մ}=տ^{մք}$, յորմէ եւ (ըստ Ա.) $տ^{մք}=տ^{ն}$, ուստի եւ $մք=ն$։ Արդ իբրեւ զերկոսին անդամս եւս հաւասարութեանն ընդ $մ$ բաժանիցես $\frac{մք}{մ}=\frac{ն}{մ}$, քանորդն $ք=\frac{ն}{մ}$, ապա ուրեմն $ա=տ^{ք}=տ^{\frac{ն}{մ}}$։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{ա^2} = ա^{\frac{2}{2}} = ա$$

$$\sqrt{ա^4} = ա^{\frac{4}{2}} = ա^2$$

$$\sqrt[3]{ա^3} = ա^{\frac{3}{3}} = ա$$

$$\sqrt[3]{ա^9} = ա^{\frac{9}{3}} = ա^3$$

$$\sqrt[մ]{ա^մ} = ա^{\frac{մ}{մ}} = ա$$

$$\sqrt[մ]{ա^{2մ}} = ա^2$$

$$\sqrt[մ]{} = ա^{3մ} = ա^3,$$ այլովքն հանդերձ։

245. Եթէ ցուցիչ այս նիշ կամ այն նիշ կարողութեան հաւասարաւ բաժանիցի ընդ արմատոյ ցուցիչն՝ արմատն եւս ելանէ այնպիսի ինչ կարողութեամբ որ ողջոյն թիւ է։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt[մ]{ա^{մն}} = ա^ն$$

$$\sqrt{ա^4} = ա^2, \sqrt[3]{ա^6 բ^3} = ա^2 բ$$

Այսպիսի արմատք անուանեալ կոչին Արմատք հաստատունք։ Իսկ ամէն օրինակի եւ արմատքն, որոց ցուցիչն յայնպիսի իմն կերպարանս կարիցէ փոփոխել, զի ընդ արմատոյ ցուցիչն բաժանիցի, Արմատք հաստատունք են։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2} = 4^{\frac{2}{2}} = 4,$$ կամ

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4:$$

Նոյնպէս

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4.$$ եւ այլք սոյնպիսիք։

Այս եթէ ցուցիչ կարողութեանն, որ ընդ նշանաւն արմատոյն կայցէ, չբաժանիցի հաւասարաւ ընդ արմատոյ ցուցիչն, յայնժամ եւ արմատն ճշգրիւ չելանէ, վասն որոյ պարտ եւ պատշաճ է կամ զնշան արմատոյն չեղծանել, եւ հաստատուն ունել, եւ կամ զարմատն կոտորեալ ցուցչաւ յայտ առնել ։ Զոր օրինակ ,

$$\sqrt{ա} = ա^{\frac{1}{2}} \text{ նոյնպէս } \sqrt{ա^3} = ա^{\frac{3}{2}}$$
$$\sqrt[3]{բ} = բ^{\frac{1}{3}} \quad " \quad \sqrt[3]{բ^2} = բ^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt[մ]{բ} = բ^{\frac{1}{մ}} \quad " \quad \sqrt[մ]{ա^ն} = ա^{\frac{ն}{մ}}$$

Այսպիսիքս անուանեալ կոչին Արմատք առանց հաստատութեան ։

246. Քանզի որովհետեւ $\sqrt[մ]{ա^ն} = ա^{\frac{ն}{մ}}$. Արդ եթէ ն նախաւոր թիւ ինչ իցէ, յայնժամ ա կարողութեանն մի արմատ հաստատուն լինել մարթի, որոյ ցուցիչն ինքնին գլխովին ն իցէ, այլ ոմն հակառակ, եթէ ն թիւ մի յօդուածոյ իցէ. յայնժամ $ա^ն$ կարողութիւնն այնչափ ինչ արմատս հաստատունս ունիցի, որչափ ինչ միանգամ առնելիք կամ բաժանարարք ի ն ցուցիչ կարողութեանն կայցեն ։ Նմին իրի ի $ա^{12}$ կարողութենէ կարեմք զերկրորդ, զերրորդ, զչորրորդ, զվեցերորդ եւ զերկոտասաներորդ արմատս հաստատունս հանել, քանզի

$$\sqrt{ա^{12}} = ա^6, \sqrt[3]{ա^{12}} = ա^4, \sqrt[4]{ա^{12}} = ա^3, \sqrt[6]{ա^{12}} = ա^2$$
$$\text{եւ } \sqrt[12]{ա^{12}} = ա$$

Իսկ որ արտաքոյ սոցա արմատքն իցեն, են արմատք առանց հաստատութեան ։

247. Քանզի $1^մ = 1$, զհետ գայ եթէ $\sqrt[մ]{1} = 1$, ապա ուրեմն. Ամենայն արմատք մի թուոյ հաստատունք են, եւ $= 1$ ։

248. Մարթի զչափ ինչ արմատական յոր ինչ եւ իցէ կարողութիւն բարձրացուցանել, յորժամ զչափն եւեթ, որ ընդ արմատոյ նշանաւն կայցէ, ի նոյն կարողութիւն վերացուցանիցես ։ Զոր օրինակ, $(\sqrt[մ]{ա^ն})^ր = \sqrt[մ]{ա^{նր}}$ ։ Համարեսցուք, եթէ $\sqrt[մ]{ա^ն} = ս$,

ուստի եւ $ա^{մ} = \mathbf{ա}^{ն}$: Արդ իբրեւ զերկուս եւս անդամս հաւասարութեանն ի ր կարողութիւն համբառնայցեմք $ա^{մր} = \mathbf{ա}^{նր}$, յորոց եթէ հաւասար արմատս մ հանցես, յայնժամ

$$\sqrt[մ]{ա^{մր}} = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{նր}} \text{ կամ } ա^{ր} = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{նր}}$$

լինիցի, եւ եթէ փոխանակ ա չափոյն զհաւասար զօրութիւնն դնիցեմք,

$$(\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}})^{ր} = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{նր}} :$$

Զոր օրինակ,

$$(\sqrt{\mathbf{ա}})^{2} = \sqrt{\mathbf{ա}^{2}} = \mathbf{ա}$$

$$(\sqrt[3]{\mathbf{ա}})^{3} = \sqrt[3]{\mathbf{ա}^{3}} = \mathbf{ա}$$

$$(\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}})^{մ} = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{նմ}} = \mathbf{ա}^{ն}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2\mathbf{ա}}{3\mathbf{բ}}}\right)^{2} = \sqrt[3]{\frac{4\mathbf{ա}^{2}}{9\mathbf{բ}^{2}}}$$

$$(\sqrt[3]{[5\sqrt{\mathbf{ա}}]})^{2} = \sqrt[3]{25\mathbf{ա}}$$

$$(\sqrt[ն]{[\mathbf{ա}\sqrt[մ]{\mathbf{բ}^{ն}}]})^{ր} = \sqrt[ն]{(\mathbf{ա}^{ր}\sqrt[մ]{\mathbf{բ}^{նր}})}$$

249. Յորժամ ի $\mathbf{ա}^{ն}$ թուոյ բազում այլեւայլ արմատս մի ըստ միոջէ հանել կամիցիս, նոյն ինչ իբր են առանձինն հանել զարմատսն, եւ կամ բազմացուցանել զարմատոյ ցուցիչս եւ հանել արմատ ըստ յայտ առնելոյ արդեանց արմատոյ ցուցչացն :

Համարեսցուք եթէ $ա = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}}$, եւ $բ = \sqrt[դ]{ա}$, կամ որ նոյն ինչ իբր են, $բ = \sqrt[դ]{(\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}})}$, յորմէ եւ $բ^{դ} = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = ա$ եւ $բ^{դմ} = \mathbf{ա}^{ն}$: Իբրեւ յերկոցունց եւս անդամոց վերջին հաւասարութեանս հանցես արմատս դմ, յայնժամ

$\sqrt[դմ]{բ^{դմ}} = \sqrt[դմ]{\mathbf{ա}^{ն}}$, ուստի եւ $բ = \sqrt[դմ]{\mathbf{ա}^{ն}}$, յորմէ եւ

$\sqrt[դ]{(\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}})} = \sqrt[դմ]{\mathbf{ա}^{ն}}$

Զայն մարթ է եւ վասն բազում արմատոյ իմանալ :

Զոր օրինակ,

$$\sqrt[ց]{[\sqrt[ր]{(\sqrt[պ]{բ^ն})}]}=\sqrt[ց]{(\sqrt[պր]{բ^ն})}=\sqrt[պրց]{բ^ն}$$

Զորին զհետ գայ, զի եթէ $\sqrt[դ]{(\sqrt[մ]{բ^ն})}=\sqrt[դմ]{բ^ն}$, ապա ուրեմն եւ $\sqrt[մ]{(\sqrt[դ]{բ^ն})}=\sqrt[մդ]{բ^ն}$, (∸. 68.)։

Արդ այսու օրինակաւ, յորժամ առաջի կայցէ մեզ զմեծ արմատս ի թուոց հանել, դիւրաւ կարիցեմք զնոսն վճարել, յորժամ զարմատոյ ցուցիչն յանելին լուծանիցեմք, եւ կարգ ըստ կարգէ զարմատսն հանիցեմք։ Զոր օրինակ ի $\sqrt[ր]{բ^ն}$ չափս, յորժամ $ր=մ\cdot յ\cdot շ\cdot չ\cdot դ\cdots$ իցէ, դիւրաւ մարթեմք զմ, յ, շ, չ, դ, ··· արմատսն մի ըստ միոջէ հանել, քան եթէ զր միանգամայն։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt[6]{բ^9}=\sqrt{(\sqrt[3]{բ^9})}=\sqrt{(\sqrt[3]{բ^3})^3}=\sqrt{բ^3},$$

$$\sqrt[4]{16}=\sqrt{(\sqrt{16})}=\sqrt{4}=2$$

$$\sqrt[6]{64}=\sqrt[3]{(\sqrt{64})}=\sqrt[3]{8}=2, \text{ կամ}$$

$$\sqrt[6]{64}=\sqrt{(\sqrt[3]{64})}=\sqrt{4}=2$$

250. Զօրութիւն արմատական չափուց չփոփոխի, եթէ ցուցիչքն եւ արմատոյ նշանին եւ կարողութեանն որ ընդ արմատոյ նշանաւն կայցէ, նովին թուով բազմացուցանիցին կամ ընդ նոյն թիւ բաժանիցին։

Դիցուք գրեսցուք, եթէ $\sqrt[մ]{բ^ն}=ա$, ուստի եւ $ա^մ=բ^ն$, յորմէ եւ $ա^{մր}=բ^{նր}$, զի հաւասարութիւնքս ի նոյն կարողութիւն համբարձան (∸. 216.)։ Իբրեւ յերկուց անդամոցն եւս մր արմատ հանիցեմք,

$$\sqrt[մր]{ա^{մր}}=\sqrt[մր]{բ^{նր}}, \text{ ուստի եւ}$$

$$ա=\sqrt[մր]{բ^{նր}}, \text{ յորմէ եւ } \sqrt[մ]{բ^ն}=\sqrt[մր]{բ^{նր}}$$

Դարձեալ համարեսցուք եթէ $\sqrt[մ]{բ^ն}=ա$, ուստի եւ $ա^մ=բ^ն$, յորմէ եւ $ա^{մ:ր}=բ^{ն:ր}$, քանզի յերկուցունց անդամոց հաւասարութեանն նոյն արմատ հանաւ յորոց իւրեւ հանցի արմատ մ:ք, յայնժամ

$$\sqrt[մ:ք]{ա^{մ:ք}} = \sqrt[մ:ք]{\mathbf{ա}^{ն:ք}} \text{ լինիցի, ուստի եւ}$$

$$ա = \sqrt[մ:ք]{\mathbf{ա}^{ն:ք}}, \text{ եւ}$$

$$ա = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = \sqrt[մ:ք]{\mathbf{ա}^{ն:ք}}$$

Մարթեմք զոր ասացաքս, ցուցանել եւ օրինակ զայս: Դնիցուք գրեացուք, եթէ $\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = ա$, ուստի եւ $ա^{մ} = \mathbf{ա}^{ն}$: Համարեացուք եթէ $մ:ք = ‡$, եւ $ն:ք = +$, արդ փոխանակ մ եւ ն ցուցչացն, դիցուք զնոցա զօրութիւնս $ք‡$, եւ $ք+$, լինիցի հաւասարութիւնն $ա^{ք‡} = \mathbf{ա}^{ք+}$, յորոց իւրեւ հանցի արմատ ք, յայնժամ

$$\sqrt[ք]{ա^{ք‡}} = \sqrt[ք]{\mathbf{ա}^{ք+}} \text{ լինիցին, եւ } ա^{‡} = \mathbf{ա}^{+},$$

յորոց իւրեւ հանիցեմք արմատ ‡, յայնժամ,

$$\sqrt[‡]{ա^{‡}} = \sqrt[‡]{\mathbf{ա}^{+}}, \text{ ուստի եւ } ա = \sqrt[‡]{\mathbf{ա}^{+}},$$

յորմէ եւ $ա = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = \sqrt[‡]{\mathbf{ա}^{+}}$,

եւ քանզի $‡ = մ:ք$, եւ $+ = ն:ք$, ապա ուրեմն

$$ա = \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = \sqrt[մ:ք]{\mathbf{ա}^{ն:ք}}$$

Զսորին զհետ գայ, եթէ զարմատական չափս մարթեմք համառօտիւք իմն դրոշմել, յորժամ զցուցիչ արմատոյ նշանին, եւ զցուցիչ կարողութեանն, որ ընդ արմատոյ նշանաւ կայցէ, ընդ նոյն չափ բաժանիցեմք: Զոր օրինակ,

$$\sqrt[6]{\mathbf{ա}^{3}} = \sqrt{\mathbf{ա}}, \quad \sqrt[4]{\mathbf{ա}^{2}\mathbf{բ}^{2}} = \sqrt[4]{(\mathbf{ա}\mathbf{բ})^{2}} = \sqrt{\mathbf{ա}\mathbf{բ}}$$

$$\sqrt[6]{\mathbf{ա}^{3}\mathbf{բ}^{9}} = \sqrt[6]{(\mathbf{ա}\mathbf{բ}^{3})^{3}} = \sqrt{\mathbf{ա}\mathbf{բ}^{3}}$$

$$(\sqrt[6]{+^{5}})^{3} = \sqrt[6]{+^{15}} = \sqrt{+^{5}}$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{\mathbf{ա}^{9}})} = \sqrt[6]{\mathbf{ա}^{9}} = \sqrt{\mathbf{ա}^{3}}$$

251. Յորժամ կամք իցեն քեզ բազում արմատոյ ցուցիչս, զոր օրինակ $\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}}$, $\sqrt[ղ]{\mathbf{բ}^{թ}}$, $\sqrt[ք]{\mathbf{գ}^{շ}}$ չափուցս, տուանց ինչ զօրութեանն փոփոխելոյ՝ շրջել, եւ ի վերայ ամենայն նշանաց արմատոյ դնել մի ցուցիչ հասարակաց, պարտ է յառաջինն գտանել զփոքր բաժանելին, որ ընդ ամենայն արմատոյ ցուցիչսն ճշդիւ բաժանիցի: Դնիցուք գրեացուք, եթէ իցէ ն. բաժանեա զն ուրոյն ուրոյն ընդ ամենայն արմատոյ ցուցիչսն, եւ քաներորդիւն՝ որ յայնցանէ ելանիցէ, բազմացո զցուցիչ կարողութեանն՝ որ ընդ նշանաւ արմատոյն, որով արմատական չափքն, զնոյն ցուցիչ ն ունիցին: Արդ

$$ն : մ = ա,\ \text{ուստի եւ}\ \sqrt[մ]{\mathbf{ա}^{ն}} = \sqrt[ն]{\mathbf{ա}^{նա}} = \sqrt[մա]{\mathbf{ա}^{նա}},\ \text{քանզի}\ մա = ն$$

$$ն : դ = բ,\ „\ \sqrt[դ]{\mathbf{բ}^{տ}} = \sqrt[ն]{\mathbf{բ}^{տբ}} = \sqrt[դբ]{\mathbf{բ}^{տբ}},\ „\ դբ = ն$$

$$ն : ր = գ,\ „\ \sqrt[ր]{\mathbf{գ}^{ս}} = \sqrt[ն]{\mathbf{գ}^{սգ}} = \sqrt[րգ]{\mathbf{գ}^{սգ}},\ „\ րգ = ն:$$

Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\mathbf{ա}},\ \sqrt[3]{\mathbf{բ}^2},\ \sqrt[4]{\mathbf{գ}^3},\ \sqrt[6]{\mathbf{դ}^5},\ \text{տան զմօտաւոր չափս},$$

$$\sqrt[12]{\mathbf{ա}^6},\ \sqrt[12]{\mathbf{բ}^8},\ \sqrt[12]{\mathbf{գ}^9},\ \sqrt[12]{\mathbf{դ}^{10}}:$$

252. Բազում արմատական չափք, որոց մի համօրէն արմատոյ ցուցիչ իցէ, միմեանմբք բազմացուցանին, յորժամ զկարողութիւնսն, որ ընդ արմատոյ նշանօքն կայցեն բազմացուցանիցես, եւ զնոյն համօրէն ցուցիչ հասարակաց ի վերայ արմատոյ նշանին դիցես: Զոր օրինակ, $\sqrt[ն]{\mathbf{ա}} \cdot \sqrt[ն]{\mathbf{բ}} \cdot \sqrt[ն]{\mathbf{գ}} = \sqrt[ն]{\mathbf{աբգ}}$: Քանզի եթէ $\sqrt[ն]{\mathbf{ա}} = ա$ իցէ, եւ $\sqrt[ն]{\mathbf{բ}} = բ$ եւ $\sqrt[ն]{\mathbf{գ}} = գ$, ուստի եւ $ա^{ն} = \mathbf{ա}$, եւ $բ^{ն} = \mathbf{բ}$, եւ $գ^{ն} = \mathbf{գ}$, յորմէ եւ $ա^{ն}բ^{ն}գ^{ն} = \mathbf{աբգ}$, եւ $(աբգ)^{ն} = \mathbf{աբգ}$: Արդ իբրեւ յերկոցունց եւս անդամոց հաւասարութեանն ն արմատ հանիցեմք, յայնժամ

$$\sqrt[ն]{(աբգ)^{ն}} = \sqrt[ն]{\mathbf{աբգ}},\ \text{յորմէ}\ աբգ = \sqrt[ն]{\mathbf{աբգ}},\ \text{ուրեմն}$$

$$\sqrt[ն]{\mathbf{ա}} \cdot \sqrt[ն]{\mathbf{բ}} \cdot \sqrt[ն]{\mathbf{գ}} = \sqrt[ն]{\mathbf{աբգ}}:$$

Զայն մարթ է վասն ամենայն առնելեացն իմանալ:

Զոր օրինակ,

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$$
$$\sqrt[3]{2ա}\times\sqrt[3]{3բ}=\sqrt[3]{6աբ}$$
$$\sqrt{[2(1+ի)]}\times\sqrt{[ա(1-ի)]}=\sqrt{[2ա(1-ի^2)]}$$
$$\sqrt[3]{\left(\frac{1+ի}{6}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1-ի}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{1+ի}{6(1-ի)}\right)}$$
$$\sqrt[5]{2ա^2բ}\times\sqrt[5]{3ագ^2}\times\sqrt[5]{\left(\frac{7է}{6աբգ}\right)}=\sqrt[5]{7ա^2գէ}$$

Ապա եթէ այլեւայլ իցեն արմատոյ ցուցիչքն, պարտ է յառաջագոյն զնոսա ի մի համարակաց ցուցիչ փոփոխել, (Հ· 251·), եւ յետ այնորիկ բազմացուցանել: Զոր օրինակ,

$$\sqrt[մ]{ա^ն}\cdot\sqrt[դ]{բ^պ}\cdot\sqrt[ր]{գ^ս}=\sqrt[մդր]{(ա^{նդր}\times բ^{մպր}\times գ^{մդս})}$$
$$\sqrt{2ա}\cdot\sqrt[4]{3բ}=\sqrt[4]{4ա^2}\times\sqrt[4]{3բ}=\sqrt[4]{12ա^2բ}$$
$$\sqrt{2ա}\cdot\sqrt[3]{2բ^2}=\sqrt[6]{8ա^3}\times\sqrt[6]{4բ^4}=\sqrt[6]{32ա^3բ^4}$$

253· Դիցուք գրեցուք, եթէ ա, բ, գ... առ միմեանց համեմատութեամբ նախաւոր թիւք իցեն. արդ որովհետեւ

$$\sqrt[մ]{ա^նբ^րգ^ս}=\sqrt[մ]{ա^ն}\times\sqrt[մ]{բ^ր}\times\sqrt[մ]{գ^ս}=ա^{\frac{ն}{մ}}\times բ^{\frac{ր}{մ}}\times գ^{\frac{ս}{մ}}$$

ապա ուրեմն. Հաստատուն իցէ արմատն արդեանց իւրեք, եթէ ցուցիչք ամենայն առնելեաց արդեանցն այնոցիկ բաժանիցին հաւասարեաւ ընդ արմատոյ ցուցիչն. ըստ նմին օրինակի, որչափ ինչ բազում համօրէն բաժանարարք իցեն առնելեացն, նոյնչափ եւ հաստատուն արմատք ելանիցեն. զոր օրինակ երկրորդ եւ չորրորդ արմատք $ա^8բ^4$ չափոյն հաստատունք են: Արդ՝ յորժամ յայս ինչ կամ յայն նիշ թուոյ որպիսի ինչ եւ իցէ արմատս հանել ոք կամիցի, պարտ է զթիւն ի նախաւոր առնելին լուծանել, յորմէ եւ կարիցէ իսկ տեղեակ լինել, եթէ այնպիսի իմն կարողութեանց արդիւնք իցէ արդեւք թիւն այն, զի ցուցիչք ամենայն առնելեացն ճշդիւ ընդ արմատոյ ցուցիչն բաժանել կարիցեն։ Իսկ եթէ այսպիսի ինչ դէպք դիպիցին, արմատն հաստատուն իցէ։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{144}=\sqrt{2^4}\times\sqrt{3^2}=2^2\cdot3=12$$
$$\sqrt{225}=\sqrt{(5^2\times3^2)}=5\cdot3=15$$
$$\sqrt{20736}=\sqrt{(2^8\times3^4)}=2^4\cdot3^2=144$$
$$\sqrt[4]{20736}=\sqrt[4]{(2^8\times3^4)}=2^2\cdot3=12$$
$$\sqrt[3]{438976}=\sqrt[3]{(2^6\times19^3)}=2^2\cdot19=76$$

որոց ամենայն արմատքն առ հասարակ հաստատունք են, իսկ

$$\sqrt{210}=\sqrt{(2\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ 7)},$$

առանց հաստատութեան։

254. Բայց սակայն բազում անգամ դէպ լինի, զի ոչ ամենայն ցուցիչք առնելեացն ճշդիւ բաժանիցին ընդ արմատոյ ցուցիչն, այլ ոմանք եւեթ։ Արդ յորժամ այսպիսի ինչ լինիցի, յայտնի նշանակ է եթէ առանց հաստատութեան է արմատն. վասն այսորիկ պարտ է զայնպիսի արդիւնսն յերկուս առնելիս լուծանել, ի հաստատունսն, եւ յառանց հաստատութեան, եւ յառաջնոյն եւեթ զարմատն հանել։

Համարեսցուք, եթէ $ն=մր$ իցէ, արդ $\sqrt[մ]{ա^ն բ^պ}=\sqrt[մ]{ա^ն}\times\sqrt[մ]{բ^պ}$, եւ որովհետեւ $\sqrt[մ]{ա^{մր}}=ա^ր$, ապա եւ $\sqrt[մ]{ա^ն բ^պ}=ա^ր\cdot\sqrt[մ]{բ^պ}$։ Դարձեալ դիցուք դնեսցուք եթէ $պ>մ$, եւ $պ$ ընդ $մ$ ճշդիւ չբաժանիցի, ուստի եւ $պ=մք+ց$, յորում $ց<մ$, յայնժամ $բ^{մք+ց}=բ^{մք}\cdot բ^ց$, եւ $\sqrt[մ]{բ^պ}=\sqrt[մ]{բ^{մք}}\cdot\sqrt[մ]{բ^ց}=բ^ք\sqrt[մ]{բ^ց}$, ուստի եւ $\sqrt[մ]{ա^ն բ^պ}=ա^ր բ^ք\cdot\sqrt[մ]{բ^ց}$։ Զայս օրինակ բազում չափք, որ առանց հաստատութեան իցեն, կարճ ի կարճոյ դրոշմին։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{ա^2բ}=ա\sqrt{բ},\ \sqrt{ա^3բ}=ա\sqrt{աբ}$$

$$\sqrt[3]{ա^4բ^3}=աբ\sqrt[3]{ա},\ \sqrt{32ա^7բ^3}=4ա^3բ\sqrt{2աբ}$$

$$\sqrt[մ]{(ա^մբգ^{2մ})}=ագ^2\sqrt[մ]{բ}$$

$$\sqrt[3]{432}=\sqrt[3]{(2^4\cdot3^3)}=6\sqrt[3]{2}$$

Այսու կանոնիւս կարիցէ ոք զբազում արմատական չափս, ի համազգիս շրջել, որով ամենայն կարողութիւնքն որ ի ներքոյ արմատոյ նշանին կայցեն, միով համօրէն հասարակաց կերպարանօք երեւիցին, որպէս ի մօտաւոր օրինակացն երեւիցի։

$$\sqrt{2},\ \sqrt{8}=\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{375},\ \text{եւ}\ \sqrt[3]{81}=5\sqrt[3]{3}\ \text{եւ}\ 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{12ա^2բ},\ \text{եւ}\ \sqrt{27բ^3}=2ա\sqrt{3բ}\ \text{եւ}\ 3բ\sqrt{3բ}$$

255. *Քանզի որովհետեւ* $ա=\sqrt[մ]{ա^մ}$, *ապա ուրեմն եւ*

$$ա\sqrt[մ]{բ^ն}=\sqrt[մ]{ա^մբ^ն}\ ։$$

Արդ մարթեմք զամենայն գործակիցս արմատական չափուց անել միաանգամ ի ներքոյ արմատոյ նշանին, յորժամ զայն ի կարողութիւն արմատոյ ցուցչին համբառնայցեմք, եւ նովաւ զչափն որ ընդ արմատոյ նշանաւն կայցէ, բազմացուցանիցեմք։ Զոր օրինակ,

$$2\sqrt{ա}=\sqrt{4ա}$$

$$3ա^2\sqrt[3]{(բ+գ)}=3\sqrt[3]{(բ+գ)ա^6}=\sqrt[3]{[27ա^6(բ+գ)]}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ա}{բ}}=\sqrt{\frac{ա}{4բ}},\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}=\sqrt[3]{\frac{9\cdot8}{4\cdot27}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$(ա-բգ)\sqrt{\frac{(ա+բգ)}{ա-բգ}}=\sqrt{(ա+բգ)(ա-բգ)}=$$
$$\sqrt{(ա^2-բ^2գ^2)}$$

256. *Յորժամ յարմատական ինչ չափոյ, յորում հաստատուն ինչ գործակից կայցէ, մեւս եւս արմատ հանել կամիցիս, յառաջագոյն զգործակիցն բեր ի ներքոյ արմատոյ նշանին, եւ ապա* (∸. 249.), զցուցիչն արմատոյ նշանին միմեամբք բազմացոյ։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt[մ]{(\mathbf{ա}\sqrt[ն]{\mathbf{բ}})}=\sqrt[մ]{(\sqrt[ն]{\mathbf{ա}^ն\mathbf{բ}})}=\sqrt[մն]{\mathbf{ա}^ն\mathbf{բ}}$$

$$\sqrt{(2\mathbf{ա}\sqrt[3]{5\mathbf{բ}})}=\sqrt[6]{40\mathbf{ա}^3\mathbf{բ}}$$

$$\sqrt{[2\mathbf{ա}\sqrt[3]{(3\mathbf{բ}\sqrt{5\mathbf{գ}})}]}=\sqrt{(2\mathbf{ա}\sqrt[6]{45\mathbf{բ}^2\mathbf{գ}})}=$$

$$=\sqrt[12]{(64\cdot45\mathbf{ա}^6\mathbf{բ}^2\mathbf{գ})}=\sqrt[12]{(2880\mathbf{ա}^6\mathbf{բ}^2\mathbf{գ})}$$

257. Ի քանորդէ կամ ի կոտորոյ ելանէ արմատ, յորժամ որ ի բաժանելւոյն կամ ի համարչէն հանիցէ արմատս, եւ զայն ի վերայ արմատոյ բաժանարարին կամ անուանչին բաժանիցէ։ Համառօտ ասել. Ելանէ արմատ ի կոտորոյ, յորժամ որ ի համարչէ եւ յանուանչէ կոտորոյն հանցէ արմատս, եւ զարմատ համարչին ընդ արմատ անուանչին բաժանիցէ։

Համարեսցուք եթէ $\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^ն}=ա$ եւ $\sqrt[մ]{\mathbf{բ}^տ}=բ$, ուստի եւ $ա^մ=\mathbf{ա}^ն$ եւ $բ^մ=\mathbf{բ}^տ$. եւ $\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^ն}:\sqrt[մ]{\mathbf{բ}^տ}=ա^մ:բ^մ=\frac{ա^մ}{բ^մ}=\left(\frac{ա}{բ}\right)^մ=\frac{\mathbf{ա}^ն}{\mathbf{բ}^տ}$։ Արդ եթէ ի վերջին երկուց անդամոց հաւասարութեանն զնոյն մ արմատ հանիցեմք, յայնժամ

$$\sqrt[մ]{\left(\frac{ա}{բ}\right)^մ}=\sqrt[մ]{\frac{\mathbf{ա}^ն}{\mathbf{բ}^տ}}\text{ լինիցի }\frac{ա}{բ}=\sqrt[մ]{\frac{\mathbf{ա}^ն}{\mathbf{բ}^տ}}$$

եւ եթէ փոխանակ $\frac{ա}{բ}$ զզօրութիւնն դնիցեմք,

$$\frac{\sqrt[մ]{\mathbf{ա}^ն}}{\sqrt[մ]{\mathbf{բ}^տ}}=\sqrt[մ]{\frac{\mathbf{ա}^ն}{\mathbf{բ}^տ}}$$ ։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2},\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2\mathbf{ա}}{6\mathbf{ա}}}=\frac{\sqrt{2\mathbf{ա}}}{\sqrt{6\mathbf{ա}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4ա^2բ}}{\sqrt[3]{2աբ^2}}=\sqrt[3]{\frac{4ա^2բ}{2աբ^2}}=\sqrt[3]{\frac{2ա}{բ}}$$

Իսկ եթէ այլակերպք ի միմեանց իցեն արմատոյ ցուցիչքն բաժանելւոյն եւ բաժանարարին կամ համարչին եւ անուանչին, պարտ է յառաջագոյն զարմատոյ ցուցիչսն ի մի հասարակաց ցուցիչ փոփոխել, (Ճ. 251.), եւ ապա ըստ յառաջագոյն ասացելոցս զերան վճարել :

$$\frac{\sqrt[մ]{ա^ն}}{\sqrt[դ]{բ^տ}}=\frac{\sqrt[մդ]{ա^{նդ}}}{\sqrt[մդ]{բ^{մտ}}}=\sqrt[մդ]{\frac{ա^{նդ}}{բ^{մտ}}}$$

$$\frac{\sqrt{2ա}}{\sqrt[3]{4ա^2}}=\frac{\sqrt[6]{8ա^3}}{\sqrt[6]{16ա^4}}=\sqrt[6]{\frac{8ա^3}{16ա^4}}\sqrt[6]{\frac{1}{2ա}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2ա}}$$

258. Եթէ հատատուն իցէ համարիչն կոտորոյ իրիք, եւ անուանիչն առանց հատատութեան կամ զորին հակառակն. կարէ ոք եւ զհատատուն արմատն ընդ արմատոյ նշանաւ գրոշմել, յործամ զհատատուն չափն ի կարողութիւն արմատոյ ցուցչին առանց հատատութեան չափոյն համբառնայցէ : Զոր օրինակ,

$$\frac{ա}{\sqrt[մ]{բ^ն}}=\frac{\sqrt[մ]{ա^մ}}{\sqrt[մ]{բ^ն}}=\sqrt[մ]{\frac{ա^մ}{ա^ն}},\ \text{քանզի}\ ա=\sqrt[մ]{ա^մ}.\ \text{կամ}$$

$$\frac{\sqrt[մ]{բ^ն}}{ա}=\frac{\sqrt[մ]{բ^ն}}{\sqrt[մ]{ա^մ}}=\sqrt[մ]{\frac{բ^ն}{ա^մ}}:$$

Ըստ սմին օրինակի

$$\frac{ա}{\sqrt{ա}}=\sqrt{\frac{ա^2}{ա}}=\sqrt{ա},\ \frac{ա}{\sqrt[3]{ա^2}}=\sqrt[3]{\frac{ա^3}{ա^2}}=\sqrt[3]{ա}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4ա^2}}{2ա}=\sqrt[3]{\frac{4ա^2}{8ա^3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2ա}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2ա}}$$

$$\frac{2\text{ա}^2}{3\sqrt[3]{4\text{ա}}}=\frac{\text{ա}}{3}\times\frac{2\text{ա}}{\sqrt[3]{4\text{ա}}}=\frac{\text{ա}}{3}\sqrt[3]{\frac{8\text{ա}^3}{4\text{ա}}}=\frac{\text{ա}}{3}\sqrt[3]{2\text{ա}^2}$$

Այսու կանոնիւս բազում արմատական չափք համառօտիւք գրոշմին:

259. Ամենայն չափ առանց հաստատութեան, որպիսի ինչ եւ իցէ, եթէ համարիչ իցէ, եւ եթէ անուանիչ, կարէ առանց ինչ զօրութեան կառու-րոյն փոփոխելոյ, ի հաստատուն շրջել: Զոր օրինակ եթէ զհամարիչ կոտորոյս $\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{ա}^{\text{ն}}}{\text{բ}^{\text{ր}}}}$ կամիցիմք ի հաստատուն շրջել. քանզի որովհետեւ $\frac{\text{ա}^{\text{ն}}}{\text{բ}^{\text{ր}}}=\frac{\text{ա}^{\text{մ}}}{\text{ա}^{\text{մ}-\text{ն}}\text{բ}^{\text{ր}}}$, (այս ինքն համարիչն եւ անուանիչն բազմացուցեալ $\text{ա}^{\text{մ}-\text{ն}}$ չափով), ապա ուրեմն

$$\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{ա}^{\text{ն}}}{\text{բ}^{\text{ր}}}}=\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{ա}^{\text{մ}}}{\text{ա}^{\text{մ}-\text{ն}}\text{բ}^{\text{ր}}}}=\frac{\text{ա}}{\sqrt[\text{մ}]{\text{ա}^{\text{մ}-\text{ն}}\text{բ}^{\text{ր}}}}:$$

Ըստ այնմ օրինակի, քանզի $\frac{\text{ա}^{\text{ն}}}{\text{բ}^{\text{ր}}}=\frac{\text{ա}^{\text{ն}}\text{բ}^{\text{մ}-\text{ր}}}{\text{բ}^{\text{մ}}}$, (այս ինքն համարիչն եւ անուանիչն բազմացուցեալ $\text{բ}^{\text{մ}-\text{ր}}$ չափով), ապա ուրեմն

$$\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{ա}^{\text{ն}}}{\text{բ}^{\text{ն}}}}=\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{ա}^{\text{ն}}\text{բ}^{\text{մ}-\text{ր}}}{\text{բ}^{\text{մ}}}}=\frac{\sqrt[\text{մ}]{\text{ա}^{\text{ն}}\text{բ}^{\text{մ}-\text{ր}}}}{\text{բ}}:$$

Յորոց դիւրաւ կարիցես ինքնին իմանալ զհամօրէն կանոնն, եթէ, Պարտ եւ պատշաճ է զհամարիչն եւ զանուանիչն այնպիսի ինչ չափով բազմացուցանել, որպէս զի ցուցիչ առանց հաստատութեան չափոյն փոփոխիցի, եւ եղանիցէ ի նմանէ ճշդիւ արմատ միւս չափոյն: Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

260. Այսու օրինակաւ մարթի եւ գտալի ինչ արմատական բատ ՚նմանութեան կոտորոյ դրոշմել, եւ դնել ի ՚նմա անուանիչ զոր եւ կամիցի ոք: Արդ գտալին զայն բազմացո անուանչաւն զոր կամիս, եւ զարդիւնսն դրոշմեա փոխանակ համարչի, եւ ընդ ՚նովաւ զանուանիչն: Համարեսցուք եթէ գտալիս $\sqrt[մ]{ան}$ ի կոտոր շրջել կամիցիմք, որոյ անուանիչ իցէ բ. զայս օրինակ վճարին իրքն:

$$\sqrt[մ]{ան}=\frac{բ\sqrt[մ]{ան}}{բ}=\frac{\sqrt[մ]{անբ^{մ}}}{բ}$$

Ըստ սմին օրինակի.

$$\sqrt{5}=\frac{\sqrt{(5\cdot 4)}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}$$

$$\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{(5\cdot 3^{3})}}{3}=\frac{\sqrt[3]{135}}{3}$$

Կայ մեզ առաջի գտալիս $\sqrt[մ]{ա}$, ի տասներորդական կոտոր շրջել, որոյ անուանիչ իցէ $10^{ն}$: Արդ

$$\sqrt[մ]{ա}=\frac{\sqrt[մ]{ա\cdot 10^{մն}}}{10^{ն}}$$

Նոյն օրինակ,

$$\sqrt{7}=\frac{\sqrt{700}}{10},\ \sqrt{7}=\frac{\sqrt{70000}}{100},\ \text{եւ այլն.}$$

$$\sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{7000}}{10},\ \sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{7000000}}{100},\ \text{եւ այլն:}$$

261. Համարեսցուք եթէ $\sqrt[2ն+1]{ա}=ա$, ուստի եւ $ա^{2ն+1}=ա$: Որովհետեւ (ըստ Հ. 229.) $(\pm ա)^{2ն+1}=\pm ա^{2ն+1}$ կամ $(\pm ա)^{2ն+1}=\pm ա$. ապա ուրեմն $\sqrt[2ն+1]{\pm ա}=\pm ա$ կամ $\sqrt[2ն+1]{\pm ա}=\pm\sqrt[2ն+1]{ա}$:

Արդ. Յորժամ ելանիցէ անզոյգ արմատ ի հաստատական կամ յաւրացական ինչ թուոյ, արմատն եւս իցէ հաստատական կամ ուրացական։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt[3]{-8}=-2,\ \sqrt[3]{-7}=-\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt[5]{32\mathbf{ա}^6\mathbf{բ}}=2\mathbf{ա}\sqrt[5]{\mathbf{ա}\mathbf{բ}}$$

Իսկ իբրեւ ի հաստատական ինչ չափոյ զոյգ արմատ ելանիցէ, արմատն կարէ եւ հաստատական եւ ուրացական լինել, այս ինքն $\pm$։

Քանզի որովհետեւ (տես Հ. 229.), $(\pm ա)^{2մ}=+ա^{2մ}$. արդ իբրեւ $\mathbf{ա}=ա^{2մ}$ հաշուիցեմք, պէտ գայ եթէ $\sqrt[2մ]{\mathbf{ա}}=\sqrt[2մ]{ա^{2մ}}=\sqrt[2մ]{(\pm ա)^{2մ}}=\pm ա$։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{4}=\pm 2,\ \sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3},\ \sqrt[4]{625}=\pm 5$$

$$\sqrt{7}=\pm\sqrt{7},\ \sqrt[6]{64\mathbf{ա}^7\mathbf{բ}}=\pm 2\mathbf{ա}\sqrt[6]{\mathbf{ա}\mathbf{բ}}\text{ ։}$$

262. Ուրացական ինչ չափոյ չէ մարթ զոյգ արմատս հանել, քանզի արմատն որ ելանիցէ, ոչ հաստատական է, եւ ոչ ուրացական։

Համարեսցուք, եթէ $\sqrt[2մ]{-\mathbf{ա}}=+ա$ կամ $\sqrt[2մ]{-\mathbf{ա}}=-ա$. պարտ իսկ էր $(\pm ա)^{2մ}=-\mathbf{ա}$ լինել, որ անհնարին ինչ է, զի (Հ. 229.) $(\pm ա)^{2մ}=+\mathbf{ա}$, ապա ուրեմն արմատ $\sqrt[2մ]{-\mathbf{ա}}$ չափոյն ոչ $+ա$ եւ ոչ $-ա$ իցէ։ Նմին իրի իսկ եւ այսպիսի արմատական չափք անուանեալ կոչին Անհնարինք, Մտացածինք, կամ Ցնորականք։

Ամենայն հնարաւոր եւ ճշմարիտ արմատք են ըստ նմանութեան $\sqrt[2ն]{\mathbf{ա}}$ կամ $\sqrt[2ն+1]{\pm\mathbf{ա}}$ չափուց։

263. Յորժամ ցնորական ինչ չափ առաջի կայցէ ի զոյգ կարողութիւն համբառնալ, յայնժամ զարմատոյ ցուցիչն եւ զցուցիչ կարողութեանն պարտ է ընդ մեծագոյն բաժանարարն իւրեանց բաժանել. որով անհնարին եւ ցնորական չափն, հնարաւոր ինչ չափ լինիցի։ Զոր օրինակ,

$$(\sqrt{-\text{ա}})^2=(-\text{ա})^1=-\text{ա}$$
$$(\sqrt{-2})^2=(-2)^1=-2$$
$$(\sqrt[2]{-\text{ա}})^{2\text{մ}}=(\sqrt[1]{-\text{ա}})^1=-\text{ա}$$

Ըստ այսմ օրինակի

$$(\sqrt[6]{-\text{ա}})^{10}=\sqrt[3]{-\text{ա}^5}=-\text{ա}\sqrt[3]{\text{ա}^2}$$
$$(\sqrt[12]{-\text{ա}})^{10}=\sqrt[6]{\text{ա}^5}$$
$$(\sqrt[10]{-\text{ա}})^{12}=\sqrt[5]{\text{ա}^6}=\text{ա}\sqrt[5]{\text{ա}}$$

264. Եթէ ցնորական ինչ արմատ, յանզոյգ կարողութիւն համբարձցի, արդիւնքն եւս ցնորական եւ անհնարին լինիցի: Վասնզի

$$(\sqrt[2\text{մ}]{-\text{ա}})^{2\text{ն}+1}=\sqrt[2\text{մ}]{(-\text{ա})^{2\text{ն}+1}}=\sqrt[2\text{մ}]{-\text{ա}^{2\text{ն}+1}}$$

Զոր օրինակ,

$$(\sqrt{-3})^3=\sqrt{-27}=\sqrt{(9\times-3)}=\pm3\sqrt{-3}$$
$$(\sqrt[6]{-2\text{ա}})^3=\sqrt{(-2\text{ա})^1}=\sqrt{-2\text{ա}}$$

265. Արժի եւ զամենայն ցնորական արմատս իբրեւ առնելով իմն զմտաւ ածել, յորոց մին որ զնշան $+$ ունիցի, բազմացուցեալ իցէ -1 չափով: Զոր օրինակ,

$$\sqrt{-\text{ա}}=\sqrt{\text{ա}}\times\sqrt{-1}$$
$$\frac{\sqrt{-\text{ա}}}{\sqrt{-\text{բ}}}=\frac{\sqrt{\text{ա}}}{\sqrt{\text{բ}}}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\text{ա}}{\text{բ}}}:$$

266. Ի 263, եւ 264 համարոցն յայտնապէս երեւիցի, եթէ որպիսի ինչ իցեն կարողութիւնք $\sqrt{-1}$ չափոյն, որ բազմիցս պատահէ ի նշանագրովք համարողութեան:

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{+1}=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=-1\times-1=+1$$
$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-})^4(\sqrt{-1})=+1\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^2=+1\times-1=-1$$
$$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^6(\sqrt{-1})=-1(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^8=(\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^4=+1\times+1=+1,$$ եւ

այլքն եւս մի ըստ միոջէ: Յորոց յայտ յանդիման երեւի եթէ կարողութիւնք $\sqrt{-1}$ չափոյն այլեւայլք են մինչեւ ի չորրորդ կարողութիւն, եւ յետ այնորիկ ծագեն առաջինքն կարգ ըստ կարգէ: Ի բազում դէպս դժուարինս ի կիր արկանի կանոնս, որպէսի ինչ, յորժամ զերկուս չափս,

$$\left(\frac{ա^{ն\sqrt{-1}}+ա^{-ն\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 \text{ եւ } \left(\frac{ա^{ն\sqrt{-1}}-ա^{-ն\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2$$

ի միմեանս յաւելուլ կամիցիմք: Արդ

$$\left(\frac{ա^{ն\sqrt{-1}}+ա^{-ն\sqrt{-1}}}{2}\right)^2+\left(\frac{ա^{ն\sqrt{-1}}-ա^{-ն\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2$$

$$=\frac{ա^{2ն\sqrt{-1}}+2ա^{ն\sqrt{-1}-ն\sqrt{-1}}+ա^{-2ն\sqrt{-1}}}{4}+$$

$$\frac{ա^{2ն\sqrt{-1}}-2ա^{ն\sqrt{-1}-ն\sqrt{-1}}+ա^{-2ն\sqrt{-1}}}{-4}=$$

$$\frac{ա^{2ն\sqrt{-1}}+2+ա^{-2ն\sqrt{-1}}}{4}+\frac{-ա^{2ն\sqrt{-1}}+2-ա^{-2ն\sqrt{-1}}}{4}=$$

$$\frac{ա^{2ն\sqrt{-1}}+2+ա^{-2ն\sqrt{-1}}-ա^{2ն\sqrt{-1}}+2-ա^{-2ն\sqrt{-1}}}{4}=$$

$$\frac{4}{4}=1$$

267. Յորժամ զարմատական չափս ի միմեանս յաւելուլ կամ ի միմեանց հանել կամիցի ոք, պարտ եւ պատշաճ է զումարական նշան յաւելման կամ հանման ի մէջ դնել, եւ ապա զանդամն համազգիս միանգամայն ժողովել: Այլ զի կարիցէ ոք զանդամն ի համազգիս փոփոխել, պարտ է վարել 254 կանոնիւ: Զոր օրինակ,

$$7\sqrt{8}+5\sqrt{8}=12\sqrt{8}=12\sqrt{2\cdot4}=12\cdot2\cdot\sqrt{2}=24\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{16ա^3բ}+\sqrt{4ա^2բ}-\sqrt{ա^2բ}-\sqrt[3]{54ա^3բ}=$$

$$2ա\sqrt[3]{2բ}+2ա\sqrt{բ}-ա\sqrt{բ}-3ա\sqrt[3]{2բ}=ա\sqrt{բ}-ա\sqrt[3]{2բ}$$

$$2\sqrt{(16\sqrt{18})}-\sqrt{(12\sqrt{2})}=$$
$$2\sqrt{(16\cdot 3\sqrt{2})}-\sqrt{(4\cdot 3\sqrt{2})}=$$
$$8\sqrt{(3\sqrt{2})}-2\sqrt{(3\sqrt{2})}=$$
$$(6\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{\sqrt{18}}=6\sqrt[4]{18}$$

268. Արմատական չափք միմեամբք բազմացուցանին, եթէ շրջեսցես զնոսա յառաջագոյն ի համազգիս (Տ. 251.), եւ ապա բազմացուցանիցես միմեամբք ուրոյն ուրոյն զչափսն՝ որ ընդ արմատոյ նշանաւն կայցեն, եւ զառնելիս՝ որ ընդ ձախմէ նշանին, (Տ. 257.)։

Զայն մարթ է առնել եւ զառնելեաց, որ ի բազում արմատական չափուց կազմիցին, զորս պարտ է ըստ նմանութեան ամփոփական բազմամասն չափուց բազմացուցանել։ Զոր օրինակ,

$$(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=12+5\sqrt{6}-18=$$
$$5\sqrt{6}-6=(5-\sqrt{6})\sqrt{6}$$

$$(մ\sqrt{ա}+ն\sqrt{բ})(մ\sqrt{ա}-ն\sqrt{բ})=(մ\sqrt{ա})^2-(ն\sqrt{բ})^2$$
$$=մ^2\sqrt{ա^2}-ն^2\sqrt{բ^2}=մ^2ա-ն^2բ$$

$$(ա\sqrt{գ}-բ\sqrt{դ})^2=(ա\sqrt{գ})^2-2աբ\sqrt{գդ}+(բ\sqrt{դ})^2=$$
$$ա^2գ-2աբ\sqrt{գդ}+բ^2դ\,.$$

269. Զկանոնս բաժանման ընծայեցուցաք (ի Տ. 257.)։ Զնոյն մարթ է առնել եւ վասն բաժանման բազմամասն չափուց։

$$\sqrt{(ա^2-դ^2)}:\sqrt{(ա+դ)^2}=\sqrt{\frac{(ա^2-դ^2)}{(ա+դ)^2}}=$$
$$\sqrt{\frac{(ա+դ)(ա-դ)}{(ա+դ)^2}}=\sqrt{\frac{ա-դ}{ա+դ}}$$

$$(2\sqrt[3]{ա^2}-7\sqrt[3]{աբ}-15\sqrt[3]{բ^2}):(\sqrt[3]{ա}-5\sqrt[3]{բ})=$$

$$\begin{array}{l|l}
2\sqrt[3]{ա^2}-10\sqrt[3]{աբ} & 2\sqrt[3]{ա}+3\sqrt[3]{բ} \\
-\qquad + & \\
\hline
3\sqrt[3]{աբ}-15\sqrt[3]{բ^2} & \\
3\sqrt[3]{աբ}-15\sqrt[3]{բ^2} & \\
-\qquad + & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$(12-6\sqrt{6}+6\sqrt{15}-9\sqrt{10}):(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=$$

$$\begin{array}{rl} 12-6\sqrt{6} & \qquad\qquad 2\sqrt{3}+3\sqrt{5} \\ -\quad + & \\ \hline 6\sqrt{15}-9\sqrt{10} & \\ 6\sqrt{15}-9\sqrt{10} & \\ -\qquad + & \\ \hline 0 & \end{array}$$

270. Զանուանիչ կոտորոյ, որ այսպիսի ինչ $\frac{\text{Ն}}{\text{Ա}\pm\sqrt{\text{Բ}}}$ կերպարանս ունիցի, որ բազում անգամ դիպի յերկրաչափութեան, մարթ է ի հաստատուն շրջել, յորժամ զնշան $\pm$ անուանչին փոխիցես ի $\mp$ այս ինքն $\text{Ա}\mp\sqrt{\text{Բ}}$, եւ նովաւ բազմացուցանիցես եւ զհամարիչ եւ զանուանիչ կոտորոյն, քանզի

$$(\text{Ա}\pm\sqrt{\text{Բ}})(\text{Ա}\mp\sqrt{\text{Բ}})=\text{Ա}^2-\text{Բ}:$$

Զոր օրինակ,

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{6+2\sqrt{5}}{5-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\text{ք}+\sqrt{(\text{ք}^2-1)}}=\frac{\text{ք}-\sqrt{(\text{ք}^2-1)}}{\text{ք}^2-\text{ք}^2+1}=\text{ք}-\sqrt{(\text{ք}^2-1)}$$

Սոյնն օրինակաւ եւ անուանիչ կոտորոյ, որ այսպիսի ինչ $\frac{\text{Ն}}{\sqrt{\text{Ա}}\pm\sqrt{\text{Բ}}}$ կերպարանս ունիցի՝ դառնայ ի հաստատուն, եթէ $\sqrt{\text{Ա}}\mp\sqrt{\text{Բ}}$ չափով եւ զհամարիչն եւ զանուանիչն բազմացուցանիցես:

$$\frac{\text{Ն}}{\sqrt{\text{Ա}}\pm\sqrt{\text{Բ}}}=\frac{\text{Ն}(\sqrt{\text{Ա}}\mp\sqrt{\text{Բ}})}{\text{Ա}-\text{Բ}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ք}}-\sqrt{(\text{ք}-1)}}=\frac{\sqrt{\text{ք}}+\sqrt{(\text{ք}-1)}}{\text{ք}-\text{ք}+1}=\sqrt{\text{ք}}+\sqrt{(\text{ք}-1)}$$

271. Քանզի որովհետեւ (Հ. 244. Բ.) $\sqrt[մ]{ա^{ն}}=ա^{\frac{ն}{մ}}$. զորին զհետ գայ, եթէ չափ ինչ արմատական շրջի ի կարողութիւն, որոյ ցուցիչն կոտոր իցէ, եթէ զցուցիչն կարողութեան որ ընդ արմատոյ նշանաւն կայցէ ընդ արմատոյ ցուցիչն բաժանիցէ ոք։ Այն օրինակ լինիցի, եթէ ցուցիչ կարողութեան, որ ընդ արմատոյ նշանաւ իցէ, եւ կամ արմատոյ ցուցիչն ուրացականք իցեն։

Քանզի $\sqrt[մ]{ա^{-ն}}=\sqrt[մ]{\frac{1}{ա^{ն}}}=\sqrt[մ]{\frac{1}{ա^{ն}}}=\frac{1}{\sqrt[մ]{ա^{ն}}}=\frac{1}{ա^{\frac{ն}{մ}}}=ա^{-\frac{ն}{մ}}$

Ուստի եւ հասարակաց օրինակաւ,

$\sqrt[մ]{ա^{\pm ն}}=ա^{\pm\frac{ն}{մ}}$, եւ զի $(ա^{\pm ն})^{\frac{1}{մ}}=ա^{\pm\frac{ն}{մ}}$, ապա

$$(ա^{\pm ն})^{\frac{1}{մ}}=\sqrt[մ]{ա^{\pm ն}}:$$

Ապա ուրեմն զչափ ինչ ի $\frac{1}{մ}$ կարողութիւն համբառնալ ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ հանել զմերորդ արմատ յայնմ չափոյ։

Աստանօրին իբրեւ յակամէ բղխեն մտաւոր հաւասարութիւնքս։

$ա^{\pm\frac{ն}{մ}}=ա^{\pm\frac{նպ}{մպ}}$

$(ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{պ}=ա^{\pm\frac{նպ}{մ}}, (ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{-պ}=ա^{\mp\frac{նպ}{մ}}$

$(ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{\frac{1}{ր}}=ա^{\pm\frac{ն}{մր}}, (ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{-\frac{1}{ր}}=ա^{\mp\frac{ն}{մր}}$

$(ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{\frac{պ}{ր}}=ա^{\pm\frac{նպ}{մր}}, (ա^{\pm\frac{ն}{մ}})^{\frac{-պ}{ր}}=ա^{\mp\frac{նպ}{մր}}$

$ա^{\pm\frac{ն}{մ}}\times ա^{\pm\frac{պ}{ր}}=ա^{\pm\frac{ն}{մ}\pm\frac{պ}{ր}}=ա^{\frac{\pm նր\pm մպ}{մր}}$

$ա^{\pm\frac{ն}{մ}}:ա^{\pm\frac{պ}{ր}}=ա^{\pm\frac{ն}{մ}\mp\frac{պ}{ր}}=ա^{\frac{\pm նր\mp մպ}{մր}}$

272. Զմտաւոր օրինակս դնեմք վասն ընդելանելոյ ուսանելեաց ի հաշուել զչափս, որոց ցուցիչքն կոտորք իցեն։

$$\frac{6ա^{\frac{1}{3}}բ^{\frac{1}{2}}գ \times 5ա^{-\frac{3}{4}}բ^{\frac{2}{3}}գ^{\frac{1}{3}}}{45ա^{-\frac{1}{6}}բ^{-\frac{5}{6}}գ^{\frac{4}{3}}}=$$

$$\frac{2}{3}ա^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}բ^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}գ^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}ա^{-\frac{1}{4}}բ^{2}$$

$$\left(2ա^{\frac{2}{3}}-3բ^{\frac{2}{3}}\right)\left(5ա^{\frac{1}{2}}+2բ^{\frac{1}{2}}\right)=10ա^{\frac{7}{6}}-15ա^{\frac{1}{2}}բ^{\frac{2}{3}}+4ա^{\frac{2}{3}}բ^{\frac{1}{2}}-6բ^{\frac{7}{6}}$$

$$(ա-բ):\left(ա^{\frac{1}{3}}-բ^{\frac{1}{3}}\right)=ա^{\frac{2}{3}}+ա^{\frac{1}{3}}բ^{\frac{1}{3}}+բ^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{l}
ա-ա^{\frac{2}{3}}բ^{\frac{1}{3}} \\
-\quad+ \\
\hline
ա^{\frac{2}{3}}բ^{\frac{1}{3}}-բ \\
ա^{\frac{2}{3}}բ^{\frac{1}{3}}-ա^{\frac{1}{3}}բ^{\frac{2}{3}} \\
-\qquad+ \\
\hline
ա^{\frac{1}{3}}բ^{\frac{2}{3}}-բ \\
ա^{\frac{1}{3}}բ^{\frac{2}{3}}-բ \\
-\qquad+ \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

273. Բազում անգամ դէպ լինի, զի չափ ինչ արմատական իցէ ըստ օրինակիս $\sqrt[\pm\frac{ն}{մ}]{ա^{ր}}$, որոյ արմատոյ ցուցիչն կոտոր իցէ: Արդ չափքս շրջին ի կերպարանս սովորական արմատական չափուց, յորժամ եւ արմատոյ ցուցիչն, եւ ցուցիչ կարողութեանն որ ընդ արմատոյ նշանաւ, $\pm$ մ անուանչաւ կոտորոյն բազմացուցանիցին: Քանզի

$$\sqrt[\frac{ն}{մ}]{ա^{ր}}=\sqrt[ն]{ա^{մր}},\quad \sqrt[-\frac{ն}{մ}]{ա^{ր}}=\sqrt[ն]{ա^{-մր}}=\sqrt[ն]{\frac{1}{ա^{մր}}}=\frac{1}{\sqrt[ն]{ա^{մր}}}$$

Իրրեւ այնպէս իմն փոփոխիցի, զի արմատոյ ցուցիչն $=1$ իցէ, յայնժամ պարտ է զարմատոյ նշանն ի բաց թողուլ: Զոր օրինակ, $\sqrt[1]{ա}=ա$, քանզի $ա^1=ա$:

$$\sqrt[\frac{2}{5}]{ա}=\sqrt{ա^5}=ա^2\sqrt{ա},\ \sqrt[\frac{1}{2}]{ա}=\sqrt[1]{ա^2}=ա^2$$

$$\sqrt[-\frac{3}{2}]{ա}=\sqrt[3]{ա^{-2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{ա^2}}$$

ՀԱՏԱԾ Գ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՆԵԼՈՅ ԱՐՄԱՏՍ Ի ՅՕԴՈՒԱԾՈՑ ԶԱՓՈՒՑ ՆՇԱՆԱԳՐԱՑ ԵՒ ՆՇԱՆԱԿԱՑ ԹՈՒՈՑ

Ա. ՎԱՍՆ ՀԱՆԵԼՈՅ ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՐՄԱՏ

274. ԸՆԴՍՏԻՆ ի 244 համարոյ, յորում ընծայեցաք օրէնս վասն հանելոյ արմատ ի միամասն չափուց, որոց հաստատուն իցէ արմատն, յայտ է, եթէ այնու օրինակաւ մարթեմք եւ ի յօդուածոյից անտի զնոյն արմատ հանել արտաքս, իբրեւ զայնուիկ յիւրեանց պարզ առնելին լուծանիցեմք: Զոր օրինակ,

$$ա^6-2ա^5բ+ա^4բ^2=ա^4(ա^2-2աբ+բ^2)=ա^4(ա-բ)^2$$

ապա ուրեմն

$$\sqrt{(ա^6-2ա^5բ-ա^4բ^2)}=\sqrt{ա^4(ա-բ)^2}=ա^2(ա-բ):$$

Ըստ նմին օրինակի

$$\sqrt[3]{(24ա^4-16ա^3բ)}=\sqrt[3]{8ա^3(3ա-2բ)}=2ա\sqrt{(3ա-2բ)}:$$

Զորս զհետ գայ, եթէ երրորդ արմատ $24ա^4-16ա^3բ$ չափոյն առանց հաստատութեան իցէ, քանզի չմարթի $3ա-2բ$ հաստատուն ինչ երրորդ արմատ ունել:

Այլ զի ոչ սակաւ աշխատութիւն եւ անհնարին վտանգ է յառաջագոյն զչափսն ի պարզ առնելիսն լուծանել, վասն այսորիկ բարւոք է այլով իմն օրինակաւ համարելոյ, յորում չեն պէտք յառնելիսն լուծանելոյ, դիւրաւ զնոյն արմատ ի յօդուածոյից անտի գտանել:

275. Ըստ 230 Համարոյ երկրորդ կարողութիւն երկմասնեան Ա+Բ չափոյն կազմի յերկրորդ կարողութենէ առաջին մասին որ է Ա², յերկպատիկ արդեանց երկոցունց մասանցն որ է 2ԱԲ, եւ յերկրորդ կարողութենէ երկրորդ մասին որ է Բ². ուստի եւ

(Ա+Բ)²=Ա²+2ԱԲ+Բ²:

Արդ զամենայն յօդուածոյ չափ մարթեմք իբրեւ երկրորդ կարողութիւն Ա+Բ չափոյն համարել, եւ զարմատն ըստ հաստատեալ օրինակիս գտանել: Իսկ թէ կամք իցեն յԱ²+2ԱԲ+Բ² չափոյ երկրորդ արմատ հանել, պարտ եւ պատշաճ է այնու կարգաւ զնոյն վճարել, որով Ա+Բ յերկրորդ կարողութիւն վերացաւ. այլ այս ինչ է խաւրն, զի ուր բազմացուցեր, անդ պարտ է բաժանել, եւ ուր ուրեք ի կարողութիւն բարձրացուցեր, անդ պարտ է քեզ հանել արմատս: Արդ ի գտանել զերկրորդ արմատն ի

(Ա²+2ԱԲ+Բ²)=Ո

չափոյ, պարտ է

Ա. Յառաջին անդամոյ անտի հանել երկրորդ արմատ, եւ դրոշմել զայն փոխանակ առաջնոյ մասին արմատոյն, ուստի եւ √Ա²=Ա:

Բ. Օգտել առաջին մասն արմատոյն բարձրացո միանգամ յերկրորդ կարողութիւն, այս ինքն ի Ա², եւ հան զայն ի բովանդակ Ո չափոյ անտի, եւ մնասցէ մնացորդ 2ԱԲ+Բ²(=Մ):

Գ. Վասնզի առաջին մասն Մ չափոյն է կրկնապատիկ արդիւնք առաջին եւ երկրորդ մասին արմատոյ. վասն այսորիկ ի գտանել զերկրորդ մասն արմատոյն, պարտ է բաժանել զառաջին անդամն Մ մնացորդին որ է 2ԱԲ ընդ կրկնապատիկն առաջնոյ մասին արմատոյն ընդ 2Ա, որով ծագէ քանորդն երկրորդ մասն արմատոյն: Ուստի եւ 2ԱԲ:2Ա=Բ:

Դ. Այսու Բ երկրորդ մասամբն արմատոյն բազմացո զկրկնապատիկն առաջնոյ մասին 2Ա, եւ զարդիւնսն 2ԱԲ հան ի Մ մնացորդէն, յորմէ մնայ միայն մնացորդ յետին անդամն $Բ^2$. վասն այսորիկ զերկրորդ-ման արմատոյն բարձրացո յերկրորդ կարողութիւն որ է $Բ^2$, եւ հան ի վերջին մնացորդէն: Իսկ քանզի ի Ս. երեք մասունքն եւս յորոց երկրորդ կարողութիւնն $Ա+Բ$ չափոյն կազմիցի, անթերի եւ կատարեալ գտանին, նմին իրի իսկ $Ա+Բ$ կատարեալ երկրորդ արմատ է Ս. չափոյն:

276. Զանունն՝ զոր ի Դ. կանոնն նշանակեցաք, մտարի համառօտիւք: Քանզի որովհետեւ $2ԱԲ+Բ^2 =(2Ա+Բ)Բ$. վասն այսորիկ պարտ է յերկպատիկն առաջնոյ մասին արմատոյն եւ զերկրորդ ման յաւելուլ եւ զբովանդակութիւնն $2Ա+Բ$ երկրորդ Բ մասամբն բազմապատկանել, եւ զարդիւնսն $2ԱԲ+Բ^2$ ի Ս՝ մնացորդէն հանել:

Ա.

$$\sqrt{(է^2ա^{2ժ}+2էճա^{ժ}ի^{հ}+ճ^2ի^{2հ})}=էա^{ժ}+ճի^{հ}$$

$$Ա^2=է^2ա^{2ժ}$$

$$-$$

$$\overline{\qquad(+2էճա^{ժ}ի^{հ}+ճ^2ի^{2հ}):2էա^{ժ}}$$

$$(2Ա+Բ)Բ=2էճա^{ժ}ի^{հ}+ճ^2ի^{2հ}$$

$$-\qquad -$$

$$\overline{\qquad 0 \qquad}$$

$$Ա=\sqrt{է^2ա^{2ժ}}=էա^{ժ}$$

$$2Ա=2էա^{ժ}$$

$$Բ=2էճա^{ժ}ի^{հ}:2էա^{ժ}=ճի^{հ}$$

$$2Ա+Բ=2էա^{ժ}+ճի^{հ}$$

Բ.

$$\sqrt{\left(\frac{4\text{ա}^2}{25}-\frac{6\text{ա}\text{գ}^2}{5\text{բ}}+\frac{9\text{գ}^4}{4\text{բ}^2}\right)}=\frac{2\text{ա}}{5}-\frac{3\text{գ}^2}{2\text{բ}}$$

$$\text{Ա}^2=\frac{4\text{ա}^2}{25}$$

$$-$$

$$\left(-\frac{6\text{ա}\text{գ}^2}{5\text{բ}}+\frac{9\text{գ}^4}{4\text{բ}^2}\right):\frac{4\text{ա}}{5}$$

$$(2\text{Ա}+\text{Բ})\text{Բ}=-\frac{6\text{ա}\text{գ}^2}{5\text{բ}}+\frac{9\text{գ}^4}{4\text{բ}^2}$$

$$+\qquad -$$

$$0$$

277. Ապա եթէ յօղուածոյ չափն երկրորդ կարողութեան իցէ երեքմասնեան կամ որպիսի ինչ եւ իցէ բազմամասն արմատոյ, մարթ է զերկրորդ արմատս չափուցն այնոցիկ օգնականութեամբ $\text{Ա}^2+2\text{Ա}\text{Բ}+\text{Բ}^2$ օրինակիս գտանել, յորժամ զգտեալ երկուս մասունս արմատոյն միանգամայն իբրեւ առաջին մասն համարիցիս, այս ինքն $\text{Ա}+\text{Բ}=\text{Ա}'$ դիցես, եւ ըստ 275. Բ կանոնաց զկրկին վճարիցես։ Ի մօտաւոր օրինակս յայտ յանդիման տեսանիցեն իրքն։

Ա.

$$\sqrt{(4\text{ա}^2+12\text{ա}\text{բ}+9\text{բ}^2-20\text{ա}\text{գ}-30\text{բ}\text{գ}+25\text{գ}^2)}=\overbrace{\underset{2\text{ա}}{\text{Ա}}+\underset{3\text{բ}}{\text{Բ}}}^{\text{Ա}'}\underset{-5\text{գ}}{\text{Բ}'}$$

$$\text{Ա}^2=4\text{ա}^2$$

$$-$$

$$(+12\text{ա}\text{բ}-9\text{բ}^2-20\text{ա}\text{գ}-30\text{բ}\text{գ}+25\text{գ}^2):4\text{ա}$$

$$(2\text{Ա}+\text{Բ})\text{Բ}=12\text{ա}\text{բ}+9\text{բ}^2$$

$$-\qquad -$$

$$(-20\text{ա}\text{գ}-30\text{բ}\text{գ}+25\text{գ}^2):(4\text{ա}+6\text{բ})$$

$$(2\text{Ա}'+\text{Բ}')\text{Բ}'=-20\text{ա}\text{գ}-30\text{բ}\text{գ}+25\text{գ}^2$$

$$+\qquad +\qquad -$$

$$0$$

$$\text{Ա}=\sqrt{4\text{ա}^2}=2\text{ա} \qquad \text{Ա}'=2\text{ա}+3\text{բ}$$
$$2\text{Ա}=4\text{ա} \qquad 2\text{Ա}'=4\text{ա}+6\text{բ}$$
$$\text{Բ}=12\text{աբ}:4\text{ա}=3\text{բ} \qquad \text{Բ}'=-20\text{ագ}:4\text{ա}=-5\text{գ}$$
$$2\text{Ա}+\text{Բ}=4\text{ա}+3\text{բ} \qquad 2\text{Ա}'+\text{Բ}'=4\text{ա}+6\text{բ}-5\text{գ}$$

$$\text{Բ}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4\text{ա}^4}{9}-2\text{ա}^3\text{գ}+\frac{269\text{ա}^2\text{գ}^2}{84}-\frac{15\text{ագ}^3}{7}-\frac{25\text{գ}^4}{49}\right)}=$$

$$\text{Ա}^2=\frac{4\text{ա}^4}{9} \qquad \frac{2\text{ա}^2}{3}-\frac{3\text{ագ}}{2}+\frac{5\text{գ}^2}{7}$$

$$-$$

$$\left(-2\text{ա}^3\text{գ}+\frac{269\text{ա}^2\text{գ}^2}{84}\right):\frac{4\text{ա}^2}{3}$$

$$(2\text{Ա}+\text{Բ})\text{Բ}=-2\text{ա}^3\text{գ}+\frac{9\text{ա}^2\text{գ}^2}{4}$$

$$+ \qquad -$$

$$\left(\frac{20\text{ա}^2\text{գ}^2}{21}-\frac{15\text{ագ}^3}{7}+\frac{25\text{գ}^4}{49}\right):\frac{4\text{ա}^2}{3}-3\text{ագ}$$

$$(2\text{Ա}'+\text{Բ}')\text{Բ}'=\frac{20\text{ա}^2\text{գ}^2}{21}-\frac{15\text{ագ}^3}{7}+\frac{25\text{գ}^4}{49}$$

$$- \qquad + \qquad -$$

$$0$$

278. Յորչափ եւ ի բազում անդամոց կազմիցի արմատն, մարթ է զայն գտանել. յորժամ զգտեալ մասունս արմատոյն առաջին անդամ համարիցիս, եւ ապա ըստ 277 ¶ համարոյ զկրան վճարիցես, եւ եթէ չափն, յորմէ զարմատն հանես արտաքս, կատարեալ երկրորդ կարողութիւն իցէ, ի վախճանել գործոյ հաշուին, եւ ոչ մի ինչ մնացորդ մնայցէ. ապա եթէ յետ զամենայն չափն հանելոյ դեռ եւս մնացորդ ինչ երեւիցի, նշանակ է եթէ կարողութիւնն այն՝ յորմէ զարմատն հանել կամիցիս, չէ կատարեալ երկրորդ կարողութիւն, որոյ եւ ոչ հաստատուն ինչ արմատ գուցէ: Արդ՝ եթէ յայսպիսի ինչ չափուց երկրորդ արմատ հանել ոք կամիցի, ծագեն ելանեն կարգ ըստ

կարգէ անբաւ անդամք արմատոյն, եւ հաստատուն արմատն բնաւ ոչ գտանիցի, քանզի եթէ զգտեալ մասունս արմատոյն միւանգամ յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցէ ոք, պարտ է ի կարողութիւնն եւ այլ եւս մասունս յաւելուլ, զի կարողութեանն որ ի ներքոյ արմատոյ նշանին իցէ, հաւասարիցին: Զոր օրինակ,

$$\sqrt{(ա^2+բ)}=ա+\frac{բ}{2ա}-\frac{բ^2}{8ա^3}+\frac{բ^3}{16ա^5}$$

$$Ր^2=ա^2$$

$$-$$

$$+բ : 2ա$$

$$(2Ր+ր)ր=\quad բ+\frac{բ^2}{4ա^2}$$

$$-\quad -$$

$$-\frac{բ^2}{4ա^2}.\left(2ա+\frac{բ}{ա}\right)$$

$$(2Ր'+ր')ր'=-\frac{բ^2}{4ա^2}-\frac{բ^3}{8ա^4}+\frac{բ^4}{64ա^6}$$

$$+\quad +\quad -$$

$$\left(\frac{բ^3}{8ա^4}-\frac{բ^4}{64ա^6}\right):\left(2ա+\frac{բ}{ա}-\frac{բ^2}{4ա^3}\right)$$

$$(2Ր''+ր'')ր''=\frac{բ^3}{8ա^4}+\frac{բ^4}{16ա^6}-\frac{բ^5}{64ա^8}+\frac{բ^6}{256ա^{10}}$$

$$-\quad -\quad +\quad -$$

$$-\frac{3բ^4}{64ա^6}+\frac{բ^5}{64ա^8}-\frac{բ^6}{256ա^{10}}\ \text{եւ այլն:}$$

Սովին օրինակաւ մարթ է մասունս անթիւս մի ըստ միոջէ յաւելուլ:

279. Եթէ զկարգ եւ որով օրինակաւ գտանիցին կարգ ըստ կարգէ անդամքն, դիւրաւ գտանել մարթ է ըստ 243 համարոյ: Քանզի որովհետեւ

$$\sqrt{(ա^2+բ)}=(ա^2+բ)^{\frac{1}{2}},$$

յորժամ $ա=է^2$, եւ $ն=\frac{1}{2}$ համարեսցիմք, ծագեսցեն

$$Ա=(է^2)^{\frac{1}{2}}=է$$

$$Բ=\tfrac{1}{2}\cdot է\cdot\frac{ա}{է^2}=\frac{ա}{2է}$$

$$Գ=\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{ա}{2է}\cdot\frac{ա}{է^2}=-\frac{ա^2}{8է^3}$$

$$Դ=\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\cdot-\frac{ա^2}{8է^3}\cdot\frac{ա}{է^2}=\frac{ա^3}{16է^5}$$

$$Ե=\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\cdot\frac{ա^3}{16է^5}\cdot\frac{ա}{է^2}=-\frac{5ա^4}{128է^7},\ \text{եւ այլն.}$$

$$\sqrt{(է^2+ա)}=է+\frac{ա}{2է}-\frac{ա^2}{8է^3}+\frac{ա^3}{16է^5}-\frac{5ա^4}{128ա^7},\ \text{եւ այլն:}$$

Ըստ այսմ օրինակի,

$$\sqrt{(է^2-ա)}=է-\frac{ա}{2է}-\frac{ա}{8է^3}-\frac{ա^3}{16է^5}-\frac{5ա^4}{128է^7},\ \text{այլովքն}$$

համդերձ:

280. Վասն հանելոյ երկրորդ արմատ ի նշանակաց թուոց պարտ է գմտաւոր օրէնսն առնուլ ի միտ:

Ա. Երկրորդ կարողութիւն թուոյ, յորում Ն նշանակք թուոց կայցեն, կազմի ի 2Ն—1 եւ կամ թէ աւելի եւս ի 2Ն նշանակաց: Այս ինքն կամ յերկպատիկ միով պակաս նշանակաց թուոց արմատոյն եւ կամ յերկպատիկ նշանակաց թուոյ: Արդ զի կարիցեմք ճշդիւ գտանել ի վերայ հասանել իրացն ճշմարտութեան, քննեսցուք զերկուս զերկուս թիւս, յորս 1, 2, 3, ...Ն նշանակք թուոց կայցեն, յորոց մին կարի իմն փոքրագոյն, եւ միւսն կարի մեծագոյն իցէ: Որպիսի ինչ,

$$1^2<9^2=1<81$$
$$10^2<99^2=100<9801$$
$$100^2<999^2=10000<999^2.\ \text{եւ այլն.}$$

Նոյնպէս եւ այլ թիւքն: Մարթ է զայս եւ հասա-րակաց իմն օրինակաւ ցուցանել: Վասնզի որովհետեւ փոքրագոյն չափն՝ յորում Ն տեղիք գտանիցին, ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ $10^{\text{Ն}-1}$, յորում Ն—1 դատարկքն են, որ առաջի 1 չափոյն իցեն. արդ եթէ $10^{\text{Ն}-1}$ յերկրորդ կարողութիւն համբարձցի, լինիցի $(10^{\text{Ն}-1})^2=10^{2\text{Ն}-2}$, որոյ տեղիքն են

$$1+2\text{Ն}-2=2\text{Ն}-1:$$

Իսկ մեծագոյն թիւն, յորում Ն տեղիք իցեն, համարեսցուք եթէ իցէ Ա, յոր իբրեւ մի միութիւն յաւելուցու $\text{Ա}+1$, լինիցի հաւասար չափուցն՝ յորս $\text{Ն}+1$ նշանակք թուոց իցեն: Աստանօր յայտ է եթէ $\text{Ա}+1=10^{\text{Ն}}$, ուստի եւ $\text{Ա}<10^{\text{Ն}}$: Արդ եթէ երկոքեանն եւս յերկրորդ կարողութիւն ելանիցեն, $\text{Ա}^2<10^{2\text{Ն}}$: Տեղիք $10^{2\text{Ն}}$ չափոյն են $1+2\text{Ն}$, ապա ուրեմն Ա^2 չափոյն $\text{Ա}^{2\text{Ն}}$ իցէ:

Բ. Եթէ թիւ ինչ սկիզբն յաջմէ արարեալ ի բաժինս բաժինս կոտորիցի, որպէս զի յիւրաքանչիւր բաժնի անդ երկու երկու նշանակք թուոց կայցեն, բաց ի վերջին անդամոյն, յորում մարթ է լինել մի կամ երկուց նշանակաց թուոց, եւ ի բովանդակ թըւոյն հանցի երկրորդ արմատ, հարկ է արմատոյն յայնչափ ինչ նշանակաց թուոց կազմել, որչափ ինչ միանգամ բաժինք ի կարողութեանն գտանիցին:

Համարեսցուք եթէ բովանդակ թիւն ի Ն բաժինս իցէ բաժանեալ: Եթէ նշանակք թուոյն յետին բաժնի ձախոյ կողման 2 իցեն, յայնժամ ողջոյն թիւն 2Ն իցէ, իսկ եթէ 1, յայնժամ $2\text{Ն}-1$: Արդ արմատ թուոյս չմարթի ոչ $\text{Ն}+1$ եւ ոչ $\text{Ն}-1$ լինել, այլ Ն: Յայտ անտի է, զի եթէ $\text{Ն}+1$ լինէր, երկրորդ կարողութիւնն արմատոյս այսորիկ (ըստ Ա.) $2\text{Ն}+2$ իցէ, եւ կամ գոնեայ $2\text{Ն}+2-1=2\text{Ն}+1$. իսկ եթէ $\text{Ն}-1$ իցէ արմատն, երկրորդ կարողութիւնն $2\text{Ն}-2$, եւ երկուքն եւս հակառակ են 2Ն եւ $2\text{Ն}-1$ համարելոյս:

գ.. Երկրորդ կարողութիւն ձախոյ կողման յետին տեղւոյ արմատոյն փակեալ բովանդակի յաւաջին բաժնի անդ, որ ընդ ձախմէն կայցէ, նոյնպէս երկրորդ կարողութիւն ձախոյ կողման երկուց յետին տեղեաց արմատոյն, ի յետին երկուս բաժինս, որ ընդ ձախմէ, եւ համօրէն օրինակաւ երկրորդ կարողութիւն ք տեղեաց արմատոյն, ի ձախոյ կողման ք բաժինս:

Համարեսցուք եթէ թիւ մի ի թուոյն ի Ն բաժինս իցէ բաժանեալ, եւ յետին բաժինն ձախոյ կողման ա իցէ, յորում մարթ է 1 կամ 2 նշանակաց թուոց լինել, եւ դիցուք գրեսցուք եթէ արմատ ա չափոյն Ա իցէ: Յայտ է եթէ առաջի ա բաժնին Ն—1 բաժինք եւս կարգեալ են, յորս 2Ն—2 նշանակք թուոց դասնին, կամ 2Ն—2 զատարկք, որովք բազմացուցեալ է ա, զայս օրինակ,

$$\text{ա} \cdot 10^{2\text{Ն}-2}:$$

Իսկ առաջի Ա արմատոյն Ն—1 նշանակք թուոց են, ուստի եւ $\text{Ա} \cdot 10^{\text{Ն}-1}$. որոյ երկրորդ կարողութիւնն

$$\text{Ա}^2 \cdot 10^{2\text{Ն}-2}:$$

Արդ իբրեւ զչափսն $\text{ա} \cdot 10^{2\text{Ն}-2}$ եւ $\text{Ա}^2 \cdot 10^{2\text{Ն}-2}$ ընդ միմեանս համեմատիցեմք, գտանեմք եթէ $10^{2\text{Ն}-2}$ յերկոսին եւս հաւասար է, յորմէ յայտ է եթէ կամ $\text{ա}=\text{Ա}^2$, եւ կամ $\text{ա}>\text{Ա}^2$, եթէ առանց վրիպելոյ իւրն վճարեալ իցեն: Որով երեւի եթէ $\text{Ա}^{2\text{Ն}-2}$ փակի ի $\text{ա} \cdot 10^{2\text{Ն}-2}$:

Ըստ նմին օրինակի եթէ զերկուս բաժինսն ձախոյ կողման ա համարիցիմք, եւ զբաժինսն որ առաջի ա բաժնիցն Ն—2, եւ զնշանակս թուոցն որ ի նոսա, 2Ն—4. եւ զարմատն ա բաժնիցն Ա., յայտ է եթէ

$$\text{ա} \cdot 10^{2\text{Ն}-4}$$

իցէ, եւ երկրորդ կարողութիւն $\text{Ա} \cdot 10^{\text{Ն}-2}$ արմատոյն

$$\text{Ա}^2 \cdot 10^{2\text{Ն}-4}:$$

Իսկ արդ եթէ ք բաժինս միանգամայն ի ձախմէ կուսէ առնուցումք, եւ զայնոսիկ ա չափով նշանակիցեմք, եւ այլ բաժինք Ն—ք իցեն եւ նշանակք թուոց նոցա $2\text{Ն}-2\text{ք}$, աստատին յայտ է եթէ

$$\text{ա}\cdot 10^{2\text{Ն}-2\text{ք}}$$

իսկ արմատն որ Ա. իւն նշանակիցի՝ $\text{Ա.}\cdot 10^{\text{Ն}-\text{ք}}$, եւ երկրորդ կարողութիւն նորա

$$\text{Ա.}^2\cdot 10^{2\text{Ն}-2\text{ք}} :$$

Դ. Եթէ զմեծագոյն տեղին արմատոյն, եւ զայլսն եւս որ զնորա կնի կարգեալ տողիցին, նշանակիցեմք Ա., Բ., ... նշանագրովք, եւ զբաժինն որ Ա. տեղւոյ արմատոյն համեմատիցի ա նշանագրով, եւ զայն որ Բ. թուոյն համեմատիցի բգ չափովք․ յայտ է եթէ երկրորդ կարողութիւն Ա.Բ. նշանակաց լինիցի ի մէջ թուոցն գ կարգին, այս ինքն է, եթէ վերջին թիւն կարողութեանն այնորիկ հասանիցէ մինչեւ ի գ ։

Յորժամ Ա, Բ, Գ, եւ ա, բ, գ, նշանագիրք կից առընթեր միմեանց գրիցին, զառանկարգեան տեղեաց յայտ առնեն, եւ ոչ եթէ զբազմացուցանելոյ ։

Համարեսցուք եթէ ա|բգ|..|.. թիւ ի Ն բաժինս իցէ բաժանեալ, որոյ արմատն Ա.Բ... իցէ ։ Քանզի որովհետեւ ա է Ներորդ բաժինն, ապա բաժինքն որ առաջի ա բաժնին իցեն՝ են $\text{Ն}-1$, եւ զի բգ է $(\text{Ն}-1)$ երորդ բաժինն, ապա ուրեմն առաջի բգ բաժնին $\text{Ն}-2$ բաժինք եւս իցեն ։ Զորին զհետ գայ, եթէ առաջի ա չափոյն $2\text{Ն}-2$ եւ առաջի բ չափոյն $2\text{Ն}-3$ եւ առաջի գ չափոյն $2\text{Ն}-4$ նշանակք թուոց կամ տեղիք իցեն ։ Արդ մարթես ի միտ առնուլ ճանաչել, եթէ $\text{ա}\cdot 10^{2\text{Ն}-2}$, եւ $\text{բ}\cdot 10^{2\text{Ն}-3}$ եւ $\text{գ}\cdot 10^{2\text{Ն}-4}$ իցեն ։ Զայն ձեւ օրինակի եւ յարմատն $\text{Ա.}\cdot 10^{\text{Ն}-1}$, եւ $\text{Բ.}\cdot 10^{\text{Ն}-2}$, զորոց զհետ գայ եթէ արմատն ա եւ բգ բաժնիցն իցէ

$$\text{Ա.}\cdot 10^{\text{Ն}-1}+\text{Բ.}\cdot 10^{\text{Ն}-2},$$

որ իբրեւ յերկրորդ կարողութիւն համբարձցի,

$$(\text{Ա.}\cdot 10^{\text{Ն}-1}+\text{Բ.}\cdot 10^{\text{Ն}-2})^2=\text{Ա.}^2\cdot 10^{2\text{Ն}-2}+2\,\text{Ա.Բ.}\cdot 10^{2\text{Ն}-3}$$
$$+\text{Բ.}^2\cdot 10^{2\text{Ն}-4},$$ յորում կշռին

$$\text{Ա.}^2\cdot 10^{2\text{Ն}-2}=\text{ա}\cdot 10^{2\text{Ն}-2}$$
$$2\text{Ա.Բ.}\cdot 10^{2\text{Ն}-3}=\text{բ}\cdot 10^{2\text{Ն}-3}$$
$$\text{Բ.}^2\cdot 10^{2\text{Ն}-4}=\text{գ}\cdot 10^{2\text{Ն}-4}$$

Ա. Եւ արդ իբրեւ յայս նիշ կամ յայն նիշ թու-
ոյ երկրորդ արմատ կամիցիս հանել, Ա. Ըստ Ի օրի-
նաց, զբովանդակ թիւն ի բաժինս բաժինս զատեալ
որոշեսջիր: Բ. Յառաջին բաժնէ անտի ձախոյ կողման
հան զերկրորդ արմատ, եւ եթէ չիցէ այն կատարեալ
երկրորդ կարողութիւն, հան երկրորդ արմատ ի մեր-
ձաւոր փոքրագոյն երկրորդ կարողութենէ. զգտեալ
մասն արմատոյն բարձրացո յերկրորդ կարողութիւն,
եւ հան յա բաժնէ: Գ. Եթէ մնասցէ ինչ մնացորդ,
շրջեա զայն ի միութիւնս բ կարգի, այս ինքն բազ-
մացո զայն 10ամբք, եւ յաւել յայն զբ, եւ զբո-
վանդակութիւնն բաժանեա ընդ երկպատիկն առաջ-
նոյ մասին արմատոյն որ է 2Ա, եւ զքանորդն դի-
ջիր փոխանակ երկրորդ մասին արմատոյն. զերկպա-
տիկն արդեանց երկուց մասանցն արմատոյն որ է 2ԱԲ,
հան ի բ չափոյն, եթէ մնասցէ ինչ մնացորդ, շրջեա
զայն ի միութիւնս գ կարգի, յորում փակեալ բո-
վանդակիցի երկրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին
արմատոյն որ է Բ^{2}. հան զայն ի գ չափոյ անտի: Ե-
թէ մնասցէ մնացորդ նուազ նշանաւ, որ դէպ լի-
նի, յորժամ հանելի թիւն մեծագոյն քան զնուա-
զելի թիւն իցէ, պարտ է քեզ զերկրորդ մասն արմա-
տոյն այնչափ ինչ միութեամբ նուազեցուցանել մին-
չեւ հաստատական լինիցի մնացորդն կամ հանելի
թիւն փոքր իցէ քան զնուազելին եւ կամ հաւասար:
Դ. Եթէ միւսանգամ յաւելուցու ինչ մնացորդ, եւ
այլ եւս բաժինք կայցեն, զբաժինսն որովք ցայն
վայր զհաշիւն կատարեցեր, համարեա ա՛, եւ զբա-
ժինն որ զհետն գայցէ բ՛գ՛, նոյնպէս եւ զթիւս ար-
մատոյն՝ որ գտեալ իցեն Ա՛ եւ զերկրորդ անդամն զոր
առաջի կայցէ գտանել Բ՛: Արդ քանզի յ ա՛ բաժնէ
զարմատն հանեալ եմք, վասն այնորիկ զառաջինն
զմնացորդն շրջեա ի միութիւնս բ՛ կարգի, եւ ըստ
օրինակին զոր վերագոյնդ ասացաք յառաջ խաղա,
մինչեւ ցկատարել ն բաժնիցն: Ե. Եթէ ի կատա-

րել բաժնիցն չյաւելուցու ինչ Միացորդ, նշանակ է կատարեալ եւ անթերի գտանելոյ արմատոյն ի կարողութեանն, ապէթէ Միացորդ ինչ յաւելուցու, յայտ արարեալ ցուցանէ, եթէ արմատն զոր գտեր արմատ է մերձաւոր փոքր կարողութեանն: Զոր օրինակ

$$\sqrt{26|63|28|24|49} = 51607$$

$$\text{Ա}^2 = 25$$

$$\text{Բ} = 16 : 10 = 2\text{Ա}$$

$$2\text{Ա}\text{Բ} = 10$$

$$\text{գ} = 63$$

$$\text{Բ}^2 = 1$$

$$\text{բ}' = 622 : 102 = 2\text{Ա}'$$

$$2\text{Ա}'\text{Բ}' = 612$$

$$\text{գ}' = 108$$

$$\text{Բ}'\text{Բ}' = 36$$

$$\text{բ}'' = 722 : 1032 = 2\text{Ա}''$$

$$2\text{Ա}''\text{Բ}'' = 0$$

$$\text{գ}'' = 7224$$

$$\text{Բ}''\text{Բ}'' = 0$$

$$\text{բ}''' = 72244 : 10320 = 2\text{Ա}'''$$

$$2\text{Ա}'''\text{Բ}''' = 72240$$

$$\text{գ}''' = 49$$

$$\text{Բ}'''\text{Բ}''' = 49$$

$$0$$

Կարգ իրացն այսպիսի ինչ է: Քանզի առաջին բաժինն 26 չէ կատարեալ երկրորդ կարողութիւն, վասն այսորիկ որոնեցաք զերկրորդ արմատ մերձաւոր փոքր երկրորդ կարողութեանն, որ է 5: Զ 25 որ կշռի Ա^2 չափոյն հանաք յառաջին բաժնէն եւ զմնացորդն շրջեցաք ի միութիւնս առաջին թուոյ մերձաւոր բաժնին, այս ինքն բազմացուցեալ 10 ամբք, յաւելաք յայն զ6. բաժանեցաք զայն ընդ 10, որ համեմատի 2Ա, եւ զ1 քաներորդն եդաք փոխանակ Բ մասին արմատոյն. զերկպատիկն արդեանց առաջին եւ երկրորդ մասանցն արմատոյն, որ է 10 եւ կշռի ՁՐՐ· չափոյն, հանաք ի 16 ից, եւ զմնացորդն 6 շրջեցաք ի միութիւնս 3 կարգին, որով եւ եղեւ 63, յորմէ հանեալ զ1 երկրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին արմատոյն, յաւելաւ 62: Շրջեցաք զայն ի միութիւն երկրորդ բաժնին, որոյ առաջին տեղին է 2, որում կշռի բ՛, եւ զայն բաժանեալ ընդ 102, որում կշռի ՁՐ՛, զքանորդն 6 եդաք յարմատն ի տեղի բ՛ անդամոյն, եւ զայլն եւս ըստ սմին օրինակի կատարեցաք:

281. Համառօտիւք իմն վճարին իւրքն, յորժամ փոխանակ առանձինն ուրոյն ուրոյն զնշանակս բաժնիցն բերելոյ առընթեր մնացորդացն, զբովանդակ բաժինսն առանձինն ածիցես, եւ ընդ երկպատիկն արդեանց մասանցն արմատոյն բաժանիցես զամենայն թիւսն զայնոսիկ. բաց ի վերջին նշանակէ թուոյն, եւ յաջոյն թուոյն հանցես զբովանդակութիւն երկպատիկ արդեանց մասանց արմատոյն, եւ երկրորդ կարողութեան վերջին մասին արմատոյն. այնպէս իմն զյաւելլն մասունս ընդ նուազելի թուովն կարգեալ որպէս զի երկպատիկ արդիւնքն մասանց արմատոյն ընդ նշանակօք թուոց բ կարգին անկանիցին, եւ երկրորդ կարողութիւնն վերջին մասին արմատոյն ընդ միութեամբք գ կարգին: Արդ այս լինիցի, յորժամ առաջի երկպատկի առաջին մասին արմատոյն դիցես զերկրորդ մասն արմատոյն, եւ զայն բազմացուցանիցես երկրորդ մասամբ արմատոյն, եւ զարդիւնսն հանցես ի բ եւ ի գ կարգէն:

$$\sqrt{21|38|13|76}=4624$$

```
 16
 ―――
  538 : 86
  516
  ―――
   2213 : 922
   1844
   ――――
    36976 : 9244
    36976
    ―――――
        0
```

Բ· ՎԱՍՆ ՀԱՆԵԼՈՅ ԵՐՐՈՐԴ ԱՐՄԱՏ

282· *Օրէնքն՝ որովք գտանիցի երրորդ արմատ յօդուածոյ չափուց, ցուցանին մօտաւոր օրինակաւս։*
(Ա+Բ)³=Ա³+3Ա²Բ+3ԱԲ²+Բ³=Ո· (Տ· 232)։

Արդ զչափն, զորոյ զերրորդ արմատն գտանել կամիցիս, կարգեա ըստ համեմատութեան ցուցչաց նշանագրացն եւ ապա յեռ այնորիկ,

Ա· *Յառաջին անդամոյ անտի* (Ա³) *կարողութեանն հան զերրորդ արմատ, եւ զայն դրոշմեա փոխանակ առաջին մասին արմատոյն, այս ինքն* ∛Ա³=Ա։ *Համբարձեալ զայն մասն արմատոյն յերրորդ կարողութիւն, հան զայն ի* Ո· *չափոյն եւ մնայցէ* 3Ա²Բ+3ԱԲ²+Բ³=Մ·

Բ· *Քանզի ի* Մ· *մնացորդին դեռ եւս գտանի երեքպատիկ արդիւնք երկրորդ կարողութեան առաջնոյ մասին արմատոյն եւ երկրորդ մասին, եւ երեքպատիկ արդիւնք առաջնոյ մասին եւ երկրորդ կարողութեան երկրորդ մասին արմատոյն նոյնպէս երրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին. արդ զի զերկրորդ մասն գտանիցես, պարտ է քեզ ընդ երեքպատիկ երկրորդ կարողութիւն առաջնոյ մասին արմատոյն զառաջին մասն ի* Մ· *մնացորդին բաժանել, վասն այնորիկ, զ*3Ա³Բ *բաժանեա ընդ երեքպատիկ երկրորդ կարողութիւն առաջին մասին արմատոյն, որ է* 3Ա², *եւ զքանորդն* Բ *փոխանակ երկրորդ մասին արմատոյն դիջիր։*

Գ․ Այսու երկրորդ մասամբն արմատոյն բազմայս զեռեքպատիկ երկրորդ կարողութիւն առաջնոյ մասին արմատոյն, որոյ արդիւնքն լինիցի $3\text{Ա}^2\text{Բ}$: Նոյնպէս առաջին մասամբն զեռեքպատիկ երկրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին արմատոյն, որոյ արդիւնքն լինիցի $3\text{Ա}\text{Բ}^2$: Զերկոսին արդիւնսն յաւել ի միմեանս, եւ յայն յաւելեալ զերրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին արմատոյն Բ^3 հան զբովանդակութիւնն ի Մ՝ մնացորդէն, եւ եթէ չյաւելուցու ինչ մնացորդ, Ո․ կատարեալ երրորդ կարողութիւն իցէ:

Ա․

$$\sqrt[3]{(\text{է}^3\text{ա}^{3\text{մ}}+3\text{է}^2\text{ծ}\text{ա}^{2\text{մ}}\text{փ}^{\text{ն}}+3\text{է}\text{ծ}^2\text{ա}^{\text{մ}}\text{փ}^{2\text{ն}}+\text{ծ}^3\text{փ}^{3\text{ն}})}=\text{է}\text{ա}^{\text{մ}}+\text{ծ}\text{փ}^{\text{ն}}$$

$$\text{Ա}^3=\text{է}^3\text{ա}^{3\text{մ}}$$

$$-$$

$$(3\text{է}^2\text{ծ}\text{ա}^{2\text{մ}}\text{փ}^{\text{ն}}+3\text{է}\text{ծ}^2\text{ա}^{\text{մ}}\text{փ}^{2\text{ն}}+\text{ծ}^3\text{փ}^{3\text{ն}}) : 3\text{է}^2\text{ա}^{2\text{մ}}$$

$$3\text{է}^2\text{ծ}\text{ա}^{2\text{մ}}\text{փ}^{\text{ն}}+3\text{է}\text{ծ}^2\text{ա}^{\text{մ}}\text{փ}^{2\text{ն}}+\text{ծ}^3\text{փ}^{3\text{ն}}$$

$$- \quad - \quad -$$

$$0$$

$$\text{Ա}=\sqrt[3]{\text{է}^3\text{ա}^{3\text{մ}}}=\text{է}\text{ա}^{\text{մ}} \qquad 3\text{Ա}^2\text{Բ}=3\text{է}^2\text{ծ}\text{ա}^{2\text{մ}}\text{փ}^{\text{ն}}$$

$$3\text{Ա}^2=3\text{է}^2\text{ա}^{2\text{մ}} \qquad 3\text{Ա}\text{Բ}^2=3\text{է}\text{ծ}^2\text{ա}^{\text{մ}}\text{փ}^{2\text{ն}}$$

$$\text{Բ}=3\text{է}^2\text{ծ}\text{ա}^{2\text{մ}}\text{փ}^{\text{ն}} : 3\text{է}^2\text{ա}^{2\text{մ}}=\text{ծ}\text{փ}^{\text{ն}} \qquad \text{Բ}^3=\text{ծ}^3\text{փ}^{3\text{ն}}$$

Բ․

$$\sqrt[3]{\left(\frac{8\text{ա}^6}{27}-\text{ա}^4\text{փ}^3+\frac{9\text{ա}^2\text{փ}^6}{8}-\frac{27\text{փ}^9}{64}\right)}=\frac{2\text{ա}^2}{3}-\frac{3\text{փ}^3}{4}$$

$$\frac{8\text{ա}^6}{27}$$

$$-$$

$$\left(-\text{ա}^4\text{փ}^3+\frac{9\text{ա}^2\text{փ}^6}{8}-\frac{27\text{փ}^9}{64}\right):\frac{4\text{ա}^4}{3}$$

$$-\text{ա}^4\text{փ}^3+\frac{9\text{ա}^2\text{փ}^6}{8}-\frac{27\text{փ}^9}{64}$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$0$$

283. Իսկ եթէ արմատն, զոր գտանելն կամիցիս, եռեքմասնեան իցէ, պարտ է զառաջին զերկուս մասունսն ըստ օրինակին որպէս (Հ. 272) ասացաք, գտանել։ Ապա յետ այնորիկ, զերկուս մասունսն զայնոսիկ իբրեւ զառաջին մասն $\text{Ա}'$, երկմասնեան $\text{Ա}'+\text{Բ}'$ արմատոյն համարել, եւ գտանել զերկրորդ $\text{Բ}'$ մասն նովին օրինակաւ, որպէս վերագոյնդ ասացաք։ Օր օրինակ

$$\sqrt[3]{(1-6\text{ւ}+21\text{ւ}^2-44\text{ւ}^3+63\text{ւ}^4-54\text{ւ}^5+27\text{ւ}^6)}$$

$$\begin{array}{l}
1 \\
\underline{-\quad} \\
\qquad(-6\text{ւ}+21\text{ւ}^2-44\text{ւ}^3):3 \\
\qquad-6\text{ւ}+12\text{ւ}^2-\ 8\text{ւ}^3 \\
\qquad\underline{+\quad-\quad+} \\
(9\text{ւ}^2-36\text{ւ}^3+63\text{ւ}^4-54\text{ւ}^5+27\text{ւ}^6):(3-12\text{ւ}+12\text{ւ}^2) \\
\ \ 9\text{ւ}^2-36\text{ւ}^3+63\text{ւ}^4-54\text{ւ}^5+27\text{ւ}^6 \\
\underline{-\quad+\quad-\quad+\quad-} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\overbrace{\text{Ա}'}^{} \\
\text{Ա}\quad\text{Բ}\quad\text{Բ}' \\
=1-2\text{ւ}+3\text{ւ}^2
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Ա}=\sqrt[3]{1}=1,\ 3\text{Ա}^2=3 \\
\text{Բ}=-6\text{ւ}:3=-2\text{ւ} \\
3\text{Ա}^2\text{Բ}=-6\text{ւ} \\
3\text{Ա}\text{Բ}^2=12\text{ւ}^2 \\
\text{Բ}^3=-8\text{ւ}^3 \\
\text{Ա}'=1-2\text{ւ} \\
3(\text{Ա}')^2=3-12\text{ւ}+12\text{ւ}^2
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{Բ}'=9\text{ւ}^2:3=3\text{ւ}^2 \\
3(\text{Ա}')^2\text{Բ}'=9\text{ւ}^2-36\text{ւ}^3+36\text{ւ}^4 \\
3\text{Ա}'(\text{Բ}')^2=27\text{ւ}^4-54\text{ւ}^5 \\
(\text{Բ}')^3=27\text{ւ}^6 \\
3(\text{Ա}')^2\text{Բ}'+3\text{Ա}'(\text{Բ}')^2+(\text{Բ}')^3 \\
=9\text{ւ}^2-36\text{ւ}^3+63\text{ւ}^4-54\text{ւ}^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad+27\text{ւ}^6
\end{array}$$

284. Օրոյն ձեւ օրինակի վճարին իւքն, յոր-ժամ անթիւ եւ անհամար անդամք իցեն կարողու-թեանն, յորմէ զերրորդ արմատ հանել կամիցիս, ո-րով եւ անբաւ մասունք ելանիցեն արմատոյն, որպէս օրինակս որ առաջիս կայ, ցուցանիցէ։

$$\sqrt[3]{(ք^3+ֆ)}=ք+\frac{ֆ}{3ք^2}-\frac{ֆ^2}{9ք^5}+\frac{5ֆ^3}{81ք^8},\ \ldots.$$

$$ք^3$$

$$-$$

$$ֆ : 3ք^2$$

$$ֆ+\frac{ֆ^2}{3ք^3}+\frac{ֆ^3}{27ք^6}$$

$$-\quad-\quad-$$

$$\left(-\frac{ֆ^2}{3ք^3}-\frac{ֆ^3}{27ք^6}\right):3\left(ք+\frac{ֆ}{3ք^2}\right)^2$$

$$-\frac{ֆ^2}{3ք^3}-\frac{2ֆ^3}{9ք^6}-\frac{ֆ^4}{27ք^9}+\frac{ֆ^4}{27ք^9}+\frac{ֆ^5}{81ք^{12}}-\frac{ֆ^6}{729ք^{15}}$$

$$+\quad+\quad+\quad-\quad-\quad+$$

$$\frac{5ֆ^3}{27ք^6}+\frac{ֆ^4}{27ք^9}-\frac{ֆ^4}{27ք^9}-\frac{ֆ^5}{81ք^{12}}+\frac{ֆ^6}{729ք^{15}}$$

$$Ա=ք,\ Բ=\frac{ֆ}{3ք^2}$$

$$Ա'=ք+\frac{ֆ}{3ք^2},\ Բ'=-\frac{ֆ^2}{9ք^5}$$

Եւ եթէ $Ա''=ք+\frac{ֆ}{3ք^2}-\frac{ֆ^2}{9ք^5}$ համարիցեմք, յայնժամ նովին օրինակաւ գտանիցեմք և զ$Բ''=\frac{5ֆ^3}{81ք^8}$. այն օրինակ և զայլ անդամն կարգ ըստ կարգէ, և չկարիցեմք հաւաստեաւ ի վերայ հասանել ճշմարիտ արմատոյն, քանզի ցանգ յաւելուցուն մնացորդք, յորոց պարտ է հանել արմատս, զի զերրորդ արմատ $ք^3+ֆ$ չափոյն գտանել կարիցեմք:

285. Այլ այս կարգ անդամոյն արմատոյն դիւրաւ և համառօտիւք գտանիցի, յորժամ ըստ 243 համարոյ համարիցիմք $ա=ք^3$, և $ն=\frac{1}{3}$, քանզի $\sqrt[3]{(ք^3+ֆ)}=(ք^3+ֆ)^{\frac{1}{3}}$, ուստի և

$$Ա=(ք^3)^{\frac{1}{3}}=ք$$

$$Բ=\frac{1}{3}\cdot ք\cdot\frac{ֆ}{ք^3}=\frac{ֆ}{3ք^2}$$

$$Գ=\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{ֆ}{3ք^2}\cdot\frac{ֆ}{ք^3}=-\frac{ֆ^2}{9ք^5}$$

$$Դ=\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot-\frac{ֆ^2}{9ք^5}\cdot\frac{ֆ}{ք^3}=\frac{5ֆ^3}{81ք^8}$$

$$Ե=\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{5ֆ^3}{81ք^8}\cdot\frac{ֆ}{ք^3}=-\frac{10ֆ^4}{243ք^{11}}$$

Նոյնպէս եւ այլքն մի ըստ միոջէ: Ուստի եւ

$$\sqrt[3]{(ք^3+ֆ)}=ք+\frac{ֆ}{3ք^2}-\frac{ֆ^2}{9ք^5}+\frac{5ֆ^3}{81ք^8}-\frac{10ֆ^4}{243ք^{11}}$$

Եւ եթէ ֆ ուրացական իցէ, յայնժամ

$$\sqrt[3]{(ք^3+ֆ)}=ք-\frac{ֆ}{3ք^2}-\frac{ֆ^2}{9ք^5}-\frac{5ֆ^3}{81ք^8}-\frac{10ֆ^4}{243ք^{11}}$$

286. *Վասն գերրորդ արմատ հանելոյ ի թուոց, պարտ է ի միտ առնուլ զմտաւոր կանոնս:*

Ա. *Երրորդ կարողութիւն թուոյ՝ յորում ն նշանակք թուոց կայցեն, կազմի ի* 3ն *եւ թէ նուազագոյն եւս ի* 3ն—2 *թուոց: Այս ինքն է կամ յերեքպատիկ երկուքումբք պակաս թուոց, կամ յերեքպատիկ միով պակաս թուոց, եւ կամ յերեքպատիկ թուոց արմատոյն: Արդ գտանիցի ճշմարտութիւն բանիցս ասացելոց, յորժամ մի ըստ միոջէ զերրորդ կարողութիւնս թուոյն ի քնին արկեալ խնդրիցեմք յորս* 1, 2, 3, 4, ... ն *նշանակք կայցեն թուոց:*

$$1^3<9^3=1<729$$

$$10^3<99^3=1000<970299$$

$$100^3<999^3=1000000<999^3,$$

Ըստ նմին օրինակի եւ այլ թուոյն նշանակք, զորս եւ հասարակաց իմն օրինակաւ մարթեմք ցուցանել: Վասնզի որովհետեւ փոքր թիւն՝ յորում ն նշանակք թուոց կայցեն, է $10^{ն-1}$. *արդ իբրեւ չափս*

$10^{\text{Ն}-1}$ յերրորդ կարողութիւն համբարձցի, $(10^{\text{Ն}-1})^3 = 10^{3\text{Ն}-3}$, ուստի եւ նշանակք թուոյն որ ի նմա գտանիցին,

$$1+3\text{Ն}-3=3\text{Ն}-2 \text{ իցեն։}$$

Իսկ մեծագոյն թիւն Ն տեղեաւ, համարեսցուք, եթէ Ա. իցէ, եւ Ա. փոքր իցէ քան զայնոսիկ, յորս $\text{Ն}+1$ նշանակք թուոյ իցեն, այս ինքն $\text{Ա}<\text{Ա}+1$։ Եւ զի $\text{Ա}+1=10^{\text{Ն}}$, ապա ուրեմն $\text{Ա}<10^{\text{Ն}}$։ Իբրեւ երկոքին չհաւասարութիւնքս յերրորդ կարողութիւն համբարձցին, $\text{Ա}^3<10^{3\text{Ն}}$։ Իսկ արդ որովհետեւ ի $10^{3\text{Ն}}$ են $1+3\text{Ն}$ տեղիք, ապա ուրեմն ի Ա^3, 3Ն տեղիք գտանիցին։

Բ. Յորժամ զթիւ ինչ, սկիզբն յաջմէ արարեալ, ի բաժինս բաժինս կտորիցէ ոք, որպէս զի յիւրաքանչիւր բաժնի անդ երեք երեք նշանակք թըւոց կայցեն, բաց ի յետին բաժնէ անտի որ ընդ ձախմէ, յորում մարթ է մի կամ երկուց կամ երից նշանակաց թուոց գտանել, եւ ի բովանդակ թուոյն հանցէ ոք արմատ երրորդ, պարտ է արմատոյն յայնչափ նշանակաց թուոց կամ տեղեաց կազմել, որչափ ինչ միանգամ ի կարողութեան անդ բաժինք գտանիցին, որպէս զի եթէ բաժինք կարողութեանն Ն իցեն, չմարթի արմատն կամ ի $\text{Ն}-1$ կամ ի $\text{Ն}+1$ տեղեաց կազմել, այլ Ն նշանակս թուոց եւեթ ունել։

Յայտ անտի է, զի եթէ ի թիւն Ն բաժինք իցեն, հարկ է զի տեղիք բովանդակ թուոյն կամ 3Ն, կամ $3\text{Ն}-1$, կամ $3\text{Ն}-2$ իցեն։ Արդ եթէ տեղիք կամ նշանակք թուոց արմատոյն $\text{Ն}-1$ իցեն, երրորդ կարողութիւն նորա $3\text{Ն}-3$ լինիցի, ուստի եւ $<3\text{Ն}-2$, ապա եթէ արմատն $\text{Ն}+1$, երրորդ կարողութիւն նորա $3\text{Ն}+3$ իցէ, ուստի եւ $>3\text{Ն}$, որ անպատեհ իմն է, եւ հակառակ մերոյ համարելոյ։

Գ. Երրորդ կարողութիւն ձախոյ կողման յետին տեղւոյ արմատոյն փակեալ բովանդակի ի յետին բաժնի անդ ձախոյ կողման. ըստ սմին օրինակի եւ երրորդ կարողութիւն երկուց ձախոյ կողման յետին տեղեաց արմատոյն գտանի ի յետին երկուս բաժինս ձախոյ կողման, եւ համարակաց ինն օրինակաւ երրորդ կարողութիւն բ տեղեաց արմատոյն ի բ բաժինս կարողութեանն:

Համարեսցուք եթէ Ն իցեն բաժինքն, յորս բաժանեալ իցէ թիւն. որոյ յետին բաժինն ձախոյ կողման ա իցէ, եւ արմատն որ ի նմանէն ելանիցէ Ա: Արդ առաջի ա բաժնին Ն—1 բաժինք տողեալ կարգեալ են, յորս 3Ն—3 նշանակք թուոց գտանին, յորմէ յայտ է եթէ կարողութիւն ա չափոյն է

$$ա \cdot 10^{3Ն-3}:$$

Իսկ առաջի Ա արմատոյն Ն—1 նշանակք թուոց են, ուստի եւ $Ա \cdot 10^{Ն-1}$, որոյ երրորդ կարողութիւնն

$$Ա^{3} \cdot 10^{3Ն-3}$$

զոր իբրեւ ընդ $ա \cdot 10^{3Ն-3}$ կարողութեան կշռիցես, համեմատութեան՝ զոր ընդ միմեանս ունիցին ի վերայ հասանիցես:

Ըստ սմին օրինակի, եթէ զերկուս յետին բաժինսն ձախոյ կողման ա համարիցեմք, եւ զբաժինսն, որ առաջի ա բաժնին Ն—2, եւ զնշանակսն՝ որ ի նոսա 3Ն—6, եւ զարմատ ա բաժնիցն Ա, յայտ է, եթէ կարողութիւն ա չափոյ իցէ

$$ա \cdot 10^{3Ն-6}$$

եւ երրորդ կարողութիւն $Ա \cdot 10^{Ն-2}$ արմատոյն

$$Ա^{3} \cdot 10^{3Ն-6}:$$

Որով յայտ է, եթէ եւ յորժամ բ բաժինս ի ձախմէ միանգամայն առնուցումք, եւ զայն ա չափով նշանակիցեմք, բաժինքն որ առաջի ա բաժնիցն՝ Ն—բ իցեն, եւ նշանակք թուոյն որ ի նոսա 3Ն—3բ, ուստի եւ

$$ա \cdot 10^{3Ն-3բ} \text{ իցէ}:$$

Իսկ առաջի Ա արմատոյն Ն—բ նշանակք թուոց են, ուստի եւ $Ա \cdot 10^{Ն-բ}$, որոյ երրորդ կարողութիւնն

$$Ա^{3} \cdot 10^{3Ն-3բ}$$

Դ. Եթէ զյետին բաժինն ձախոյ կողման ա չափով նշանակիցեմք, եւ զերկրորդն որ նմին կից իցէ բգդ չափով եւ զմեծագոյն տեղին արմատոյն Ա, եւ զերկրորդն Բ չափովք, յայնժամ ընդ ա համեմատիցի Ա^3, եւ ընդ բ՝ $3\text{Ա}^2\text{Բ}$, ընդ գ կշռիցի 3ԱԲ^2 եւ ընդ դ, Բ^2, որով ԱԲ արմատն լինիցի ի ա|բգդ| կարգին:

Համարեսցուք եթէ թիւ մի ի թուոյն ի Ն բաժինս ա|բգդ|...|...| իցէ բաժանեալ, որոյ արմատ իցէ ԱԲ....: Արդ առաջի ա բաժնին են Ն—1 բաժինք, յորս 3Ն—3 նշանակք թուոց գտանին, ուստի եւ ա$\cdot 10^{3\text{Ն}-3}$, իսկ առաջի բ չափոյն 3Ն—4 տեղիք են, ուստի եւ բ$\cdot 10^{3\text{Ն}-4}$, իսկ առաջի գ չափոյն 3Ն—5, նմին իրի իսկ գ$\cdot 10^{3\text{Ն}-5}$, ըստ նմին նմանութեան եւ դ$\cdot 10^{3\text{Ն}-6}$, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ: Եւ զի պարտ եւ պատշաճ է այնչափ ինչ տեղեաց լինել յարմատն, որչափ ինչ միանգամ բաժինք կային ի կարողութեան, վասն այսորիկ եւ $\text{Ա}\cdot 10^{\text{Ն}-1}+\text{Բ}\cdot 10^{\text{Ն}-2}$ որ իբրեւ յերրորդ կարողութիւն համբառնայցէ,

$$(\text{Ա}\cdot 10^{\text{Ն}-1}+\text{Բ}\cdot 10^{\text{Ն}-2})^3=\text{Ա}^3\cdot 10^{3\text{Ն}-3}+3\text{Ա}^2\text{Բ}\cdot 10^{3\text{Ն}-4}+3\text{ԱԲ}^2\cdot 10^{3\text{Ն}-5}+\text{Բ}^3\cdot 10^{3\text{Ն}-6},$$

լինիցի, յորում

$$\text{Ա}^3 10^{3\text{Ն}-3}=\text{ա}\cdot 10^{3\text{Ն}-3}$$

$$3\text{Ա}^2\text{Բ}\cdot 10^{3\text{Ն}-4}=\text{բ}\cdot 10^{3\text{Ն}-4}$$

$$3\text{ԱԲ}^2\cdot 10^{3\text{Ն}-5}=\text{գ}\cdot 10^{3\text{Ն}-5}$$

$$\text{Բ}^3\cdot 10^{3\text{Ն}-6}=\text{դ}\cdot 10^{3\text{Ն}-6}$$

Ե. Եւ արդ իբրեւ ի թուոց զերրորդ արմատ կամիցիս հանել, Ա. Ըստ Բ. կանոնի զթիւն ի բաժինս բաժինս զատեալ որոշեսցես: Բ. Յառաջինն ա բաժնէ անտի. հան զերրորդ արմատ, եւ եթէ չիցէ այն կատարեալ երրորդ կարողութիւն, հան ի մօտաւոր փոքր կատարեալ կարողութենէն. ապա յետ այնորիկ զերրորդ կարողութիւն Ա մասին արմատոյն հան յ ա բաժնէ անտի: Գ. Եթէ յաւելուցու ինչ մնացորդ, շրջեա զայն ի միութիւնս բ կարգին, եւ յաւելեալ յայն զ բ բաժանեա զայն ընդ եռեքպատիկ երկրորդ կարողութիւն Ա. մասին արմատոյն, որ է $3Ա^2$, եւ զքանորդն դրոշմեսջիր փոխանակ Բ մասին յարմատն. զեռեքպատիկն արդեանց երկրորդ կարողութեան առաջին մասին եւ երկրորդ մասին, այս ինքն է $3Ա^2Բ$ հան ի բ կարգէն, յորմէ եթէ յաւելուցու ինչ մնացորդ, շրջեա զայն ի միութիւնս դ կարգին, եւ յաւելեալ յայն զդ հան անտի զեռեքպատիկն արդեանց առաջին մասին արմատոյն եւ երկրորդ կարողութեան երկրորդ մասին, եւ զմնացորդն փոփոխեա ի միութիւնս դ կարգին, եւ յաւելեալ յայն զդ հան անտի զերրորդ կարողութիւն երկրորդ մասին: Եթէ միութիւնքն $3ԱԲ^2$, եւ $Բ^3$ մասանցն մեծագոյն դիպիցին քան զմիութիւնս դ, եւ դ կարգաց, պարտ է քեզ այնչափ ինչ միութիւնս ի Բ մասնէն նուազեցուցանել, որպէսզի փոքրագոյն կամ հաւասար լինիցին դ եւ դ կարգաց: Գ. Եթէ իցեն եւ այլ եւս բաժինք, պարտ է զգտեալ մասունսն արմատոյն Ա' համարել, եւ զբաժինսն կարողութեանն բ'գ'դ', եւ զբաժինսն որովք ցայն վայր զհաշիւն վճարիցեր ա', եւ ըստ վերագոյն ճառելոցս զԲ' գտանել: Եւ զայս օրինակ յառաջ խաղալ մինչեւ ցկատարել ն բաժնիցն: Ե. Եթէ յաւարտել ամենայն բաժնիցն չյաւելուցու ինչ մնացորդ, նշանակ է կատարեալ լինելոյ կարողութեան. իսկ եթէ իցէ ինչ մնացորդ, յայտ է եթէ գտեալ արմատն, արմատ իցէ մերձաւոր փոքրագոյն երրորդ կարողութեանն: Զոր օրինակ,

$\sqrt[3]{64|145|069|472|343|608} = 400302$

64

1 : 48 = 3Ա²

0

14

0

145

0

1450 : 4800 = 3(Ա')²

14506

145069

1450694 : 480000 = 3(Ա'')²

1440000

106947

10800

961472

27

9614453 : 48072027

9614453436 : 4807202700

9614405400

480360

480360

8

8

0

Արդ կարգ իրացն այսպիսի ինչ է։ Յառաջին 64 բաժնէ անտի հանեալ զերրորդ արմատ 4, յետ այնորիկ զ64 որ կշռէ Ա³, հանաք յառաջին բաժնէն։ Զ1, որ համեմատի ը տեղւոյն բաժանեցաք ընդ 48 վասն զԲ գտանելոյ, և զի 48 ի 1 գտանի 0 իցս, վասն այսորիկ երկրորդ մասն արմատոյն եղև 0։ Հանեալ ի 1ոյ զ3Ա²Բ որ է=0, զմնացորդն 1 շրջեցաք ի միութիւնս գ կարգին, և եղև 14, յորմէ հանեալ զ $3ԱԲ^2$, որ է=0, զմնացորդն 14 շրջեցաք ի միութիւնս դ կարգին, այսինքն է 145, յորմէ հանեալ զ $Բ^3=0$, շրջեցաք զ 145 մնացորդն ի միութիւնս բ' կարգին, որ է=1450, զոր բաժանեալ ընդ $3(Ա')^2=4800$ գտաք զքանորդն=0, որ է Բ' մասն արմատոյն, եւ զայլսն եւս որ զհետ գայցեն, ըստ նմին օրինակի վճարեցաք:

287. Համառօտիւք իմն իւքն վճարին, յորժամ փոխանակ ուրոյն ուրոյն զիւրաքանչիւր բ, գ, դ թիւս բաժնիցն առ մնացորդաւն ածելոյ, միանգամայն զբովանդակ բաժինն բգդ ածիցեմք ի վայր եւ յետ զ բ ընդ $3Ա^2$ բաժանելոյ, զ $3Ա^2Բ$, զ $ԱԲ^2$ եւ զ $Բ^3$ ընդ բգդ կարգօքն դրոշմիցեմք ի պատշաճական տեղիս իւրեանց, եւ զնոցա բովանդակութիւնն (Հ. 20.) ի բգդ բաժնէն հանիցեմք: Զոր օրինակ,

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{75|686|967}=423 \\
Ա^3=64 \\
\hline
\text{բգդ}=11686:48=3Ա^2 \\
3Ա^2Բ=96 \\
3ԱԲ^2=48 \\
Բ^3=8 \\
\hline
\text{բ'գ'դ'}=1598967:5292=3(Ա')^2 \\
3(Ա')^2Բ'=15876 \\
3Ա'(Բ')^2=1134 \\
(Բ')^3=27 \\
\hline
0
\end{array}$$

288. Եթէ զիարդ պարտ իցէ զչորրորդ, եւ զհինգերորդ, եւ զ ...ն երորդ արմատ ազգիազգի չափուցն գտանել, ցուցանիցէ հասարակաց համօրէն օրինակս,

$$(Ա+Բ)^ն=Ա^ն+^նԱ^{ն-1}Բ+\cdots\cdots$$

զոր (Հ. 241.) յանդիման կացուցաք, յորմէ դիւրաւ կարիցես առնուլ ի միտ, եթէ յորպիսի ինչ անդամոց կազմեալ ինչ իցեն 4, 5, 6 ....ն կարողութիւնքն:

Զայն եւ կարեմք ասել, զ 4, 5, 6, 7, 8 ...ն արմատոց թուոց, զոր միանգամ վերագոյն զ 2, եւ զ 3 արմատոց ճառեցաք։ Քանզի մարթեմք ցուցանել, եթէ թուոյ, յորում Ն նշանակք թուոց կայցեն, չորրորդ կարողութիւնն ի 4ն կամ ի 4ն—3, 4ն—2, 4ն—1 նշանակաց թուոց կազմիցի, ուստի եւ չորրորդ արմատ կարողութեանն, որ ի Ն բաժնից կազմեալ իցէ, որոց իւրաքանչիւր բաժնիցն չորք չորք նշանակք թուոց իցեն, բաց ի յետին անդամոյ անտի ձախոյ կողման, յորում մարթի 4, 3, 2, 1 նշանակաց թուոց գտանել, պարտ եւ պատշաճ է ի Ն նշանակաց կազմել։ Այն օրինակ վասն հինգերորդ արմատոյն, եւ զայլոցն եւս մի ըստ միոջէ։ Եւ որպէս յառաջագոյն զերկրորդ եւ զերրորդ արմատսն գտաք, զնոյն եւ ի 4, 5, 6, 7, 8 ....ն արմատսն մարթ է ի կիր արկանել։ Եւ զի գիտեմք եթէ չորրորդ կարողութիւն $\text{Ա}+\text{Բ}$ արմատոյ է

$$\text{Ա}^4+4\text{Ա}^3\text{Բ}+6\text{Ա}^2\text{Բ}^2+4\text{Ա}\text{Բ}^3+\text{Բ}^4$$

եւ հինգերորդ զօրութիւնն

$$\text{Ա}^5+5\text{Ա}^4\text{Բ}+10\text{Ա}^3\text{Բ}^2+10\text{Ա}^2\text{Բ}^3+5\text{Ա}\text{Բ}^4+\text{Բ}^5$$

աստատին կարիցեմք ի վերայ հասանել, եթէ զկարգ եւ որով օրինակաւ պարտ իցէ զչորրորդ եւ զհինգերորդ արմատսն գտանել։

Այլ դիւրագոյն եւս է յորժամ ցուցիչ արմատոյ նշանակին յօդուածոյ թիւ իցէ, յառաջագոյն զայն յանեկին լուծանել, եւ ապա ըստ կարգի առնելեացն մի ըստ միոջէ զարմատսն հանել որպէս վասն միամնան չափուց վերագոյն (∸. 249.) ասացաք։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt[4]{20736}=\sqrt{(\sqrt{20736})}=\sqrt{144}=12$$

$$\sqrt[6]{148035889}=\sqrt{(\sqrt[3]{148035889})}=\sqrt{529}=23 \text{ կամ}$$

$$\sqrt[6]{148035889}=\sqrt[3]{(\sqrt{148035889})}=\sqrt[3]{12167}=23$$

ՑԱՂԱԳՍ ԱՌԱՆՑ ՀԱՍՏԱՏՈՒԹԵԱՆ ԱՐՄԱՏՈՑ

289. Օրինակացն, զորս ցայս վայր առաջի արարաք, հաստատուն արմատք էին. արդ սկիզբն առնացուք, եւ զառանց հաստատութեան արմատն քննել, եւ իմանալ, եթէ զի՞նչ ինչ արդեւք նշանակիցեն։

Դնիցուք գրեսցուք եթէ Ա. եւ Բ. ողջոյն թիւք իցեն, որոց արմատքն հաստատուն իցեն, եւ մի՛ միութեամբ եւեթ այլակերպք ի միմեանց, ուստի եւ $\sqrt[3]{Ա.}=ա$, եւ $\sqrt[3]{Բ.}=ա+1$։ Դարձեալ համարեսցուք եթէ Գ. ողջոյն ինչ թիւ իցէ, որ ի միջին վայրի երկուց Ա. եւ Բ. թուոց գտանիցի, վասն այսորիկ $Գ.>Ա.$ եւ $Գ.<Բ.$, զորին զհետ գայ, եթէ $\sqrt[3]{Գ.}>\sqrt[3]{Ա.}$, կամ $\sqrt[3]{Գ.}>ա$, եւ $\sqrt[3]{Գ.}<\sqrt[3]{Բ.}$ կամ $\sqrt[3]{Գ.}<ա+1$։ Արդ համարեսցուք եթէ $\sqrt[3]{Գ.}-ա=փ$. ուստի եւ $\sqrt[3]{Գ.}=ա+փ$, յորում փ ճշմարիտ կոտոր է. քանզի որովհետեւ Գ. ի միջին վայրի անդ $ա^3$ եւ $(ա+1)^3$ գտանի, ուրեմն երրորդ արմատն Գ. չափոյն ա իցէ եւ կից ընդ նմա փ ճշմարիտ կոտոր։

Համարեսցուք եթէ $փ=\frac{բ}{դ}$, յորում բ եւ դ նախաւոր թիւք իցեն առ միմեանց համեմատութեամբ այսինքն $\frac{բ}{դ}$ կարի իմն համառօտիւք իցէ գրոշմեալ։ Արդ կարեմք

$$ա+\frac{բ}{դ}=\frac{ադ+բ}{դ}=\frac{ե}{դ}$$

դնել, այսինքն $ե=ադ+բ$ համարել, եւ զի բ եւ դ այլ եւս չբաժանին, ուստի եւ ոչ իսկ $ադ+բ$, ապա ուրեմն եւ ոչ ե ընդ դ հաւասարեաւ բաժանի։ Իսկ զի $\sqrt[3]{Գ.}=ա+\frac{բ}{դ}=\frac{ե}{դ}$, զորին զհետ գայ եթէ պարտ եր $\left(\frac{ք}{ց}\right)^{մ} = գ.$ լինել, այլ սակայն անհնարին ինչ է, քանզի ք ընդ ց չբաժանի հաւասարեաւ, ուստի եւ ոչ $ք^{մ}$ ընդ $ց^{մ}$ բաժանել կարիցէ, որով եւ չկարէ $\frac{ք^{մ}}{ց^{մ}}$ ողջոյն գ. թուոյ հաւասարել: Ապա ուրեմն ոչ $գ. = \left(\frac{ք}{ց}\right)^{մ}$, եւ ոչ $\sqrt[մ]{գ.} = ա + \frac{ր}{ց}$:

290. Արդ՝ իբրեւ գ. չափս ի միջոցի անդ երկուց $ա^{մ}$ եւ $(ա+1)^{մ}$ չափուց անկանիցի, չէ մարթ զարմատն $\sqrt[մ]{գ.}$, ոչ ողջոյն ինչ թուով եւ ոչ կոտորեալ չափովք նշանակել: Այսպիսի արմատքս անուանեալ կոչին Արմատք առանց հասարակութեան, եւ այսու իսկ ի Հասարականացն խտրին, զի հասարակուն արմատոց մարթ է եւ ողջոյն ինչ թիւ լինել եւ չափ կոտորեալ: Իսկ զի մարթ է զհասարակսն ի թուոցն ի ձեռն միութեանց եւ կամ չափուց կոտորելոց յանդիման կացուցանել, ուրեմն զառանց հասարակութեան արմատս ոչ միութեամբք եւ ոչ մասամբք իւիք միութեան կամ կոտորեալ չափովք հնար ինչ իցէ ճշգիւ առաջի առնել: Վասն այսորիկ թիւք՝ որ ի սմին ազգէ իցեն, յորջորջին Անչափական թիւք:

291. Թէպէտ եւ զօրութիւն առանց հասարակութեան արմատոցն ընաւ հասարակուն չափովք ոչ չափիցի, բայց սակայն այնպիսի ինչ չափս հասարակունս կարիցեմք գտանել, որ առաւել ի բուն եւ ի ճշմարիտ զօրութիւն նոցա մերձենայցեն:

Համարեսցուք եթէ $\sqrt[մ]{գ.}$ առանց հասարակութեան իցէ. քանզի $\sqrt[մ]{գ.} = \frac{10^{ն}\sqrt[մ]{գ.}}{10^{ն}} = \frac{\sqrt[մ]{10^{մն}գ.}}{10^{ն}}$ (Հ. 260.), յայտ է, եթէ եւ համարիչն $\sqrt[մ]{10^{մն}.գ.}$ առանց հասարակութեան իցէ (Հ. 253.): Արդ (ըստ Հ. 289.) դիցուք գրեսցուք, եթէ $\sqrt[մ]{10^{մն}} = ա + ր$ իցէ, յորում ա ողջոյն թիւ է, եւ փ ճշմարիտ կոտոր, ուստի եւ $\sqrt[մ]{Գ}=\frac{ա}{10^{ն}}+\frac{փ}{10_{ն}}=\frac{ա+փ}{10^{ն}}$, եւ զի $փ<1$, ապա ուրեմն յորժամ ընդ $10^{ն}$ բաժանիցի՝ փոքր իցէ քան զ1 ընդ $10^{ն}$ բաժանեալ, ուստի եւ $\frac{փ}{10^{ն}}<\frac{1}{10^{ն}}$:

Արդ եթէ զ $\sqrt[մ]{Գ}=\frac{ա}{10^{ն}}$ դնիցեմք, այս ինքն ամենեւին իսկ ի բաց թողուցումք զ $\frac{փ}{10^{ն}}$ կոտորն եւ զ $\frac{ա}{10^{ն}}$ եւեթ առնուցումք եւ փոխանակ $\sqrt[մ]{Գ}$ համարիցիմք, այսու իսկ վրիպումն որ ի սմա դիպիցի փոքրագոյն իցէ քան զ $\frac{1}{10^{ն}}$. եւ զի ն չափն զամենայն թիւ կարէ նշանակել, ուրեմն այնչափ ինչ նուազիցի վրիպումն, որչափ ինչ փոքր մասն ի բաց թողեալ իցէ, կամ որչափ ինչ $10^{ն}$ մեծ իցէ, որով եւ մարթիցի ոք որչափ ինչ կամիցի, $\sqrt[մ]{Գ}$ զօրութեան մերձենալ:

Արդ կարիցես զզօրութիւն $\sqrt[մ]{Գ}$ չափոյն ն տասնորդական տեղեօք նշանակել, յորժամ զԳ, $10^{մն}$ չափով բազմացուցանիցես կամ յաւելուցուս ի Գ՝ մն դատարկս, եւ յարդեանցն զարմատն խնդրիցես եւ յարմատոյն ն տասնորդական տեղիս բաժանիցես: Կամ համառօտ իսկ ասել. Մարթես ի Գ. չափոյ անտի զարմատն հանել, յորժամ զառաջին մասն արմատոյն զոր ա չափով նշանակեցաք, գտանիցես, եւ ապա ի մնացորդն այնչափ ինչ դատարկս յաւելուցուս որչափ ինչ մ արմատոյ ցուցիչն միութիւնս ցուցանիցէ, եւ անտի հանցես արմատս, եւ քանից անգամ մ դատարկս յաւելուցուս, այնչափ ինչ տասնորդական տեղիք մի ըստ միոջէ յարմատն գտանիշին։ Զոր օրինակ

$\sqrt{2}=1,414\ldots$

1

100 : 24

96

400 : 281

281

11900 : 2824

11296

604, այլովքն հանդերձ։

$\sqrt{37|27}=61,049\ldots$

36

127 : 121

121

600 : 122

60000 : 12204

48816

1118400 : 122089

1098801

19599, այլովքն հանդերձ։

$\sqrt[3]{8|327}=20,268\ldots$

8

327000 : 1200

242408

84592000 : 1224,12

73665576

10926424000 : 1231,4028

9855112832

1071311168, եւ այլն։

Ըստ նմին նմանութեան, եւ աստէն ի սմին վայրի երեք տասներորդական տեղիք առնուն, յորժամ $\sqrt[3]{8327}=20,269$ (Տ. 190.)։

292. Յորժամ ըստ 279 համարոյ ա=1 դնիցեմք եւ բ=1, յայնժամ

$$\sqrt{(1+1)}=\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}\cdots$$

եւ ըստ 285 համարոյ

$$\sqrt[3]{(1+1)}=\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}\cdots$$ լինիցին:

Ապա ուրեմն մարթեմք զայս օրինակ եւ զմերձաւոր զօրութիւնս առանց հաստատութեան արմատոցն գտանել, յորում կոտորքն՝ որք կարգ ըստ կարգէ ելանեն, նուազին, եւ որչափ ինչ ա մեծագոյն իցէ համեմատութեամբ բ չափոյն, այնչափ ինչ արագ արագ նուազին անդամքն: Զոր օրինակ, ա=2 իցէ, եւ բ=1, յայտ է եթէ կարգ չափոյն որ փոխանակ $\sqrt{(ա^2-բ)}$, (հ. 279.) դնիցի, իցէ

$$\sqrt{(4-1)}=\sqrt{3}=2-\frac{1}{4}-\frac{1}{64}-\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}\cdots$$

իսկ այնր որ փոխանակ $\sqrt{(ա^2+1)}$, (հ. 279.) դնիցի, իցէ,

$$\sqrt{(4+1)}=\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}\cdots:$$

Եւ զի $\frac{1}{4}=0,25$

$$\frac{1}{64}=0,01562$$

$$\frac{1}{512}=0,00195$$

$$\frac{5}{16384}=0,00031$$

ուրեմն $\sqrt{3}=2-0,2679=1,7321$, եւ

$$\sqrt{5}=2,2519-0,0159=2,236:$$

Ըստ նմին օրինակի, եթէ ա=2 իցէ, եւ բ=1, ըստ 285 համարոյ,

$$\sqrt[3]{(8-1)}=\sqrt[3]{7}=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}-\frac{5}{20736}-\frac{10}{497664}$$

$$\sqrt[3]{(8+1)}=\sqrt[3]{9}=2+\frac{1}{12}-\frac{1}{288}+\frac{5}{20736}-\frac{10}{497664}$$

լինիցին ։

Իսկ զի $\frac{1}{12}=0,083333$

$$\frac{1}{288}=0,003472$$

$$\frac{5}{20736}=0,000241$$

$$\frac{10}{497664}=0,000021$$

ուրեմն $\sqrt[3]{7}=2-0,08707=1,91293$, եւ

$\sqrt[3]{9}=2,08357-0,0034$[illegible]$=2,08008$

Այսպիսի իմն կարգս կարիցես եւ յամենայն առանց հաստատութեան արմատոց գտանել, որոց զօրութիւնն ի ձեռն $(\text{ք}^{\text{ր}}+\text{փ})^{\frac{1}{\text{ր}}}$ օրինակիս նշանակի, ըստ 243 համարոյ։

293. Այլ է միւս եւս օրինակ համարելոյ, որով դիւրագոյն եւ համառօտ գտանին մերձաւոր նշանակութիւնք առանց հաստատութեան արմատոց։

Համարեսցուք եթէ $\sqrt[\text{ր}]{\text{Գ}}=\text{ա}+\text{փ}$ իցէ, յորում ա է մասն արմատոյն, եւ փ մնացորդն, ուստի եւ $\text{փ}<1$։ Արդ ըստ 243 համարոյ

$$\text{Գ}=\text{ա}^{\text{ր}}+\text{ր}\,\text{ա}^{\text{ր}-1}\text{փ}+\ldots.$$

յորում զփ որչափ ինչ ի մեծամեծ կարողութիւնս համբառնայցես, այնչափ նուազէ զօրութիւնն, քանզի որպէս ասացաք $\text{փ}<1$։ Վասն այսորիկ ի կարգէ աստի, որ մի ըստ միոջէ ելանիցէ, կարիցես ի բաց թողուլ զանդամն, յորս մեծագոյն կարողութիւնքն գտանիցին, բաց յերկրորդ անդամոյն, զոր մարթես փոխանակ մերձաւոր զօրութեան փ չափոյն դնել: Որպիսի ինչ,

$$Գ.=ա^ն+նա^{ն-1}փ:$$

Իբրեւ ի Գ. անդամոյ հաւասարութեանն հանցես զմի մասն բովանդակութեանն $ա^ն$, մնայցէ

$$Գ.-ա^ն=նա^{ն-1}փ \text{ մնացորդ}:$$

Եթէ զերկասին անդամսն եւս հաւասարութեանն բաժանիցես ընդ մին յառնելեաց $նա^{ն-1}$ չափոյն, ելանիցէ միւս փ առնելին,

$$\frac{Գ.-ա^ն}{նա^{ն-1}}=փ:$$

Արդ եթէ ի չափս $ա+փ$, զոր վերագոյն նշանակեցաք, զհաւասարութիւնն փ չափոյն դիցես, լինիցի

$$\sqrt[ն]{Գ.}=ա+\frac{Գ.-ա^ն}{նա^{ն-1}}=\frac{նա^ն+Գ.-ա^ն}{նա^{ն-1}}=\frac{Գ.+(ն-1)ա^ն}{նա^{ն-1}}:$$

Եւ զի այս չէ ճշդիւ բուն իսկ զօրութիւնն $\sqrt[ն]{Գ.}$ չափոյն, վասն այսորիկ, եթէ կամիցիս առաւել եւս յայն մերձենալ, համարեա

$$\frac{Գ.+(ն-1)ա^ն}{նա^{ն-1}}=բ, \text{ եւ}$$

դրոշմեա առաջի նորա միւս եւս փ, որով լինիցի

$$Գ.=(բ+փ)^ն,$$

եւ ըստ վերագոյն ճառելոցս վճարեա զիրսն: Զոր օրինակ, $\sqrt{10}=3$, եւ մնացորդ 1, արդ $10=(3)^2+1$, ուստի եւ $10=(3+փ)^2$: Եւ զի $10=9+6փ+փ^2$, ուրեմն $10=9+6փ$, ուստի եւ $10-9=6փ$, ուրեմն

$$\frac{10-9}{6}=\frac{6փ}{6}=\frac{1}{6}=փ,$$

յորմէ յառաջ գայ, եթէ

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}:$$

Եթէ առաւել եւս մերձենալ կամիցիս ի զօրութիւն $\sqrt{10}$ չափոյն, լինիցի

$$10=\left(\frac{19}{6}+\text{փ}\right)^2=\frac{361}{36}+\frac{38}{6}\text{փ}+\text{փ}^2,$$

ուստի եւ

$$10=\frac{361}{36}+\frac{19}{3}\text{փ},\text{ եւ } 10-\frac{361}{36}=\frac{19}{3}\text{փ},\text{ որ է}$$

$$=\frac{360-361}{36}=\frac{19}{3}\text{փ},\text{ եւ } \text{փ}=\frac{-1}{36}:\frac{19}{3},\text{ որ}$$

$$\text{փ}=\frac{-1}{12\cdot 19},\text{ ուստի եւ } \text{փ}=-\frac{1}{228}$$

$$\text{ուրեմն } \sqrt{10}=\frac{19}{6}-\frac{1}{228}=\frac{721}{228}$$

Ըստ սմին օրինակի, գտանի եւ

$$\sqrt[3]{7}=2+\text{փ}:$$

Թէպէտեւ մօտաւոր փոքր երրորդ արմատ 7 թուոյ է 1, բայց սակայն զի 6 միութիւնք յաւելուածն, վասն այսորիկ առ դիւրագոյն եւս մերձենալ ի զօրութիւն անդր $\sqrt[3]{7}$ թուոյն, լաւ համարեցաք զ1 մասն յաւելուլ յ7, քան զ6 մասունսն ի բաց թողուլ, եւ զերան երկարել: Եւ թէպէտ եւ զչափն փ + նշանաւ դրոշմեցաք, այլ սակայն եւ այն ի հաշուելդ ինքնին փոփոխիցի ի համառօտութենէ չափուցն: Արդ

$$7=(2+\text{փ})^3=8+12\text{փ}:$$

Եւ քանզի $7-8=12$փ, ուստի եւ $\frac{7-8}{12}=$փ, յորմէ յայտ է եթէ փ $=-\frac{1}{12}$, ուրեմն $\sqrt[3]{7}=2-\frac{1}{12}$ $=\frac{23}{12}$:

Եւ եթէ առաւել եւս կամիցիս ի զօրութիւն $\sqrt[3]{7}$ չափոյն մերձենալ, լինիցի

$$7=\left(\frac{23}{12}+\text{փ}\right)^3=\left(\frac{23}{12}\right)^3+3\left(\frac{23}{12}\right)^2\text{փ},$$

Եւ քանզի

$$7-\left(\frac{23}{12}\right)^3=3\left(\frac{23}{12}\right)^2 փ\text{, ուստի եւ}$$

$$փ=\left(7-\left(\frac{23}{12}\right)^3\right):3\left(\frac{23}{12}\right)^2=ա\text{, ուրեմն}$$

$$\sqrt{7}=\frac{23}{12}+ա$$

Հ Ա Տ Ա Ծ Է

ՅԱՂԱԳՍ ԱՐՄԱՏՈՅ ԿՈՏՈՐՈՑ

294. Արմատ ի կոտորոյ ելանէ, յորժամ հանցէ ոք արմատ ի համարչէ կոտորոյն, եւ զայն ընդ արմատ անուանչին բաժանիցէ (Հ. 257)։ Աստստին յայտ է եթէ յայնժամ եւեթ հաստատուն իցէ արմատ կոտորոյն, յորժամ հաւաստեաւ եւ ի համարչէն եւ յանուանչէն ելանիցէ արմատն։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2},\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{5}{7}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3},\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$$

եւ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$\sqrt[մ]{\frac{ա^{մն}}{բ^{մր}}}=\frac{ա^{ն}}{բ^{ր}}$$

295. Այլ եթէ դէպ լինիցի զի կամ արմատ համարչին եւ կամ անուանչին եւ կամ երկոցունցն միանգամայն արմատքն եւ համարչին եւ անուանչին առանց հաստատութեան իցեն, յայնժամ արմատն բովանդակ կոտորոյն առանց հաստատութեան լինիցի, եւ մերձաւորութեամբ եւեթ բուն զօրութեանն գրուշմիցին։ Արդ իբրեւ առաջինն դիպիցի, զի արմատ համարչին իցէ առանց հաստատութեան, յայնժամ

պարտ է ըստ հասարակաց օրինակիս $\sqrt[ր]{\frac{ա}{բ^ր}}=\frac{\sqrt[ր]{ա}}{բ}$ գիւրան վճարել: Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1,732\cdots}{2}=0,866\cdots$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{27}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{3}=\frac{1,912\cdots}{3}=0,637\cdots$$

Իսկ եթէ անուանիչն իցէ առանց հաստատութեան, պարտ եւ պատշաճ է ըստ օրինակիս $\sqrt[ր]{\frac{ա^ր}{բ}}$

$\frac{ա}{\sqrt[ր]{բ}}$ յարմարն մերձենալ: Զոր օրինակ,

$$\sqrt{\frac{9}{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}=\frac{3}{3,316\cdots}=0,904$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\frac{2}{\sqrt[3]{9}}=\frac{2}{2,080\cdots}=0,961\cdots$$

Այլ առաւել եւս դիւրագոյն եւ համառօտ զմերձաւոր զօրութիւն արմատոյն գտանիցես, եթէ յառաջագոյն(ըստ Հ.259.) զանուանիչ կատարոյն ի հաստատուն շրջիցես, որպէս երեւիցի ի մօտաւոր օրինակաց:

$$\sqrt{\frac{9}{11}}=\sqrt{\frac{99}{11^2}}=\frac{9,949\cdots}{11}=0,904\cdots$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\sqrt[3]{\frac{24}{27}}=\frac{2,884\cdots}{3}=0,961\cdots$$

Ապէթէ եւ համարիչն եւ անուանիչն առանց հաստատութեան իցեն ըստ նմանութեան հասարակաց օրինակիս,

$$\sqrt[ր]{\frac{ա}{բ}}=\frac{\sqrt[ր]{ա}}{\sqrt[ր]{բ}}$$

յայնժամ պարտ է զմերձաւոր զօրութիւնս որչափ ինչ պէտք իցեն եւ համարչին եւ անուանչին գտանել, եւ իբրեւ թիւ համարոյ տասներորդական տեղեայն միմեանց հաւասարիցին, ապա այնուհետեւ զզօրութիւնն ըստ օրինակի տասներորդական կոտորոց գտանել: Զոր օրինակ, քանզի

$$\sqrt{2}=1,414\ldots \text{ եւ } \sqrt{3},=1,732\ldots$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1,414\ldots}{1,732\ldots}=0,816\ldots$$

Ըստ նմին օրինակի

$$\sqrt[3]{\frac{6}{13}}=\frac{1,817\ldots}{2,351\ldots}=0,772\ldots.$$

Այլ առաւել դիւրագոյն է եւ համառօտ, զանուանիչն ի հաստատուն շրջել եւ ապա յետ այնորիկ զզօրութիւնն խնդրել. որպէս,

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{2,449\ldots}{3}=0,816\ldots$$

$$\sqrt[3]{\frac{6}{13}}=\sqrt[3]{\frac{1014}{13^3}}=\frac{10,046\ldots}{13}=0,772\ldots.:$$

296. Յայտ է զամենայն թիւ՝ յորում ն տասներորդական տեղիք կայցեն՝ $\frac{\text{Ա}}{10^{\text{ն}}}$ կոտորով յանդիման կացուցանել, եւ $\sqrt[\text{մ}]{\frac{\text{Ա}}{10^{\text{ն}}}}$ հաստատուն է, եթէ եւ ի Ա համարչէն եւ ի $10^{\text{ն}}$ անուանչէն հաւաստեաւ մ արմատ ելանիցէ: Որպիսի ինչ եւ իցէ Ա, գտնեա ի $10^{\text{ն}}$ անուանչէն ելանէ արմատն, եթէ ն ընդ մ հաւասարեաւ բաժանիցի, կամ եթէ թիւ համարոյ տասներորդական տեղեացն բազմապատիկ իմն իցէ մ արմատոյ ցուցչին: Աստանօր յայտ է եթէ ի հանել զերկրորդ արմատ ի կոտորոց աստի յայսմանէ, հարկ է զի տեղիք տասներորդական կոտորոյն զոյգ իցեն, իսկ ի հանել զերրորդ արմատ, երեք, վեց, ինն, ... տասներոր-

դական տեղեաց պէտք են: Իբրեւ այնպիսի ինչ դէպք դիպիցին, զի պակասիցեն պատշաճական տասներորդական տեղիքն, մարթես դատարկս ընդ աջմէ կողմանէ տեղեացն յաւելուլ, մինչեւ լցցի պակասութիւնն, որով կոտորն $\frac{Ա.}{10^2}$ ընդ 10 բազմացուցանիցի, եւ ցուցիչ անուանչին ընդ ցուցիչ արմատոյ նշանին բաժանիցի: Զոր օրինակ հանել երկրորդ արմատ' ի 0,5 տասներորդական կոտորոյ, յորժամ ընդ աջմէ տասներորդական տեղեացն մի դատարկ յաւելուցուս, ուստի եւ

$$\sqrt{0,50}=\sqrt{\frac{50}{100}}=\frac{\sqrt{50}}{10}$$

Ըստ նմին օրինակի,

$$\sqrt[3]{0,7}=\sqrt[3]{0,700}=\sqrt[3]{\frac{700}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{700}}{10},$$

$$\sqrt{2,037}=\sqrt{2,0370}=\sqrt{\frac{20370}{10000}}=\frac{\sqrt{20370}}{100},$$

$$\sqrt[3]{1,0605}=\sqrt[3]{1,060500}=\sqrt{\frac{1060500}{1000000}}=$$

$$\sqrt{\frac{1060500}{100}}$$

$$\sqrt[5]{0,032}=\sqrt[5]{0,03200}=\sqrt[5]{\frac{3200}{10^5}}=\frac{\sqrt[5]{3200}}{10}$$

297. Յասացելոյս աստի յառաջ գան օրէնքն, որով կարիցեմք հանել արմատս ի տասներորդական կոտորոց: Զտասներորդական տեղիսն որ յաջմէ ստորակէտին իցեն, սկիզբն ի ձախմէ արարեալ յաջակողմն կոյս բաժանեա ի բաժինս, որպէս զի իւրաքանչիւր բաժնի այնչափ ինչ նշանակք թուոց գտանիցին, որչափ ինչ միանգամ արմատոյ ցուցիչն միութիւնս ցուցանիցէ: Եթէ ի յետին յաջակողմեան բաժնին սակաւ նշանակք թուոց իցեն քան զմիութիւնս *արմատոյ ցուցչին, լոյ զպակասութիւնն դատարկ թուովք: Ապա այնուհետեւ հան ի տասներորդական կոտորոյ անտի արմատս, որպէս ի սովորական թուոց, եւ յարմատն այնչափ ինչ տեղիս տասներորդականս յաջմէ ընդ ձախակողմն կոյս հատանիցես, որչափ ինչ բաժինք ի տասներորդական տեղիս կարողութեանն, որ ի ներքոյ արմատոյ նշանին իցէ, կայցեն: Եթէ չիցէ ինչ հաստատուն արմատն, մարթ է մերձենալ ի զօրութիւն անդր կոտորոյն, եթէ առաջի մնացորդին յաւելուցուս բաժինս դատարկ թուովք, եւ մի ըստ միոջէ հանցես արմատս, որչափ կամք իցեն: Զոր օրինակ,*

$\sqrt{0,04}=0,2 \qquad \sqrt{0,0009}=0,03$

$\sqrt{0,25}=0,5 \qquad \sqrt{0,000529}=0,023$

$\sqrt{0,055225}=0,235 \qquad \sqrt[3]{0,000001}=0,01$

$\sqrt[3]{0,\ 008}=0,2 \qquad \sqrt[3]{0,000027}=0,03$

$\sqrt[3]{0,064}=0,4 \qquad \sqrt[3]{0,103823}=0,47$

$$\sqrt{0,1}=\sqrt{0,10}=0,3162$$

9
100 : 61
61
3900 : 626
3756
14400 : 6322
12644
1756, ...

$$\sqrt{0,144}=\sqrt{0,14|40}=0,3794\ \ldots$$

$$\sqrt[3]{0,1}=\sqrt[3]{0,100}=0,464\ \ldots$$

64
36000
33336
2664000 ....

$$\sqrt[3]{0,27}=\sqrt[3]{0,270}=0,646\ldots$$

298. Եթէ առընթեր տասներորդական տեղեացն և ողջոյն թիւք կայցեն, զողջոյն թիւսն բաժանեա ի բաժինս բաժինս յաջմէ ընդ ձախակողմն կոյս, իսկ զտասներորդական տեղիսն ի ձախմէ յաջակողմն կոյս, և յետ հանելոյ զարմատս ողջոյն թուոյն, հան և ի կոտորոյն, ըստ օրինակի սովորական թուոց և յարմատն այնչափ ինչ նշանակս թուոց յաջմէ ընդ ձախակողմն կոյս հատանիջիր, որչափ ինչ բաժինք ի տասներորդական տեղիս կարողութեանն կայցեն։ Զոր օրինակ,

$$\sqrt{563,5876}=\sqrt{5|63,58|76}=23,74$$

$$\begin{array}{l}
4 \\
\hline
163:43 \\
129 \\
\hline
\quad 3458:467 \\
\quad 3269 \\
\hline
\qquad 18976:4744 \\
\qquad 18976 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\sqrt{7835,6}=\sqrt{78|35,60}=88,518\ldots$$

$$\begin{array}{l}
64 \\
\hline
1435:168 \\
1344 \\
\hline
\quad 9160:1765 \\
\quad 8825 \\
\hline
\qquad 33500:17701 \\
\qquad 17701 \\
\hline
\qquad 1579900:177028 \\
\qquad 1416224 \\
\hline
\qquad\quad 163676,\ldots
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{8,5}=\sqrt[3]{8{,}500}=2{,}0408$$

$$\begin{array}{l}
\underline{8} \\
\;500000:1200 \\
\underline{\;489664} \\
\;\;10336000000 \\
\;\;\underline{\;9991757312} \\
\;\;\;\;344242688,\ldots.
\end{array}$$

299. *Եթէ սովորական կոտորոց արմատքն առանց հաստատութեան իցեն, մարթես յառաջագոյն զկոտորսն զայնոսիկ ի կոտորս տասներորդականս շրջել, եւ ապա ի նոցանէ զարմատն խնդրել, որով կարիցես դիւրագոյն եւ համառօտիւք առնել ի զօրութիւն կոտորոյն մերձենալ: Որպէս,*

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{0{,}66|66|66|66|66\ldots.}=0,81649\ldots,$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0{,}666|666|666|\ldots}=0{,}873\ldots$$

$$\sqrt{7\frac{5}{12}}=\sqrt{7{,}41|66|66|\ldots.}=2{,}723\ldots$$

$$\sqrt[3]{\frac{357}{160}}=\sqrt[3]{2{,}231|250|000|\ldots.}=1{,}306\ldots.$$

ԳԼՈՒԽ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ԿՇՌՈՒԹԵԱՆ ԵՒ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԵԱՆ

Հ Ա Տ Ա Ծ Ա

ՑԱՂԱԳՍ ԿՇՌՈՒԹԵԱՆ

300. Կշռութիւն *անուանեալ կոչի զերկուս չափս ընդ միմեանս հարկանել, որպէս զի ի վերայ հասանել կարիցեմք, եթէ զիարդ եւ որով օրինակաւ մին ի միւսմէն այլակերպ իցէ, եւ կամ թէ որպէս արդեւք ինչ մի յայլմէ իմէքէ ծագեալ իցէ: Արդ յանձնէ իսկ կարիցես իմանալ, եթէ համազգի իրաց եւեթ գոյ հնար ընդ միմեանս կշռել, եւ օտարազգիքն, որք ի համազգիս փոփոխել չկարիցեն, չմարթին ընդ միմեանս ի կշիռ համեմատութեան բերել:*

Չափքն որք ընդ միմեանս կշռիցին յորջորջին Անդամք կշռութեան. առաջին չափն կոչի Առաջնորդ, իսկ երկրորդն Յաջորդ: Եթէ երկոքին անդամքն, առաջնորդն եւ յաջորդն հաւասար միմեանց իցեն, անուանեալ կոչի Կշռութիւն հաւասարութեան, իսկ եթէ չհաւասարք իցեն անդամք կշռութեանն, ըստ փոքրագոյն եւ մեծագոյն լինելոյ առաջնորդին քան զյաջորդն յորջորջի եւ կշռութիւնն Աճեցող եւ Նուազող:

301. *Ընդ երկուս բաժանի կշռութիւնն, ի Համարողական եւ Երկրաչափական: Համարողական կշռութիւն է, համեմատել զերկուս չափս համազգիս, հայեցեալ ընդ այլակերպութիւն նոցա, եւ կամ եթէ որչափ ինչ մին քան զմեւսն առաւել իցէ: Իսկ որ զայլակերպութիւն առաջնորդին եւ յաջորդին ցուցանիցէ անուանեալ կոչի Ցուցիչ կամ Այլակերպու-*

թիւն կամ խտիր կշռութեանն։ Նշանն համարողական կշռութեան այս ($\dot{-}$) է, որոյ ընդ ձախմէ դրոշմի առաջնորդն ա, եւ ընդ աջմէ յաջորդն բ, որպիսի ինչ ա$\dot{-}$բ, եւ ընթերցեալ լինի զայս ձեւ օրինակի, եթէ ա կշռի ընդ բ կամ համառօտիւք կարճառօտս ա ընդ բ։ Իսկ Երկրաչափական կշռութիւնն այն ինչ է, յորում երկու չափք այնպէս իմն կշռին ընդ միմեանս, որպէս զի միոյն բազում անգամ ի միւսն բովանդակել, եւ կամ յայն իմն մտ եղեալ, եթէ քանիցս անգամ յաջորդն առաւել քան զառաջնորդն իցէ։ Թուին՝ որ իբրեւ առաջնորդաւն բազմացուցանիցի, եւ արդիւնք նոցա հաւասար իցէ յաջորդին, անուանեալ կոչի Ցուցիչ կամ Քանորդ կշռութեան։ Նշան երկրաչափական կշռութեան այս ($\div$) է, որպիսի ինչ ա$\div$բ, եւ ընթերցեալ լինի ըստ նմանութեան կշռութեան համարողութեան եթէ ա կշռի ընդ բ, կամ համառօտիւք իմն եթէ ա ընդ բ։

302. Ալակերպութիւն համարողական կշռութեան գտանի, յորժամ զառաջնորդն ի յաջորդէն հանցես, զոր օրինակ ցուցիչ ա$\dot{-}$բ կշռութեան է բ$-$ա$=\pm$ե քանզի ըստ աճեցող եւ ըստ նուազող լինելոյ կշռութեանն՝ եւ այլակերպութիւնն հաստատական կամ ուրացական լինիցի։ Որպիսի ինչ

$$5\dot{-}9 \text{ է } 9-5=4 \text{ իսկ}$$

$$9\dot{-}5 \text{ է } 5-9=-4$$

Եւ քանզի բ$-$ա$=\pm$ե. ուրեմն յորժամ յերկոսին եւս անդամս հաւասարութեանն ա յաւելուցումք լինիցի բ$=$ա$\pm$ե, ուստի եւ ա$\dot{-}$(ա$\pm$ե), որ է հասարակաց իմն օրինակ համարողական կշռութեան։

Իսկ քանորդ կամ ցուցիչ երկրաչափական կշռութեան գտանիցի, յորժամ զյաջորդն ընդ առաջնորդն բաժանիցես, որպէս ա$\div$բ$=$բ$:$ա$=\frac{\text{բ}}{\text{ա}}=+$, յորում ըստ աճեցող եւ նուազող լինելոյ կշռութեանն եւ $ք>1$ կամ $ք<1$։ Իսկ զի $\frac{բ}{ա}=ք$, ուրեմն եթէ զերկուս անդամսն եւս հաւասարութեանն ա չափով բազմապատկեսցուք, լինիցի $բ=աք$, յորմէ եւ $ա \div աք$, որ է օրինակ երկրաչափական կշռութեան։

Եթէ այլակերպութիւն համարողական կշռութեան $=0$ իցէ, եւ քանորդ երկրաչափական կշռութեան $=1$ իցեն, յայնժամ առաջնորդն եւ յաջորդն միմեանց հաւասարք են։

303. Եթէ հաստատուն իցէ քանորդ երկրաչափական կշռութեան, եւ բովանդակ կշռութիւնն հաստատուն լինիցի, իսկ եթէ առանց հաստատութեան իցէ քանորդն եւ բովանդակ կշռութիւնն առանց հաստատութեան է։ Զոր օրինակ $3 \div 12$ հաստատուն է, քանզի ցուցիչ կշռութեանն $\frac{12}{3}=4$ հաստատուն է, եւ թէպէտ եւ եւ առաջնորդն եւ յաջորդն $\sqrt{3} \div \sqrt{12}$ առանց հաստատութեան իցեն, բայց սակայն զի ցուցիչ կշռութեանն $\sqrt{3} \div \sqrt{12}=\sqrt{4}=2$ հաստատուն է, վասն այսորիկ եւ կշռութիւնն բովանդակ հաստատուն։ Նոյն եթէ $բ=ա\sqrt{3}$, յայտ է եթէ կշռութիւնս $ա \div բ$ կամ $ա \div ա\sqrt{3}$ առանց հաստատութեան իցէ, քանզի ցուցիչն է $\frac{բ}{ա}=\frac{ա\sqrt{3}}{ա}=\sqrt{3}$։

Եթէ շրջիցին անդամք կշռութեանն, այս ինքն առաջնորդն ի յաջորդ, եւ յաջորդն յառաջնորդ, ասի կշռութիւնն խոտորնակ, համեմատութեամբ առաջին շրջեալ կշռութեանն։

304. Երկու կշռութիւնք երկրաչափութեան կամ համարողութեան հաւասարք են միմեանց, եթէ երկոցունցն եւս մի եւ նոյն իցէ ցուցիչն։ Զոր օրինակ, $3 \dot{-} 5$ եւ $7 \dot{-} 9$ են երկու հաւասար կշռութիւնք համարողութեան, քանզի այլակերպութիւն նոցա է $+2$։ Ըստ նմին նմանութեան, $3 \div 12$ եւ $5 \div 20$ են

հաւասար երկրաչափական կշռութիւնք, քանզի զնոյն $12 : 3 = 20 : 5 = 4$ քանորդս ունին։ Իսկ եթէ ցուցիչք կշռութեանցն չհաւասարք իցեն, եւ կշռութիւնքն չհաւասարք են, եւ ի չհաւասարից անտի մեծագոյն այն է, որոյ մեծ իցէ ցուցիչն։ Զոր օրինակ,

$ա \dotdiv բ > գ \dotdiv դ$, եթէ $բ - ա > դ - գ$, իսկ

$ա \dotdiv բ < գ \dotdiv դ$, եթէ $բ - ա < դ - գ$։ Զոր օրինակ են

$7 \dotdiv 14 > 7 \dotdiv 12$, քանզի $14 - 7 > 12 - 7$։

Ըստ նմին օրինակի

$ա \div բ > գ \div դ$, եթէ $\frac{բ}{ա} > \frac{դ}{գ}$, իսկ

$ա \div բ < գ \div դ$, եթէ $\frac{բ}{ա} < \frac{դ}{գ}$։ Որպիսի ինչ են

$$1 \div 3 > 7 \div 14, \text{ քանզի } \frac{3}{1} = 3 \text{ եւ } \frac{14}{7} = 2$$

$$2 \div 4 < 7 \div 21, \text{ քանզի } \frac{4}{2} = 2, \text{ եւ } \frac{21}{7} = 3$$

305. Այլակերպութիւն համարողական կշռութեանն ոչ փոփոխի, եթէ անդամքն կշռութեան միով չափով կամ առաւելուցուն եւ կամ նուազիցին։ Որպիսի ինչ եթէ յերկոսին անդամս հասարակաց օրինակի կշռութեանս $ա \dotdiv (ա + ե)$ յաւելուցումք $ն$ կամ յերկոցունց անդամոցն եւս հանիցեմք $ն$, լինիցի կշռութիւնն

$$(ա \pm ն) \dotdiv (ա + ե \pm ն),$$

որոյ այլակերպութիւնն է

$$(ա + ե \pm ն) - (ա \pm ն) = ա + ե \pm ն - ա \mp ն = ե$$

Այլ փոփոխիցի կշռութիւնն, յորժամ երկոքին անդամքն նովին չափով բազմացուցանիցին կամ ընդ նոյն չափ բաժանիցին։ Զոր օրինակ, եթէ $ա \dotdiv բ$ կշռութեան այլակերպութիւնն $բ - ա = ե$ իցէ, յորժամ երկոքին անդամքն $մ$ չափով բազմացուցանիցին $ամ \dotdiv բմ$ լինիցի, որոյ այլակերպութիւնն իցէ

$$բմ - ամ = մ(բ - ա) = մե։$$

Նոյն օրինակ եւ $\frac{\text{ա}}{\text{ն}} \dot{-} \frac{\text{բ}}{\text{ն}}$ կշռութեանս այլակերպութիւնն է

$$\frac{\text{բ}}{\text{ն}} - \frac{\text{ա}}{\text{ն}} = \frac{\text{բ}-\text{ա}}{\text{ն}} = \frac{\text{խ}}{\text{ն}}\ (\dot{-}.\ 304.):$$

306. Ըստ 302, համարեսցուք եթէ խ այլակերպութիւն իցէ $\text{ա} \dot{-} \text{բ}$ կշռութեան. աստանօր յառաջ գայ,

Ա.) . $\text{խ}=\text{բ}-\text{ա}$. Այլակերպութիւն համարողական կշռութեան հաւասար է յաջորդին, յորմէ հանեալ իցէ առաջնորդն:

Բ.) . $\text{բ}=\text{ա}+\text{խ}$. Այս ինքն յորժամ յերկոսին եւս անդամս այսր $\text{խ}=\text{բ}-\text{ա}$ հաւասարութեան յաւելուցուս ա, կամ, Յաջորդն համարողական կշռութեան հաւասար է առաջնորդին, յոր յաւելուցու եւ այլակերպութիւնն:

Գ.) . $\text{ա}=\text{բ}-\text{խ}$. Այս ինքն յորժամ յերկոցունց եւս անդամոց այսր $\text{ա}+\text{խ}=\text{բ}$ հաւասարութեանս հանցես խ. կամ Առաջնորդն կշռութեան համարողութեան հաւասար է յաջորդին, յորմէ հանեալ իցէ այլակերպութիւնն:

Յորոց ինքնին ի վերայ հասանիցես, եթէ յորժամ յերից ա, բ, խ չափուց կշռութեանն մին չիցէ ծանուցեալ, հնար է ի ձեռն երկուց ծանուցելոցն զանծանօթն գտանել:

307. Երկրաչափական կշռութիւնն ոչ փոփոխի, յորժամ զերկոսին անդամսն եւս նովին չափով բազմացուցանիցես, կամ ընդ նոյն չափ բաժանիցես: Քանզի որովհետեւ ցուցիչ $\text{ա} \div \text{բ}$ կշռութեանս է +, կամ $\text{բ} : \text{ա} = +$, ըստ սմին օրինակի եւ $\frac{\text{նբ}}{\text{նա}}$ կշռութեանս եւ $\frac{\text{բ}:\text{ն}}{\text{ա}:\text{ն}}$ կշռութեանս է +, ուստի եւ

$\text{մա} \div \text{մբ}$ եւ $(\text{ա}:\text{ն}) \div (\text{բ}:\text{ն})$ հաւասարք իցեն $\text{ա} \div \text{բ}$ կշռութեան (Հ. 304)։

Այլ նմին հակառակ փոփոխի կշռութիւնն երկրաչափական, եթէ ընդ յերկոսին եւս անդամս կշռութեանն չափս հաւասարս յաւելուցուս եւ կամ անտի հանիցես։ Քանզի որովհետեւ ցուցիչ կշռութեանս $(\text{ա} \pm \text{մ}) \div (\text{բ} \pm \text{մ}) = \frac{\text{բ} \pm \text{մ}}{\text{ա} \pm \text{մ}}$, եւ ցուցիչ $\text{ա} \div \text{բ}$ կշռութեան է $\frac{\text{բ}}{\text{ա}} = \text{ք}$։ Արդ

$$\frac{\text{բ}}{\text{ա}} - \frac{\text{բ} \pm \text{մ}}{\text{ա} \pm \text{մ}} = \frac{\text{աբ} \pm \text{բմ} - \text{աբ} \mp \text{ամ}}{\text{ա}(\text{ա} \pm \text{մ})} = \frac{\pm \text{մ}(\text{բ} - \text{ա})}{\text{ա}(\text{ա} \pm \text{մ})}$$

Այլ եթէ $\text{ա} = \text{բ}$ իցէ, կամ $\text{մ} = 0$, յայնժամ չփոփոխի կշռութիւնն։

308. Համարեսցուք եթէ ք քանորդ իցէ $\text{ա} \div \text{բ}$ կշռութեան. Արդ

Ա). $\text{ք} = \text{բ} : \text{ա}$։ Քանորդն հաւասար է յաջորդին, որ ընդ առաջնորդն բաժանիցի։

Բ). $\text{բ} = \text{աք}$։ Յաջորդն հաւասար է արդեանց առաջնորդին եւ քանորդին։

Գ). $\text{ա} = \text{բ} : \text{ք}$։ Այս ինքն եթէ առաջնորդն հաւասար է յաջորդին որ ընդ քանորդն բաժանիցի։

Յայսցանէ կարիցես դիւրագոյն ճանաչել, զի եթէ յերից ա, բ, ք չափուցս մին չիցէ ծանուցեալ, հնար է ի ձեռն երկուց ծանուցելոցն զանծանօթն գտանել։

309. Յորժամ զերկոսին անդամն կշռութեանս $\text{ա} \div \text{աք}$ ընդ ա բաժանիցես, ելանիցէ հաւասար նմին միւս եւս կշռութիւն $1 \div \text{ք}$։ Այս ինքն եթէ փոխանակ ամենայն կշռութեանց մարթ է դնել զկշռութիւն 1ոյ առ ցուցիչն առաջնոյ կշռութեանն։

310. Եթէ բազում միմեանց հաւասար կշռութիւնք իցեն $\text{ա} \div \text{բ}$, $\text{գ} \div \text{դ}$, $\text{ե} \div \text{զ}$, $\text{է} \div \text{ը}$, որոց հասարակաց քանորդ իցէ $= \text{ք}$. հարկ է զի եւ կշռու-

թիւն բովանդակութեան առաջնորդացն առ բովանդակութիւն յաջորդացն զնոյն ցուցիչ ունիցի:

Վասնզի որովհետեւ

$$բ=աք,\ դ=գք,\ զ=եք,\ ը=էք$$

ուստի եւ

$$բ+դ+զ+ը=աք+գք+եք+էք=(ա+գ+ե+է)ք$$

յորմէ եւ

$$(ա+գ+ե+է)\div(բ+դ+զ+ը)=$$
$$(ա+գ+ե+է)\div(ա+գ+ե+է)ք$$
$$=1\div ք\ (\dot{-}\cdot 308)=ա\div բ=գ\div դ\ \cdots\cdots$$

Վասնզի $ա\div բ$, եւ $գ\div դ$ կշռութեանց ($\dot{-}$ · 310) նոյն $ք$ ցուցիչ է, զորին զհետ գայ, եթէ

$$(ա\pm գ)\div(բ\pm դ)=(ա\pm գ)\div(աք\pm գք)\ իցէ,$$

որոց քանորդն է

$$\frac{աք\pm գք}{ա\pm գ}=\frac{ք(ա\pm գ)}{ա\pm գ}=ք,$$

Այս ինքն եթէ, Այնպէս իմն կշռին բովանդակութիւն կամ այլակերպութիւն առաջնորդաց առ բովանդակութիւն կամ այլակերպութիւն յաջորդացն, որպէս մի առաջնորդ ընդ իւր յաջորդն կշռիցի:

311. Իբրեւ առաջնորդք եւ յաջորդք բազում կշռութեանց երկրաչափութեան միմեամբք բազմացուցանիցին, կշռութիւն արդեանցն անուանեալ կոչի Յօդուածոյ կշռութիւն: Ցուցիչ յօդուածոյ կշռութեան հաւասար է արդեանց ցուցչաց ամենայն կշռութեանցն, յորոց յօրինեալ կազմեալ իցէ յօդուածոյ կշռութիւնն: Որպիսի ինչ ի կշռութեանս

$$ա\div բ,\ \text{քանորդն իցէ}\ \frac{բ}{ա}=փ,\ \text{կամ}\ բ=ափ$$

$$գ\div դ\qquad ,,\qquad ,,\ \frac{դ}{գ}=ր,\ \text{կամ}\ դ=գր$$

$$ե\div զ\qquad ,,\qquad ,,\ \frac{զ}{ե}=ց,\ \text{կամ}\ զ=եց$$

նոյնգունակ է եւ ի կշռութեանս

$\text{ագե} \div \text{բդզ}$ քանորդն $\dfrac{\text{բդզ}}{\text{ագե}} = \dfrac{\text{ատ} \cdot \text{գր} \cdot \text{եյ}}{\text{ագե}} =$

$\dfrac{\text{ագե} \cdot \text{տրյ}}{\text{ագե}} = \text{տրյ}$:

Եթէ ամենայն կշռութիւնքն միմեանց հաւասար իցեն, այս ինքն է $\text{տ}=\text{ր}=\text{յ}$, յայնժամ յօդուածոյ կշռութիւնն անուանեալ կոչի Բազմացուցեալ, եւ եթէ յերկուց կամ յերից կամ ի ... կշռութեանց յօդեալ իցէ, յորջորջի Կրկնեալ, Երեքկնեալ, ...: Մի մի ի հաւասար կշռութեանցն, յորոց բազմացուցեալ կշռութիւնն ծնանիցի, անուանեալ կոչի Միւսանգամ բազմացուցեալ, եւ առանձինն անուամբք Միւսանգամ կրկնեալ, Միւսանգամ երեքկնեալ, ... կշռութիւն: Զոր օրինակ եթէ $\text{տ}=\text{ր}$ համարիցիմք, յայնժամ $\text{ագ} \div \text{բդ}$ կշռութիւնս կրկնեալ կշռութիւն իցէ, եւ $\text{ա} \div \text{բ}$, եւ $\text{գ} \div \text{դ}$ միւսանգամ կրկնեալ կշռութիւնք, համեմատեալ $\text{ագ} \div \text{բդ}$ կշռութեան:

312. Որովհետեւ այնպէս իմն համարեցաք, եթէ կշռութիւնքս $\text{ա} \div \text{բ}$, $\text{գ} \div \text{դ}$, $\text{ե} \div \text{զ}$, ... հաւասարք միմեանց իցեն, վասն այսորիկ մարթ է զնոսա փոխանակ միմեանց դնել, եւ այսպէս իմն կարգել,

$\text{ա} \div \text{բ}$ կամ $\text{գ} \div \text{դ}$, եւ $\text{ա} \div \text{բ}$ կամ $\text{գ} \div \text{դ}$ կամ $\text{ե} \div \text{զ}$

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\text{ա} \div \text{բ}} & \underline{\text{գ} \div \text{դ}} & \text{ա} \div \text{բ} & \text{գ} \div \text{դ} & \text{ե} \div \text{զ} \\
\text{ա}^2 \div \text{բ}^2 & \text{գ}^2 \div \text{դ}^2 & \underline{\text{ա} \div \text{բ}} & \underline{\text{գ} \div \text{դ}} & \underline{\text{ե} \div \text{զ}} \\
 & & \text{ա}^3 \div \text{բ}^3 & \text{գ}^3 \div \text{դ}^3 & \text{ե}^3 \div \text{զ}^3
\end{array}$$

այս ինքն եթէ Կրկնեալ կշռութիւնն է Կշռութիւն երկրորդ կարողութեան, եւ երեքկնեալն, Կշռութիւն երրորդ կարողութեան: Յորմէ յառաջ գայ, եթէ Միւսանգամ կրկնեալ եւ երեքկնեալ կշռութիւնքն երկրորդ եւ երրորդ արմատք իցեն:

Իսկ եթէ ն հաւասար կշռութիւնս յօդիցեմք յորոց մին $\text{ա} \div \text{բ}$ իցէ, յայնժամ

$$\text{ա}^{\text{ն}} \div \text{բ}^{\text{ն}} = \text{ա}^{\text{ն}} \div (\text{աք})^{\text{ն}} = \text{ա}^{\text{ն}} \div \text{ա}^{\text{ն}}\text{ք}^{\text{ն}} = 1 \div \text{ք}^{\text{ն}}$$

այս ինքն եթէ Կարէ ոք փոխանակ բազմացուցեալ կշռութեանն, զկշռութիւն միութեան առ ցուցիչ միոյ ի կշռութեանցն դրոշմել, որ յայնպիսի իմն գործութիւն համբարձեալ իցէ, զի ժ զթիւ համարոյ կշռութեանցն ցուցանիցէ։ Այն հակառակ եթէ $\frac{Բ}{Ա}$ $=Գ$ իցէ, զհետ գայ եթէ եւ

$$\sqrt[ժ]{Ա} \div \sqrt[ժ]{Բ} = 1 \div \frac{\sqrt[ժ]{Բ}}{\sqrt[ժ]{Ա}} = 1 \div \sqrt[ժ]{\frac{Ա}{Բ}} = 1 \div \sqrt[ժ]{Գ}$$

այս ինքն եթէ փոխանակ միանգամ բազմացուցեալ կշռութեան կարիցէ ոք դրոշմել զկշռութիւն միութեան առ ժ երրորդ արմատ, որ ի քանեորդէ անուն բազմացուցեալ կշռութեանն ելանիցէ։

ՀԱՏԱԾ Ի

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԵԱՆ

313. ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ երկուց կշռութեանց անուանեալ կոչի Համեմատութիւն։ Եթէ համարողական իցեն հաւասար կշռութիւնքն, յորջորջի համեմատութիւն համարողական, իսկ եթէ երկրաչափական կշռութիւնք ընդ միմեանս համեմատիցին, համեմատութիւն երկրաչափական առի։ Որպիսի ինչ

$$ա \mathbin{\dot{-}} ա+ե = բ \mathbin{\dot{-}} բ+ե$$

համեմատութիւն է համարողական, քանզի յերկուց համարողական կշռութեանց յօդեալ եւ կայ, որ եւ ընթերցեալ լինի, եթէ. Որպէս ա կշռիցի ընդ ա+ե, նոյնպէս բ ընդ բ+ե։ Իսկ

$$ա \div ա+ = բ \div բ+$$

երկրաչափական համեմատութիւն է, եւ ընթերցեալ լինի, եթէ, Որպէս կշռիցի ա ընդ ա+, նոյնպէս կշռի բ ընդ բ+։

Առանձինն չափքն, յորոց կազմիցի համեմատութիւնն, անուանեալ կոչին Անդամք համեմատութեան, առաջին եւ յետին անդամքն ասին Արտաքին անդամք, իսկ երկրորդն եւ երրորդն Ներքին անդամք։ Առաջին անդամն ընդ երրորդին, նոյնպէս եւ երկրորդն ընդ չորրորդին համազգի են, վասն որոյ եւ ասին Համազգի անդամք, քանզի առաջինն եւ երրորդն առաջնորդք են, իսկ երկրորդն եւ չորրորդն յաջորդք, որք զհամեմատութիւնն յօդեն։

Եթէ ներքին անդամքն հաւասար միմեանց իցեն, անուանեալ կոչի համեմատութիւնն Անքակ կամ Աղխաղնեալ։ Զոր օրինակ $\text{ա}\dot{-}\text{բ}=\text{բ}\dot{-}\text{գ}$ է անքակ համեմատութիւն համարողութեան, յորում բ ասի միջին համեմատական թիւ, իսկ $\text{ա}\div\text{բ}=\text{բ}\div\text{գ}$ է անքակ համեմատութիւն երկրաչափութեան, յորում բ է միջին երկրաչափական համեմատական թիւն ընդ մէջ ա եւ գ չափուց. եւ գ երրորդ անքակ համեմատական թիւ ա եւ բ չափուց։

Եթէ մին ի կշռութեանց համեմատութեան խոտորնակ իցէ, անուանեալ կոչի, խոտորնակ համեմատութիւն, զորմէ ընդարձակագոյնս եւս ճառեսցուք։

314. Յամենայն համեմատութիւնս համարողութեան, բովանդակութիւն արտաքին անդամոցն հաւասար է բովանդակութեան ներքին անդամոց։

Որպիսի ինչ ի $\text{ա}\dot{-}\text{բ}=\text{գ}\dot{-}\text{դ}$, համեմատութեանս $\text{ա}+\text{դ}=\text{բ}+\text{գ}$, եւ եթէ $\text{բ}=\text{գ}$, յայնժամ $\text{ա}+\text{դ}=2\text{գ}$։ Քանզի իբրեւ $\text{բ}-\text{ա}=\text{ե}$ եւ $\text{դ}-\text{գ}=\text{ե}$ դնիցեմք, այս է եթէ $\text{բ}=\text{ա}+\text{ե}$ եւ $\text{դ}=\text{գ}+\text{ե}$ իցեն (Հ. 306)։ Արդ $\text{ա}+\text{դ}=\text{ա}+\text{գ}+\text{ե}$, եւ $\text{բ}+\text{գ}=\text{ա}+\text{գ}+\text{ե}$, ապա ուրեմն $\text{ա}+\text{դ}=\text{բ}+\text{գ}$. եւ եթէ $\text{բ}=\text{գ}$ իցէ, յայնժամ $\text{ա}+\text{դ}=\text{բ}+\text{բ}$ լինիցի, որ է$=2\text{բ}$։ Որպիսի ինչ եւ ի համեմատութեանս

$$5\dot{-}7=9\dot{-}11,5+11=7+9=16 \text{ եւ ի}$$
$$5\dot{-}7=7\dot{-}9,5+9=2\cdot7=14$$

315. Այսու կանոնիւ մարթեմք զանդամս $\text{ա}\dot{-}\text{բ}=\text{գ}\dot{-}\text{դ}$ համեմատութեան ութ օրինակաւ փոփոխել, յորժամ փոխանակ համեմատութեանս

1), ա∸բ=գ∸դ, դնիցեմք,

2), ա∸գ=բ∸դ, փոփոխելով զներքին անդամսն,

3), դ∸բ=գ∸ա, զարտաքին անդամսն փոփոխելով,

4), բ∸ա=դ∸գ, զկշռութիւնս խոտորնակս շրջելով,

5), դ∸գ=բ∸ա, զարտաքին եւ զներքին անդամսն փոփոխելով,

6), բ∸դ=ա∸գ, զկշռութիւնսն որ յ3, խոտորնակս շրջելով,

7), գ∸դ=ա∸բ, զկշռութիւնսն որ ի 1, փոխանակ միմեանց դնելով,

8), գ∸ա=դ∸բ, զկշռութիւնսն որ յ2, խոտորնակս շրջելով,

եւ յամենայն համեմատութիւնս յայտնի է ա+դ=բ+գ:

316. Յորժամ երեք անդամքն համեմատութեան համարողութեան ա, բ, գ, ծանուցեալ իցեն, մարթ է ի ձեռն ծանուցելոցն, եւ չորրորդ անծանօթ + անդամոյն ի վերայ հասանել:

Եթէ մին յարտաքին անդամոցն չիցէ ծանուցեալ, ի բովանդակութենէ անտի ներքին անդամոցն, հան զարտաքին ծանուցեալ անդամն. եւ եթէ ներքին իցէ չծանուցեալ անդամն, ի բովանդակութենէ արտաքին անդամոց հան զծանուցեալ ներքին անդամն, եւ այլակերպութիւնն իցէ անդամն չծանուցեալ:

Բանզի որովհետեւ ի ա∸բ=գ∸դ համեմատութեանս ա+դ=բ+գ, ուրեմն դ=բ+գ−ա, եւ ա=բ+գ−դ, եւ բ=ա+դ−գ, եւ գ=ա+դ−բ: Զոր օրինակ

15∸32=7∸+, տանէ +=32+7−15=24

$5\frac{3}{5} \dot{-} + = 12\frac{1}{6} \dot{-} 17\frac{1}{4}$ տանէ $5\frac{3}{5} + 17\frac{1}{4} - 12\frac{1}{6}$

$= 10\frac{41}{60}$

Իսկ եթէ անքակ իցէ համեմատութիւնն, եւ մին յարտաքին անդամոցն չիցէ ծանուցեալ, պարտ է յերկպատիկ միջին համեմատական թուոյ, զարտաքին ծանուցեալ անդամն հանել, եւ այլակերպութիւնն իցէ ք անծանօթ անդամն։

Քանզի ի համեմատութեանս $ա \dot{-} բ = բ \dot{-} ն$, է $2բ = ա + ն$, ուրեմն $ն = 2բ - ա$, եւ $ա = 2բ - ն$։ Որպիսի ինչ

$$10 \dot{-} 30 = 30 \dot{-} ք, \text{ առնէ } ք = 30 + 30 - 10 = 50$$

Ապա թէ միջին համեմատական թիւն ա եւ ն թուոց չիցէ ծանուցեալ, պարտ է զբովանդակութիւն երկուց ծանուցեալ անդամոցն ընդ 2 բաժանել, եւ քանորդն իցէ անծանօթ համեմատական թիւն։

Քանզի ի համեմատութեանս $ա \dot{-} ք = ք \dot{-} ն$, $ա + ն = 2ք$, ուրեմն $ք = \frac{ա + ն}{2}$։ Զոր օրինակ միջին համեմատական թիւն 9 եւ 3 թուոց է

$$\frac{9 + 3}{2} = 6, \text{ ուստի եւ } 3 \dot{-} 6 = 6 \dot{-} 9$$

Որովհետեւ սակաւ ինչ օգուտ եւ շահ է ի կշռութենէ եւ ի համեմատութենէ համարողութեան. վասն այսորիկ եւ ոչ իսկ կամք են մեզ բանս երկայնաձիգս զոցանէ յօրինելոյ, այլ փութալ ճեպել առ ի սկիզբն առնել զերկրաչափական համեմատութենէն ճառելոյ, որ ի բաւանդակ իսկ մաթեմատիկեան ճարտարութեանս առէպ ի կիր արկանի։ Եւ այսուհետեւ յորժամ զհամեմատութիւնն առանց վերադրին ասիցեմք, պարտ եւ պատշաճ է զբանսն զերկրաչափական համեմատութենէն իմանալ։

317. Յամենայն համեմատութեան արդիւնք արտաքին անդամոցն, հաւասար է արդեանց ներքին անդամոց

Քանզի որովհետեւ ի $ա \div բ = գ \div դ$ համեմատութեանս $\frac{բ}{ա} = ք$, եւ $\frac{դ}{գ} = ք$, ուստի եւ $բ = աք$ եւ $դ = գք$. արդ իբրեւ զզօրութիւնս փոխանակ ա եւ դ չափուց դնիցեմք, համեմատութիւնս $ա \div բ = գ \div դ$

լինիցի $\text{ա} \div \text{ա}+ = \text{գ} \div \text{գ}+$, յորում $\text{ագ}+ = \text{ա}+\text{գ}$ կամ $\text{ադ} = \text{բգ}$: Զոր օրինակ ի համեմատութեանս

$$4 \div 12 = 7 \div 21 \text{ է } 4 \cdot 21 = 7 \cdot 12$$

Իսկ յանքակ համեմատութեան արդիւնք արտաքին անդամոցն հաւասար է երկրորդ կարողութեան միջին համեմատական անդամոյն: Քանզի $\text{ա} \div \text{բ} = \text{բ} \div \text{գ}$, է $\text{ագ} = \text{բբ} = \text{բ}^2$: Որպիսի ինչ ի համեմատութեանս

$$7 \div 21 = 21 \div 63 \text{ է } 7 \cdot 63 = 21^2 = 441$$

318. Այսու կանոնիւս կարիցեմք, յորժամ մին յանդամոցն համեմատութեան չիցէ ծանուցեալ, ի ձեռն երից ծանուցելոց՝ անծանօթին ի վերայ հասանել: Քանզի որովհետեւ ի համեմատութեանս $\text{ա} \div \text{բ} = \text{գ} \div \text{դ}$, $\text{ադ} = \text{բգ}$, ուրեմն

$$\text{ա} = \text{բգ} : \text{դ}, \text{ եւ } \text{դ} = \text{բգ} : \text{ա},$$

այս ինքն. Եթէ մին յարտաքին անդամոցն չիցէ ծանուցեալ, պարտ է զարդիւնս միջին անդամոցն ընդ արտաքին ծանուցեալ անդամն բաժանել, եւ + քանորդն է չծանուցեալ անդամն: Որպիսի ինչ,

$$3 \div 5 = 12 \div +, \text{ արդ } + = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20, \text{ նոյնպէս}$$

$$+ \div 1,2 = 2,7 \div 9, \text{ արդ } + = \frac{1,2 \times 2,7}{9} = 0,36$$

Դարձեալ ի $\text{ադ} = \text{բգ}$ հաւասարութենէ յառաջ գայ,

$$\text{բ} = \text{ադ} : \text{գ}, \text{ եւ } \text{գ} = \text{ադ} : \text{բ},$$

այս ինքն. Եթէ մին ի ներքին անդամոցն չիցէ ծանուցեալ, պարտ է զարդիւնս արտաքին անդամոցն ընդ միջին ծանուցեալ անդամն բաժանել, + քանորդն իցէ չծանուցեալ միջին անդամն: Զոր օրինակ,

$$7 \div + = 3 \div 15, \text{ առնէ } + = \frac{7 \cdot 15}{3} = 35 \text{ կամ}$$

$$7 \div 35 = + \div 15, \text{ „ } + = \frac{7 \cdot 15}{35} = 3$$

Այլ եթէ անքակ եւ աղխախեալ իցէ համեմատութիւնն, զոր օրինակ, $\text{ա} \div \text{բ} = \text{բ} \div \text{գ}$, քանզի որովհետեւ $ագ=բ^2$, ուրեմն $ա=բ^2:գ$, եւ $գ=բ^2:ա$: Արդ եթէ մին յարտաքին անդամոց աղխաղխեալ համեմատութեան չիցէ ծանուցեալ, պարտ է զերկրորդ կարողութիւն միջին համեմատական չափոյն ընդ արտաքին ծանուցեալ անդամն բաժանել, եւ զայս օրինակ գտանիցի $ք$ անծանօթն: Իսկ եթէ միջին համեմատական չափն չիցէ ծանուցեալ, քանզի որովհետեւ $բ^2=ագ$, ուստի եւ $բ=\sqrt{բ^2}$ կամ $բ=\sqrt{ագ}$, ուրեմն

Միջին համեմատական չափն գտանիցի յորժամ զարտաքին անդամն բազմացուցանիցես, եւ յարդեանց առնի զերկրորդ արմատ հանցես: Զոր օրինակ,

$$2 \div 4 = 4 \div ք,\; ք=\frac{4^2}{2}=\frac{16}{2}=8$$

$$ք \div 25 = 25 \div 125,\; ք=\frac{25^2}{125}=\frac{25}{5}=5$$

$4 \div ք = ք \div 64,\; ք^2=4·64$ ուստի եւ $ք=\sqrt{4·64}=2·8=16$:

319. Քանզի որովհետեւ ի $ա \div բ = գ \div դ$ համեմատութեանս է $ադ=բգ$, ապա իսկ մարթ է յայտ արարեալ ցուցանել, եթէ ի հաւասարութենէ անտի $ադ=բգ$ չափուցն ծնանիցի $ա \div բ = գ \div դ$ համեմատութիւնս: Քանզի իբրեւ զհաւասարութիւնն ընդ $ագ$ բաժանիցեմք, որպէս

$$\frac{բգ}{ագ}=\frac{ադ}{ագ},\text{ ելանիցեն }\frac{բ}{ա}=\frac{դ}{գ}\text{ որ է }ա \div բ = գ \div դ$$

այս ինքն եթէ Առնելիք միոյ յարդեացն կողմն զերկուս արտաքին անդամս հաւասարութեան, իսկ առնելիք միւսոյն զներքին անդամսն: Զոր օրինակ

$ամ=բք$, առնէ $ա \div բ = ք \div մ$ կամ $բ \div ա = մ \div ք$,

$ա=մնք$, ,, $1 \div մն = ք \div ա$, քանզի $ա=1·ա$

$ա^2-ամ=ք^2-աք$ առնէ $ա \div ք = ք-ա \div ա-մ$

$գք=\sqrt{մ^2-ն^2}$, առնէ $(մ+ն) \div գք = գք \div (մ-ն)$ կամ

$(մ-ն) \div գք = գք \div (մ+ն)$ կամ

$(մ-ն) \div գ^2 = ք^2 \div (մ+ն)$, այլովքն հանդերձ:

320. Զամենայն համեմատութիւն, որոյ չորք անդամք իցեն, մարթ է, առանց զօրութեան համեմատութեանն շրջելոյ, ութ օրինակաւ փոփոխել:

1) ա : բ = գ : դ, զորոյ եթէ զներքին անդամսն փոփոխեսցես,

2) ա : գ = բ : դ, եթէ զառաջին համեմատութեան զկշռութիւնն խոտորակս շրջեսցես,

3) բ : ա = դ : գ, եւ եթէ զկշռութիւնս երկրորդին փոխանակ միմեանց դրոշմիցես,

4) բ : դ = ա : գ, եթէ զկշռութիւնս երկրորդին խոտորնակս շրջիցես,

5) գ : ա = դ : բ, եթէ զկշռութիւնս առաջնոյն փոխանակ միմեանց գրիցես.

6) գ : դ = ա : բ, եթէ զարտաքին անդամս առաջնոյն փոխանակ միմեանց դրոշմիցես,

7) դ : բ = գ : ա, եւ դարձեալ զարտաքին անդամս երկրորդին փոխանակ միմեանց դնելով,

8) դ : գ = բ : ա,

Իսկ եթէ առանց վրիպելոյ իցեն համեմատութիւնքս, եւ առանց զօրութեան համեմատութեանն շրջելոյ, յայտ անտի է, զի յամենայն համեմատութիւնս, արդիւնք արտաքին անդամոցն հաւասար են արդեանց ներքին անդամոց զայս օրինակ ադ = բգ, զոր յառաջին համեմատութեան անդ ճշմարիտ համարեցաք:

321. Ա.) Դիցուք գրեսցուք եթէ ա : բ = գ : դ = ... իցէ: Ի 310 համարոյ յառաջ գայ, եթէ

(ա ± գ) : (բ ± դ) = ա : բ = գ : դ = ...

այս ինքն, Եթէ յամենայն համեմատութիւնս բովանդակութիւն կամ այլակերպութիւն առաջնորդացն, այնպէս իմն կշռի առ բովանդակութիւն կամ այլակերպութիւն յաջորդացն, որպէս մի մի առաջնորդ առ իւր յաջորդն կշռիցի:

Մարթ է այսու կանոնիւ, յորժամ երկու անծանօթ չափք, միմեանց հակառակ նշանօք յերկուս

կշռութիւնս համեմատութեան գտանիցին զմին յան-
ծանօթիցն ջնջել եղծանել: Զոր օրինակ ի համե-
մատութեանս $6\div 5-\dagger=7\div 8+\dagger$, այսպէս վճարի
գործն,

$$(6+7)\div(5-\dagger+8+\dagger)=7\div 8+\dagger,$$ որ է

$$13\div 13=7\div 8+\dagger,$$ որ է $$\frac{13\cdot 7}{13}=8+\dagger,$$ յորմէ եւ

$$7=8+\dagger,$$ եւ $$\dagger=7-8=-1:$$

Ըստ նմին օրինակի եթէ անծանօթ անդամքն +
նշան ունիցին, զոր օրինակ

$$6\div 5+\dagger=7\div 8+\dagger,$$ քանզի

$$(6-7)\div(5+\dagger)-(8+\dagger)=6\div 5+\dagger$$

$$1\div 3=6\div 5+\dagger,$$ եւ

$$18=5+\dagger,$$ ուստի եւ $$18-5=\dagger:$$

Բ. Որովհետեւ

$$(\text{ա}+\text{գ})\div(\text{բ}+\text{դ})=\text{ա}\div\text{բ},$$ եւ

$$(\text{ա}-\text{գ})\div(\text{բ}-\text{դ})=\text{ա}\div\text{բ},$$ ուրեմն

$$(\text{ա}+\text{գ})\div(\text{բ}+\text{դ})=(\text{ա}-\text{գ})\div(\text{բ}-\text{դ}),$$

քանզի երկու կշռութիւնք որ հաւասար իցեն միւ-
սում ումեք, եւ միմեանց հաւասարք են: (∸. 12. Գ.)
Արդ ի համեմատութեանս $\text{ա}\div\text{բ}=\text{գ}\div\text{դ}$, կշռութիւն
բովանդակութեան առաջնորդացն եւ յաջորդաց,
համեմատին կշռութեան այլակերպութեան նոցին ա-
ռաջնորդացն եւ յաջորդաց:

Գ. Եթէ ի $\text{ա}\div\text{բ}=\text{գ}\div\text{դ}$ համեմատութեան
զներքին անդամսն փոփոխեսցես, լինիցի համեմատու-
թիւնն $\text{ա}\div\text{գ}=\text{բ}\div\text{դ}$, որ եւ ըստ ∸. 321. Ա.

$$\text{ա}\pm\text{բ}\div\text{գ}\pm\text{դ}=\text{ա}\div\text{գ}$$

որոյ իբրեւ միջին անդամքն փոփոխիցին, լինիցի
$\text{ա}\pm\text{բ}\div\text{ա}=\text{գ}\pm\text{դ}\div\text{գ}$ եւ կամ եթէ $\text{ա}\pm\text{բ}\div\text{գ}\pm\text{դ}=\text{բ}\div\text{դ}$,
որոյ իբրեւ միջին անդամքն փոփոխիցին, լինիցի

$$\text{ա}\pm\text{բ}\div\text{բ}=\text{գ}\pm\text{դ}\div\text{դ}$$

Արդ յամենայն համեմատութիւնս բովանդակու-
թիւն կամ այլակերպութիւն անդամոց միոյ ի կշռու-
թեանցն այնպէս իմն կշռի առ առաջնորդն կամ յա-

ջորդ նոյն կշռութեան, որպէս կշռիցի բովանդակութիւն կամ այլակերպութիւն միւսոյ կշռութեանն առ իւր առաջնորդն կամ յաջորդն:

Դ. Համարեսցուք եթէ $ա \div բ = գ \div դ$ իցէ. իբրեւ զներքին անդամն փոփոխիցես, լինիցի համեմատութիւնն $ա \div գ = բ \div դ$, որ է

$$ա + բ \div գ + դ = ա - բ \div գ - դ,$$

զորս իբրեւ զներքին անդամն փոփոխիցես, լինիցի

$$ա + բ \div ա - բ = գ + դ \div գ - դ$$

այս ինքն, եթէ, Բովանդակութիւն անդամոց կշռութեան, այնպէս իմն կշռի առ այլակերպութիւն անդամոց նորին իսկ կշռութեանն, որպէս ինչ կշռիցի բովանդակութիւն անդամոց միւսոյ կշռութեան առ այլակերպութիւն նոյն անդամոցն:

Ա, Բ, Գ, Դ օրինակքս փոփոխելոյ անդամոց համեմատութեան նպաստ քեզ լինիցին ըստ կամս անձին զանդամս համեմատութեանցն յազգիազգի կերպարանս շրջելոյ, որպիսի եւ իցեն համեմատութիւնքն, եւ եթէ այսուքիւք չփոփոխիցի զօրութիւն համեմատութեանց անտի իսկ յայտ է, զի քանեբորդ ամենայն կշռութեանցն է +:

322. Որովհետեւ ցուցիչ կշռութեանն չփոփոխի, յորժամ զերկոսին անդամսն եւս կշռութեանն միով չափով բազմացուցանիցես կամ ընդ մի եւ նոյն չափ բաժանիցես (Հ. 307.), աստուստին յառաջ գայ, եթէ եւ համեմատութիւնն $ա \div բ = գ \div դ$ չփոփոխիցի, եթէ ոք եւ զառաջնորդ եւ զյաջորդ կշռութեանցս որ ինչ եւ իցէ թուով բազմացուցանիցէ կամ ընդ մի եւ նոյն չափ բաժանիցէ: Արդ ըստ օրինացս այսոցիկ

$$ամ \div բմ = գ \div դ, \text{ եւ}$$

$$ա \div բ = \frac{գ}{ն} \div \frac{դ}{ն}, \text{ եւ եւս}$$

$$\frac{ամ}{ն} \div \frac{բմ}{ն} = գ \div դ ,$$

յորում մ եւ ն զանազան թիւս հնարաւորս յանդիման կացուցանեն:

323. Որովհետեւ ի $ա \div բ = գ \div դ$ համեմատութենէս ծագէ հաւասարութիւնս $ադ = բգ$, եւ ի սմանէ $\frac{ադմ}{ն} = \frac{բգմ}{ն}$ կամ $\frac{ամ}{ն} \times դ = բ \times \frac{գմ}{ն}$ եւ $\frac{ամ}{ն} \div բ = \frac{գմ}{ն} \div դ$,

ուրեմն. Չփոփոխի համեմատութիւնն, եթէ զառաջին եւ զերրորդ անդամն միով չափով բազմացուցանիցես եւ կամ ընդ մի եւ նոյն չափ բաժանիցես, զոր մարթ է եւ ի վերայ երկրորդ եւ չորրորդ անդամոյն իմանալ. եւ թէ այսուիկ չշրջիցի զօրութիւն համեմատութեան, անտի իսկ յայտ լինի, զի արդիւնք արտաքին եւ ներքին անդամոյն միմեանց հաւասարք են: Եւ նոյն սկզբամբ ցուցանի, եթէ համեմատութիւնն կայցէ մնայցէ հաստատուն, եթէ ոք զմի յարտաքին անդամոյն եւ զմի ի ներքին անդամոց միով չափով միանգամայն բազմացուցանիցէ կամ ընդ մի եւ նոյն չափ բաժանիցէ: Զոր օրինակ ի համեմատութեանս $ա \div բ = գ \div դ$, է

$$ամն \div բմզ = գնր \div դրզ, \text{ եւ}$$

$$\frac{ա}{մն} \div \frac{բ}{մզ} = \frac{գ}{նր} \div \frac{դ}{զր}:$$

324. Այս իսկ է բնութիւն համեմատութեան, որով դիւրագոյն կարիցեմք զկոտորս ինչ, որ ի համեմատութեան անդ պատահիցեն, ջնջել եղծանել. եւ փոխանակ նոցա զողջոյն թիւս դրոշմել, եւ զհամեմատութիւնն, որչափ ինչ հնար իցէ պարզել: Զոր օրինակ ի համեմատութեանս

$$7\frac{1}{5} \div 9\frac{1}{7} = 2\frac{1}{10} \div + \text{ որ է } \frac{36}{5} \div \frac{64}{7} = \frac{21}{10} \div +$$

յորժամ զերկոսին առաջնորդսն 10 թուով, եւ զերկոսին յաջորդսն 7 թուով բազմացուցանիցեմք, լինիցի համեմատութիւնն $72 \div 64 = 21 \div 7+$, եւ յորժամ զանդամս առաջին կշռութեանն ընդ 8 բաժանիցեմք եւ զանդամս երկրորդին ընդ 7, լինիցի համեմատութիւնն $9 \div 8 = 3 \div +$ կամ $3 \div 8 = 1 \div +$, եթէ զերկոսին առաջնորդս ընդ 3 բաժանիցես ։

Սոյնպէս կարիցեմք եւ զառնելման, որ յանդամս համեմատութեանն դիպիցին եղծանել, եւ ի միջոյ ի բաց բառնալ։ Որպէս թէ ի համեմատութեանս $մա \div նբ = գ \div դ$, եթէ կամիցիս զմ եւ զն առնելման որ ի միջի ա եւ բ անդամոցն դտանիցին՝ եղծանել, զառաջնորդս համեմատութեանն բաժանեա ընդ մ եւ զյաջորդսն ընդ ն, որով եւ լինիցի համեմատութիւնն

$$ա \div բ = \frac{գ}{մ} \div \frac{դ}{ն},$$

զորս եթէ զերրորդ եւ զչորրորդ անդամսն մն չափով բազմացուցանիցես, լինիցի $ա \div բ = գն \div դմ$,

Ապա ուրեմն ի համեմատութեան, առանց ինչ զօրութեան համեմատութեանն փոփոխելոյ, գոյ հնար զառնելիս միոյ յարտաքին անդամոցն ի մեւս արտաքին անդամն, եւ ի միոյ ի ներքին անդամոցն ի մեւս ներքին անդամն փոփոխել։ Զոր օրինակ,

$8ա \div 9բ = 12 \div 36$, առնէ

$$ա \div բ = \frac{12}{8} \div \frac{36}{9} = \frac{3}{2} \div 4 = 3 \div 8, \text{ կամ}$$

$$ա \div բ = 12 \times 9 \div 36 \times 8 = 3 \div 8$$

325. Եթէ քաներորդք կշռութեանց

$$ա \div բ = գ \div դ \text{ եւ } ե \div զ = է \div ը$$

համեմատութեանցս միմեանց հաւասարք + իցեն, յայնժամ եւ բովանդակութիւն եւ այլակերպութիւն համագգի անդամոց նոյնին համեմատութեամբ ընդ միմեանս կշռին, այս ինքն

$$(ա \pm ե) \div (բ \pm զ) = (գ \pm է) \div (դ \pm ը), \text{ որպ ցուցում}$$

փակի յ310: Զայն մարթ է եւ զբազում համեմատութեանց իմանալ:

326. Եթէ բազմացուցանիցէ ոք զանդամս համազգիս երկուց կամ բազում համեմատութեանց, արդիւնք իւրաքանչիւր անդամոց ի նմին համեմատութեան կան: Զոր օրինակ,

ա ÷ ատ = բ ÷ բտ
գ ÷ գր = դ ÷ դր
ե ÷ եց = զ ÷ զց
է ÷ էւ = ը ÷ ըւ

ագեէ ÷ ագեէ · տրցւ = բդզը ÷ բդզը · տրցւ

յորում երկուց կշռութեանց նոյն տրցւ քաներորդ է:

327. Համարեսցուք եթէ իցէ,

ա ÷ ց = բ ÷ գ
ց ÷ ւ = դ ÷ ե
ւ ÷ փ = զ ÷ է

ուստի ացւ ÷ ցւփ = բդզ ÷ գեէ
կամ ա ÷ փ = բդզ ÷ գեէ

այս ինքն, Եթէ իցեն բազում համեմատութիւնք, զորս ընդ միմեանս յօդել կամիցիս, եւ այնպէս իմն իցեն համեմատութիւնքն, որպէս զի յառաջին կշռութիւնս յաջորդն միոյ կշռութեան առաջնորդ լինել իցէ կշռութեանն համեմատութեան որ զհետ դայցէ, եւ այնպիսի իցէ կարգ կշռութեանցն մինչեւ ցյետին կշռութիւնն, յայսպիսի համեմատութիւնս առաջնորդն առաջին կշռութեան, եւ յաջորդն վերջին կշռութեան, այնպէս իմն կշռին ընդ միմեանս, որպէս կշռիցին արդիւնք առաջնորդաց եւ յաջորդաց երկրորդ կշռութեանց համեմատութեանցն:

Այսր ազգի համեմատութիւնք ա ÷ ց, ց ÷ ւ, ւ ÷ փ, . . անուանեալ կոչին Յօդուածոյ համեմատութիւնք, որոյ յօդուածոյ կշռութիւնն ացւ ÷ ցւփ, հաւասար է կշռութեան առաջին առաջնորդին եւ վերջին յաջորդին, այսինքն է ա ÷ փ:

328. Ի $ա \div բ = գ \div դ$ համեմատութենէս յառաջ գայ $\frac{բ}{ա} = \frac{դ}{գ}$, յորմէ եւ

$$\left(\frac{բ}{ա}\right)^{մ} = \left(\frac{դ}{գ}\right)^{մ} \text{ կամ } \frac{բ^{մ}}{ա^{մ}} = \frac{դ^{մ}}{գ^{մ}}$$

ուստի եւ $ա^{մ} \div բ^{մ} = գ^{մ} \div դ^{մ}$։ Այս ինքն եթէ չփոփոխի համեմատութիւնն, յորժամ զչորս անդամս համեմատութեան ի մի եւ ի նոյն կարողութիւն համբառնայցես։ Զնոյն ամին, եթէ $ա \div բ = գ \div դ$ իցէ, նոյն համեմատութիւն է եւ ի միջի

$$\sqrt[ն]{ա} \div \sqrt[ն]{բ} = \sqrt[ն]{գ} \div \sqrt[ն]{դ} \text{ չափուց, քանզի}$$

$$\frac{\sqrt[ն]{բ}}{\sqrt[ն]{ա}} = \frac{\sqrt[ն]{դ}}{\sqrt[ն]{գ}} \text{ կամ } \sqrt[ն]{\frac{բ}{ա}} = \sqrt[ն]{\frac{դ}{գ}}\text{։}$$

Ուստի եւ հասարակաց իմն օրինակաւ

$$\sqrt[ն]{ա^{մ}} \div \sqrt[ն]{բ^{մ}} = \sqrt[ն]{գ^{մ}} \div \sqrt[ն]{դ^{մ}},$$

յորում զ մ եւ զ ն մարթ է փոխանակ ողջոյն եւ կոտորեալ թուոց համարել եւ հաստատականաց եւ ուրացականաց։

329. Եթէ ըզ զանդամն համազգիս երկուց համեմատութեանցն ընդ միմեանս բաժանեսցէ, քանորդքն գործեն նոր եւս համեմատութիւն։

$$ա \div ա+ = բ \div բ+ \text{ եւ}$$
$$մ \div մպ = ն \div նպ, \text{ ուստի եւ}$$
$$\frac{ա}{մ} \div \frac{ա+}{մպ} = \frac{բ}{ն} \div \frac{բ+}{նպ}$$

Զոր օրինակ, դիցուք գրեսցուք թէ իցէ

$$4 \div 9 = 6 \div ժ+, \text{ եւ}$$
$$2 \div 3 = 1 \div +$$
$$\text{արդ } \frac{4}{2} \div \frac{9}{3} = 6 \div \frac{ժ+}{+}$$

330. Ա. Եթէ յաջորդքն միոյ համեմատութեան հաւասար իցեն առաջնորդաց այլոյ համեմա-

տութեան, մնացեալ առաջնորդքն եւ յաջորդք միմեանց համեմատականք են։ Զոր օրինակ,

$$\text{ա : բ = գ : դ}$$
$$\text{բ : մ = դ : ն,}$$
$$\overline{}$$
$$\text{արդ աբ : բմ = գդ : դն, կամ}$$
$$\text{ա : մ = գ : ն}$$

Բ. Եթէ երկուց համեմատութեանց առաջնորդքն կամ յաջորդքն միմեանց հաւասար իցեն, յայնժամ յառաջին դէպս յաջորդքն եւ յերկրորդումն առաջնորդքն գործեն միւս եւս ուղիղ համեմատութիւն։ Զոր օրինակ իցեն համեմատութիւնքս

$$\text{1. ա : բ = գ : դ}$$
$$\text{ա : մ = գ : ն իցեն,}$$

Արդ եթէ զկշռութիւնս առաջին համեմատութեան խոտորնակս իմն շրջիցես, ընդ նովաւ դրոշմիցես զերկրորդն լինիցի

$$\text{բ : ա = դ : գ}$$
$$\text{ա : մ = գ : ն}$$
$$\overline{}$$
$$\text{բ : մ = դ : ն}$$

Ըստ նմին օրինակի իցէ

$$\text{2. ա : բ = գ : դ}$$
$$\text{մ : բ = ն : դ}$$
$$\overline{}$$
$$\text{ա : մ = գ : ն}$$

եթէ կշռութիւնք երկրորդին շրջիցին։

Գ. Եթէ ներքին անդամքն համեմատութեան արտաքին անդամոց այլոյ իրիք համեմատութեան հաւասար իցեն, յայնժամ արտաքին անդամքն առաջին համեմատութեան ընդ ներքին անդամս միւս համեմատութեան խոտորնակս իմն համեմատին։

$$\text{ա : բ = գ : դ}$$
$$\text{բ : մ = ն : գ}$$
$$\overline{}\text{ ուստի եւ}$$
$$\text{ա : մ = ն : դ}$$

Դ. Եթէ երկուց համեմատութեանց արտաքին կամ ներքին անդամքն միմեանց հաւասարք իցեն, յայնժամ յառաջին դէպս ներքին անդամքն, իսկ յերկրորդումն արտաքին անդամքն խոտորնակս ընդ միմեանս համեմատին: Քանզի եթէ

$$\begin{array}{l} ա \div բ = գ \div դ, \text{ եւ} \\ ա \div ե = զ \div դ \\ \hline բ \div ե = զ \div գ \end{array} \quad \text{ուստի եւ}$$

Իսկ եթէ զայսր համեմատութեան զկշռութիւնսն շրջիցես, եւ ընդ առաջնոյն յօդիցես, ելանէ

$$\begin{array}{c} ա \div բ = գ \div դ \\ ե \div բ = գ \div զ \\ \hline ա \div ե = զ \div դ \end{array}$$

331. Եթէ կշռութիւն երկուց չափուց $= 0 \div 0$ իցէ, չէ մարթ ի վերայ հասանել, եթէ առաջին կշռութիւնն՝ կշռութիւն ինչ հաւասար իցէ, քանզի $0 \div 0$ կամ $\frac{0}{0}$ կարէ զամենայն չափս հնարաւորս ցուցանել: Զոր օրինակ կշռութիւնն $1 \div 1 = ա \div ա$ առնէ, $1 - 1 \div 1 = ա - ա \div ա$, կամ $1 - 1 \div ա - ա = 1 \div ա$ այս ինքն $0 \div 0 = 1 \div ա$ կամ $\frac{0}{0} = ա$: Եթէ $ք = ա$ դնիցեմք ի կշռութեանս

$$\frac{ք^2 - ա^2}{ք - ա}, \text{ լինիցի } \frac{ք^2 - ա^2}{ք - ա} = \frac{ա^2 - ա^2}{ա - ա} = \frac{0}{0}$$

Եւ քանզի

$$\frac{ա^2 - ա^2}{ա - ա} = \frac{(ա + ա)(ա - ա)}{ա - ա} = ա + ա = 2ա$$

ուրեմն $\frac{0}{0} = 2ա$:

Արդ եթէ զիարդ $\frac{0}{0}$ զամենայն հնարաւոր չափս յայտ առնիցէ, ցուցանիցէ բարձագոյն ուսողութիւն:

Հ Ա Տ Ա Ծ Գ

ՅԱՂԱԳՍ ԶՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԻՒՆՍ Ի ԿԻՐ ԱՐԿԱՆԵԼՈՅ

ՅԻՐԱՒԻ եւ յարժանի Ոգի մաթեմատիկեան ճարտարութեան կոչեցին ուսողք զուսումն համեմատութեան, քանզի օգուտն, եւ մեծաշահ շահն՝ որ ի նմանէն է ընդ ամենայն մասունս ուսողութեանն ձգեալ տարածանի: Նա եւ թէ որչափ օգտակար եւ շահաւէտ իցէ զհամեմատութիւն ի քաղաքային իրս ի կիր արկանել, մօտաւոր ճառս յայտ արարեալ ցուցանիցէ:

Այսուհետեւ զհամեմատութիւնն ա ÷ բ = գ ÷ դ դիւրագոյնս եւս զայս օրինակ նշանակեմք ա : բ = գ : դ:

332. Ուսումն համեմատութեան ի կիր արկանի յայնպիսի ինչ դէպս, որ նշանակօք թուոց նշանակիցին: Արդ զի համեմատութիւն ինչ լինիցի, պարտ եւ պատշաճ է կշռութեան երկուց իրաց համազգեաց հաւասար լինել կշռութեան այլոց երկուց իրաց համազգեաց:

Դիցուք գրեսցուք. Եթէ գինք վաճառոց 3 լոտերց 7 դահեկանք իցեն, որչափ ինչ իցեն գինք վաճառոց 8 լոտերց, եւ վաճառքն ի նմին իսկ ազգէ իցեն: Տեսանեմս եթէ զկարգ վաճառքն 3 եւ 8 լոտերց, եւ նոցա գինքն ընդ միմեանս կշռիցին, յորս քանեբորդն երկուց իրաց համազգեաց, այլոց երկուց համազգի իրաց քանեբորդին հաւասարք են, եւ իրքն որ յերկոսին անդամս հաւասարութեանն գտանիցին, այս ինքն վաճառքն եւ դահեկանք օտարազգիք են:

Արդ իբրեւ զանդամս համեմատութեան կամիցիս ի շարի հարկանել, պարտ եւ պատշաճ է զանծանօթ անդամն + յառաջին անդամ համեմատութեան կարգել, յետ այնորիկ զայն որ նմին իսկ անծանօթին համազգի իցէ: Նա ապա հայել եւ իմանալ յառաջագոյն եթէ + անծանօթ անդամն մեծ դիպիցի արդեւք եթէ փոքր քան զիւր համազգի անդամն, որ յերկրորդում տեղւոջն կայ, եւ կամ եթէ կշռութիւնն աճեցող իցէ արդեւք եթէ նուազող, որում մարթ է ի համեմատաց խնդրոյն ի վերայ հասանել: Ըստ աճեցող կամ նուազող լինելոյ կշռութեանն պարտ է զերկրորդ կշռութիւնն այլոց երկուց համազգեաց առաջի նշանի հաւասարութեան աճեցող կամ նուազող կարգել: Արդ օրինակն զոր վերագոյն յիշատակեցաք է

+:7դահ=8լտ:3լտ,

քանզի ի համեմատաց իսկ խնդրոյն յայտ է, եթէ + մեծ դիպիցի քան զ7 դահեկանս, ուստի եւ +:7 կշռութիւն նուազող է:

333. Յորժամ ի համեմատութեան մին յարտաքին անդամոյն, եւ մի ի ներքին անդամոց ունիցին հաղորդութիւն ընդ միմեանս, անուանեալ կոչի համեմատութիւնն Ուղիղ: Իսկ եթէ արտաքին անդամքն եւ կամ ներքին անդամքն ընդ միմեանս կցորդութիւն ունիցին, յորջորջի համեմատութիւնն Խոտորնակ:

Զոր օրինակ բաժանելիք եւ բաժանարարք երկուց հաւասար քանորդաց կամ համարիչք եւ անուանիչք երկուց հաւասար կոտորոց, ուղիղ համեմատութեամբ ընդ միմեանս համեմատին. իսկ առնելիք երկուց հաւասար արդեանց խոտորնակս: Որպէս ինչ $\frac{24}{3}=8$ եւ $\frac{40}{5}=8$ են. արդ $3:24=5:40$ եւ (∸·320,) $3:5=24:40$, յորմէ յայտ է, եթէ զոր օրինակ բաժանարարքն ընդ միմեանս համեմատիցին, նոյնգունակ կշռին ընդ միմեանս եւ բաժանելիքն: Իսկ $4\cdot 9 = 3\cdot 12$ է $4:3=12:9$, յորում մին յառնելեաց առաջնոյն այնպէս կշռի ընդ մին յառնելեաց երկրորդին, որպէս համեմատիցի միւս առնելին երկրորդին ընդ միւս առնելին առաջնոյն:

334. Յորժամ հաւասար իցէ ժամանակն, գործքն ուղիղ համեմատութեամբ ընդ իւրեանց պատճառսն համեմատին. ըստ նմին օրինակի եթէ հաւասար պատճառք իցեն, ուղիղ համեմատութիւն է ի մէջ գործոց եւ ժամանակաց. այլ սակայն ամէն հակառակ յորժամ հաւասար իցեն գործքն, պատճառքն ընդ ժամանակին խոտորնակս իմն համեմատին:

Համարեսցուք եթէ Գ. եւ գ գործքն իցեն, իսկ Պ եւ պ պատճառքն, եւ Ժ. եւ ժ ժամանակքն: Արդ եթէ Ժ.=ժ իցէ, յայտ լինի եթէ գործքն համեմատ իցեն ընդ իւրեանց պատճառս, որպէս զի եթէ մեծ իցէ պատճառն, պարտ է եւ մեծ լինել գործոյն, եւ եթէ փոքր իցէ պատճառն, պարտ եւ պատշաճ է փոքր լինել արդեանց իւրոցն, զայս ձեւ օրինակի

Գ. : գ = Պ : պ
>   >
<   <

քանզի չորս արք առաւել գործ իցեն ի հաւասար ժամանակի քան զերկուս արս:

Սմին հանգոյն եթէ Պ = պ իցէ, պարտ է զի եւ

Գ. : գ = Ժ. : ժ լինիցի,
>   >
<   <

քանզի պարտ է այնչափ ինչ բազում լինել արդեանց իւրոցն, որչափ ինչ երկայնաձիգ ժամանակն իցէ:

Այլ եթէ Գ.=գ իցէ, յայնժամ

Պ : պ = ժ : Ժ.,
>   >
<   <

քանզի որ սակաւն իցէ, վասն զհաւասար գործսն գործելոյ երկայն ժամանակաց կարօտ է:

335. Գործքն ուղիղ յօղուածոյ համեմատութեամբ համեմատին ընդ պատճառս եւ ընդ ժամանակս. իսկ պատճառքն յօղուածոյ ուղիղ համեմատութեամբ ընդ գործս՝ եւ ընդ ժամանակս խոտորնակ համեմատութեամբ. իսկ ժամանակքն յօղուածոյ ուղիղ համեմատութեամբ ընդ գործս՝ եւ ընդ պատճառս խոտորնակ համեմատութեամբ:

Համարեսցուք եթէ զԳ. գործն Պ պատճառն կատարիցէ ի Ժ. ժամանակի, իսկ զգործ փ, պ պատճառն ի ճ ժամանակի։ Աստանօր յայտ է եթէ Պ պատճառն ի ճ ժամանակի պարտ է այլ իմն գործ գործել, որոյ մեծութիւն այլակերպ իցէ ի մեծութենէ Գ. եւ փ գործոյն. արդ դիցուք եթէ այս գործ իցէ գ։ Ուրեմն Գ.:գ=Ժ.:ճ, քանզի հաւասար են պատճառքն (Հ. 334.)։ Աստանօր յայտ է, եթէ այլ եւ այլ պատճառքն ի ճ ժամանակի գ եւ փ այլ եւ այլ գործս գործիցեն, ուստի եւ գ:փ=Պ:պ քանզի հաւասար են ժամանակքն (Հ. 334.)։ Արդ ուրեմն

$$\text{Գ.}:\text{գ}=\text{Ժ.}:\text{ճ}$$
$$\text{գ}:\text{փ}=\text{Պ}:\text{պ}$$
$$\overline{\text{Գ.}:\text{փ}=\text{Ժ.Պ}:\text{ճպ}}$$

յորում Ժ.Պ:ճպ, յօդեալ է ի Ժ.:ճ եւ Պ:պ կշռութեանց ժամանակացն եւ պատճառաց։

Նաեւ քանզի Գ.ճպ=փԺ.Պ, ուստի եւ պ×Գ.ճ=Պ×փԺ., ուստի եւ

$$\text{Պ}:\text{պ}=\text{Գ.ճ}:\text{փԺ.},$$

յորում Գ.ճ:փԺ. երկրորդ կշռութիւնն ի Գ.:փ եւ ի ճ:Ժ. կշռութեանց կազմեալ է, եւ զի խոտորնակս շրջեալ է ճ:Ժ., վասն այնորիկ եւ խոտորնակս իմն ընդ Պ:պ պատճառացն համեմատեալ։

Դարձեալ քանզի Գ.ճպ=փԺ.Պ, ուստի եւ ճ×Գ.պ =Ժ.×փՊ, յորմէ եւ

$$\text{Ժ.}:\text{ճ}=\text{Գ.պ}:\text{փՊ},$$

յորում երկրորդ կշռութիւնն յօդեալ է ի Գ.:փ եւ ի պ:Պ կշռութեանց, որք խոտորնակս իմն ընդ Ժ.:ճ ժամանակսն համեմատին։

Ի գիրս ուսմանց յօդուածոյ ուղիղ համեմատութիւնն զայս օրինակ նշանակի Գ.::ՊԺ., որ նշանակէ եթէ առաջին չափն ուղիղ համեմատութեամբ համեմատի ընդ ՊԺ. երկուս չափս։ Իսկ օրինակ խոտորնակ համեմատութեան է Պ::$\frac{\text{Գ.}}{\text{Ժ.}}$, եւ Ժ.::$\frac{\text{Գ.}}{\text{Պ}}$, որ յայտ աբարեալ նշանակէ, եթէ առաջին չափքն ուղիղ համեմատութեամբ ընդ համարիչս, եւ խոտորնակս ընդ անուանիչս կատարոցն համեմատիցին։

336. Երից կանոն, որ վասն օգտի եւ ազնուութեանն Ոսկեղէն կանոնն կոչեցաւ, այն է, յորում երկրաչափական համեմատութիւն ի կիր արկանի, ի գտանել զհաշիւս, որ մարդկեղէն կենացն պիտոյ իցէ, որ եւ ըստ բազմութեան համեմատութեանցն, որ ի նմին գտանիցին, անուանեալ կոչի Ոսկեղէն կանոն Պարզ կամ Յօդուածոյ։

337. Անդամք պարզ երից կանոնին կարգին ըստ 332 համարոյ, անծանօթ անդամն յառաջին անդամ, յետ այնորիկ այն՝ որ նմին համազգի իցէ. եւ ապա ըստ աճեցող եւ նուազող լինելոյ կշռութեանն համազգի անդամոցն այնոցիկ՝ երկրորդ անդամն։ Իբրեւ այսպէս կարգիցին անդամք համեմատութեանն, բազմացո զներքին անդամսն, եւ զարդիւնսն բաժանեա ընդ արտաքին ծանուցեալ անդամն եւ քանորդն որ ելանէ, է չծանուցեալ անդամն զոր խնդրես։ Այս կանոն ի կիր արկանի, թէպէտ ուղիղ թէպէտ խոտորնակ իցէ համեմատութիւնն։ Զոր օրինակ,

Ա. Որչափ ինչ իցէ գլուխն 230 դահեկանաց, եթէ 100 դահեկանաց շահն 4 իցէ։ Արդ պարտ է զ+ զանծանօթ գլուխն դնել ի շարի, եւ ապա յետ այնորիկ զ 100 դահեկան գլուխն, որ համազգի է ընդ + չափոյն. այս ինքն է

+:100,

եւ քանզի ի հանդամանաց խնդրոյն յայտ է, եթէ + գլուխն մեծ քան զ 100 լինելոց է, վասն այնորիկ զերկրորդ կշռութիւն շահուցն նուազող կարգեա, զայս ձեւ օրինակի

+:100=230:4,

Արդ այս է ուղիղ համեմատութիւն, զի + հաղորդութիւն ունի ընդ 230 ներքին անդամոյն, եւ 100 ընդ 4 արտաքին անդամոյն։ Արդ

$$+=\frac{230\cdot100}{4}=5750$$

Բ. Եթէ արք 8 զգործ ինչ ի 5 աւուրս կատարիցեն, քանի ինչ արանց պէտք իցեն վասն զնոյն գործ յ3 աւուրս կատարելոյ: Զանծանօթ թիւ մարդկանն յառաջին անգամ կարգեա, եւ ապա զայն որ այնմ համազգի իցէ, որպէս,

$$+:8,$$

եւ քանզի ի հանգամանաց խնդրոյն յայտ է, եթէ առաւել լինելոց է + քան զ8. վասն այսորիկ,

$$+:8=5:3,$$

խոտորնակ է համեմատութիւնն, զի + ընդ 3 ունի կցորդութիւն եւ 8 ընդ 5, եւ դարձեալ ի լինել հաւասար գործոյ, պատճառն ընդ ժամանակին խոտորնակս իմն համեմատի: Արդ

$$+=\frac{8\cdot5}{3}=13\frac{1}{3}\text{ արք:}$$

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. Խնդիր: Եթէ գինք 40 կանգնուն ասուոյ 460 դահեկանք գերմանացւոց իցեն, որչափ ինչ իցէ գինն $3\frac{1}{3}$ կանգնոյ:

Պատրաստութիւն: $+:460$ դահեկան գերմ:

$$3\frac{1}{3}:\ 40\text{ կանգունք:}$$

Հաշիւ: $+:460=3\frac{1}{3}:40$

$$+:115=1:3$$

$$+=\frac{115}{3}=38\frac{1}{3}$$

Պատասխանի: $38\frac{1}{3}$ դահ. որ է$=38$ դահ. եւ 20 նուքարակիտք:

Բ․ Խնդիր։ Սուրհանդակ ոմն աւուր աւուր 5 մղոն ճանապարհ արարեալ ի 14 աւուրս ի դէմ եղեալ տեղին հասանէ. արդ ի քանի՞ ինչ աւուրս արդեւք դարձցի յետս սուրհանդակս, եթէ ընդ նոյն ճանապարհ ընդ որ եկն՝ օր ըստ օրէ 8 մղոնս գնասցէ։

Պատրաստութիւն։ $+ : 14$ աւուրք,

$5 : 8$ մղոնք։

Լուծու։ $+ : 14 = 5 : 8$

$$+ = \frac{14 \cdot 5}{8} = 8\frac{3}{4},$$

Պատասխանի։ Յ $8\frac{3}{4}$ աւուրս, այս ինքն յ8 աւուրս եւ յ18 ժամս։

Գ․ Խնդիր։ Եթէ ի պաշար 270 զինուորաց վասն այսչափ ժամանակաց 1260 քոռ ցորենոյ պէտք իցեն, քանի ինչ քոռս ցորենոյ պարտ իցէ պատրաստել վասն 2880 զինուորաց ի նոյնչափ ժամանակի։

Պատրաստութիւն։ $+ : 1260$ քոռ ցորենոյ.

$270 : 2880$ զինուորք,

Լուծու։ $+ : 1260 = 2880 : 270$

$+ : \ 420 = \ 32 \ : 1$

$+ = 420 \times 32 = \ 13440$

Պատասխանի։ 13440 քոռ ցորենոյ։

Դ․ Խնդիր։ Եթէ վասն պարեգօտի միոյ 4 կանգուն $\frac{7}{4}$ լայնութեամբ ասուեայ պէտք իցեն, քանի՞ ինչ կանգուն ասուեայ պէտք իցեն յայնպիսի ինչ ասուոյ՝ որոյ լայնութիւն իցէ $\frac{9}{4}$։

Պատրաստութիւն	Լուծու
$+ : 4$ կանգուն.	$+ : 4 = \frac{7}{4} : \frac{9}{4}$
$\frac{7}{4} : \frac{9}{4}$ լայնութիւն	$+ : 4 = 7 : 9$
	$+ = \frac{4 \cdot 7}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$

Պատասխանի։ $3\frac{1}{9}$ կանգնոյ։

Ե. Խնդիր. Զինուորք 360 ունին պաշար բաւական վասն 6 ամսոյ. արդ կամիմք ի վերայ հասանել, եթէ նոյն համբարն, որչափ ինչ ժամանակաց բաւական իցէ, եթէ 880 զինուորք լինիցին։

Պատրաստութիւն	Հաշիւ
$\dagger:6$ ամիս	$\dagger:6=360:880$
$360:880$ զինուորք	$\dagger:3=9:11$
	$\dagger=\frac{3\cdot 9}{11}=\frac{27}{11}=2\frac{5}{11}$

Պատասխանի։ 2 ամսոյ, եւ 13 աւուրց։

Զ. Խնդիր. Եթէ յայսնիշ ջրոյ, որ մի օրինակ հոսիցէ, յ 7 վայրկեանս $5\frac{2}{3}$ շեշք լնուցուն, որչափ ինչ ժամանակաց կարօտիցի դք ի լնուլ ղանօթն, որոյ մեծութիւն իցէ 37 շեշ ջրոյ։

Պատրաստութիւն	Հաշիւ
$\dagger:7$ վայրկեան,	$\dagger:7=37:5\frac{2}{3}$
$37:5\frac{2}{3}$ շեշ	$\dagger:21=37:17$
	$\dagger=\frac{37\cdot 21}{17}=45\frac{12}{17}$

Պատասխանի։ $45\frac{12}{17}$ վայրկենից։

Է. Խնդիր։ Որչափ ինչ շահս բերցեն ի միում ամի 3635 դահեկանք, 5 շահիւք, այս ինքն եթէ 100 դահեկանք բերցեն 5 դահեկանս։

Պատրաստութիւն	Հաշիւ
$\dagger:5$ շահ	$\dagger:5=3635:100$
$3635:100$ դլուխ	$\dagger=\frac{3635}{20}=181,75$

Պատասխանի։ 181,75 դահեկանս։

Ը. Խնդիր։ Որչափ ինչ պարտ է լինել դլուխն, զի ի միում ամի $2\frac{1}{2}$ շահու 650 դահեկանս շահեսցի։

Պատրաստութիւն	Հաշիւ
ք:100 դահեկան,	$ք:100=650:2\frac{1}{2}$
$650:2\frac{1}{2}$ շահ։	$ք:100=260:1$
	$ք=260\cdot100$

Պատասխանի։ 26000 դահեկան դլուխ։

Թ. Խնդիր։ Վայր կամ հեռաւորութիւն մարմնոց, որ անարգել եւ անխափան անկանիցին, համեմատի ընդ երկրորդ կարողութեան ժամանակաց անկանելոյ։ (Օրէնքս որ վասն անկանելոյ մարմնոց, ի փիլսոփայութեան դիպիցի) ։ Արդ,

Եթէ մարմին մի անարգել եւ անխափան անկեալ ի միում երկրորդական վայրկենի 15,597 ոտս ի խոր անկանիցի. յորչափ ինչ ժամանակի անկանիցի մարմին ինչ յ75 ձող բարձրութենէ։

Եթէ դրոշմիցեմք զհեռաւորութիւնն կամ զմիջոց վայրացն Ճ եւ Հ նշանագրովք, եւ զժամանակսն որ նոցա կշռեսցին ժ եւ Ժ. նշանագրովք, լինի համեմատութիւնն

$$Ժ.^2 : ժ^2 = Հ : Ճ ։$$

Իսկ քանզի $Ժ.=ք$, $ժ=1^{ր}$, $Հ=75^{o}$, եւ $15^{ն}.597=Ճ$, ուրեմն

$$ք^2 : 1^{ր} = 75^{o} : 15^{ն}597 \text{, կամ}$$
$$ք^2 : 1^{ր} = 75^{o} : 2^{o}.595 \text{, կամ}$$
$$ք : 1^{ր} = \sqrt{75} : \sqrt{2,5995} \text{, ուստի եւ}$$
$$ք = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{2,5995}} = \frac{8,660254\cdots}{1,612296\cdots} = 5^{ր}.371\cdots$$

338. Բազում անգամ այնպիսի իմն դէպք դիպին, զի ոչ պատճառ ինչ եւ ոչ գործք եւ ոչ իսկ ժամանակ է

համեմատութեանն գտանիցի, որպիսի ինչ են համեմատութիւնք չափուց եւ կշռոց եւ այլոց ինչ նոյնպիսի իրաց: Զոր օրինակ. Մի ոտն Վիէննացւոց համեմատի ընդ մի ոտն Բաւիէրացւոց, որպէս համեմատիցի 27243 ընդ 25809. յորում ոչ այլ ինչ յայտ առնեն բանքս, եթէ ոչ, զի 27243 հաւասար մասունք գտանին ի մի ոտն Վիէննացւոց, յորոց մասանց 25809 մասունքն գտանին ի մի ոտն Բաւիէրացւոց, եւ եթէ 1 ոտն Վիէննացւոց $>$ 1 ոտն Բաւ.: Արդ համարեացուք եթէ կամք իցեն մեզ գիտել եթէ որչափ ինչ իցէ բարձրութիւն ապարանից, որ 360 ոտս Բաւիէրացւոց բարձր իցէ: Որովհետեւ չգիտեմք եթէ զի՞նչ իցէ երկայնութիւն ոտին Բաւիէրացւոց, վասն այնորիկ պարտ եւ պատշաճ է մեզ զայն յոտս Վիէննացւոց շրջել: Իսկ քանզի յորժամ զ360 ոտս Բաւիէրացւոցն բազմացուցանիցեմք այնչափ մասամբք, զոր մի ոտն Բաւիէրացւոց ի Վիէննացւոց ոտից ունիցի, արդիւնքն հաւասար ելանիցէ արդեանց ինչ որոյ մին յառնելեացն ողջոյն մասունքն միոյ ոտին Վիէննացւոց իցէ եւ միւսն անծանօթ ոտքն Վիէննացւոց, $(360 \times 25809 = + 27243)$, աստանօր յայտ է եթէ յերկուց հաւասար արդեանց մարթեմք զհամեմատութիւնն կազմել, յորժամ զանծանօթ առնելին յառաջին անդամ կարգիցեմք եւ յետ այնորիկ զնմին համազգի ոտս Բաւիէրացւոցն 360, եւ ապա ըստ նուազօղ եւ աճեցօղ լինելոյ կշռութեանն զերկրորդ կշռութիւնն դրոշմիցեմք, զայս ձեւ օրինակի

$$+ : 360 = 25809 : 27243$$

զոր եւ մարթ է ըստ ∸. 320 զայս օրինակ կարգել

$$+ : 25809 = 360 : 27243$$

ուստի եւ

$$+ = \frac{25809 \cdot 360}{27243} = 341\frac{1377}{27243} = 341\frac{153}{3027}$$ ոտք Վիէն.

Ըստ սմին օրինակի եթէ իցէ ծանուցեալ, եթէ Ոտն Պարիսու համեմատի ընդ ոտին Վիէննացւոց, որպէս համեմատիցի 1,02764:1, դիւրաւ մարթ է գտանել զխնդիրն, եթէ 237 ոտք Պարիսու քանի ոտս Վիէննացւոց գործիցեն: Արդ

$$+:237=1,02764:1$$
$$+=237\times1,02764=243,55068 \text{ կամ}$$
$$+=243^{Ա}+6^{Բ}+7^{Գ}+3^{Դ}+6^{Ե}+10^{Զ}+9^{Է}+\cdots$$

339. Զանդամս յօդուածոյ համեմատութեան պարտ է զայս օրինակ կարգել: Զանծանօթ չափն յառաջին անդամ կարգեա, իսկ յերկրորդումն զայն՝ որ նմին համազգի իցէ: Յետ այնորիկ ըստ աճեցող եւ ըստ նուազող լինելոյ կշռութեանս, պարտ եւ պատշաճ է զայլ համազգի իրաց կշռութիւնս աճեցողս կամ նուազողս ընդ միմեամբք կարգել: Ապա բազմացո միմեամբք զկշռութիւնսն, զոր ընդ միմեամբք կարգեցեր, զառաջնորդս նոյա միմեամբք եւ զյաջորդսն միմեամբք. արդիւնք առաջնորդացն լինիցի երրորդ անդամ կամ առաջնորդ երկրորդ կշռութեան համեմատութեան, իսկ արդիւնք յաջորդաց չորրորդ անդամ կամ յաջորդ երկրորդ կշռութեան համեմատութեան: Յետ զայս օրինակ զիրսն վճարելոյ, կարիցես ըստ օրինակի պարզ համեմատութեանց զանծանօթ + անդամն գտանել:

Որպիսի ինչ. Եթէ արք 5, ի 4 շաբաթս, 5 աւուրս ի շաբաթու եւ աւուր աւուր 8 ժամս վաստակեալ, կանգնել կարիցեն զորմն ինչ, որոյ 8^0 երկայնութիւն իցէ եւ 2^0 բարձրութիւն, եւ $\frac{1}{2}^0$ թանձրութիւն. կամիմք գիտել, եթէ քանի ինչ արանց պէտք իցեն ի կանգնել զայլ որմն, որոյ երկայնութիւն իցէ 6^0, բարձրութիւն 1^0, եւ թանձրութիւն $\frac{1}{4}$ ձող, վաստակեալ յայն՝ 3 շաբաթս, 6 աւուրս ի շաբաթու գործելով, եւ աւուր աւուր 10 ժամս: Արդ պարտ է զայս օրինակ կարգել

$$+:5=\begin{cases} 6:8 & \text{Երկայնութիւն.} \\ 1:2 & \text{Բարձրութիւն.} \\ \frac{1}{4}:\frac{1}{2} & \text{Թանձրութիւն.} \\ 4:3 & \text{Շաբաթ.} \\ 5:6 & \text{Օր.} \\ 8:10 & \text{Ժամ.} \end{cases}$$

յորում, որպէս տեսցուք + առաջին անդամ կարգեալ է, եւ ապա զկնի 5 արքն: Արդ զի իբրեւ զ +:5 կշռութիւնն ի կշիռ համեմատութեան բերիցեմք ընդ երկայնութիւնն, գտանեմք եթէ սակաւ արանց պէտք իցեն, վասն այնորիկ պարտ է եւ զերկայնութիւնն աճեցողս կարգել զայս օրինակ, 6:8. Նոյնպէս եւ զբարձրութիւնն 1:2, եւ զթանձրութիւնն $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$:

Այլ իբրեւ զայն ընդ ժամանակս համեմատիցեմք գտանեմք եթէ նուազօղ է կշռութիւնն վասն այնորիկ պարտ է զշաբաթն նուազօղս կարգել զայս ձեւ օրինակի 4:3, իսկ աւուրքն եւ ժամանակքն աճեցողք են, վասն այսորիկ եւ 5:6 եւ 8:10: Արդ յաստացելոցս աստի յառաջ գայ եթէ

$$+=\frac{5\times6\times1\times\frac{1}{4}\times4\times5\times8}{8\times2\times\frac{1}{2}\times3\times6\times10}=\frac{5\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times3}=\frac{5}{6}$$

այս ինքն մարթ է այր մի եւ սակաւ եւս աշխատ լինելով զայն գործ կատարել:

340. Դարձեալ մարթ է ի կշռութեանց զոյգ համազգի իրաց միով պակաս համեմատութիւնս յօրինելով կարգել, զոր օրինակաւս յանդիման կացուսցուք:

Եթէ զփոս ինչ, որոյ 28^0 երկայնութիւն իցէ, եւ 2^0 լայնութիւն, $\frac{2^0}{3}$ խորութիւն, 120 արք ի 6 շաբաթս, 6 աւուրս ի շաբաթու գործելով, եւ աւուր

աւուր 10 ժամս, կարիցեն ի գլուխ հանել. որչափ ինչ արանց պէտք իցեն, ի հատանել զփոս ինչ, որոյ 148^0 երկայնութիւն, $\frac{3^0}{2}$ լայնութիւն, $\frac{3^0}{4}$ խորութիւն իցէ, եւ կամք իցեն կատարել զայն յ18 շաբաթս, 5 աւուրս վաստակելով, եւ աւուր աւուր 12 ժամս: Ի սոյն կարիցեմք յաւելուլ եւ զդժուարութիւն վայրացն որ յառաջինն 3 աստիճան իցէ, եւ յերկրորդումն 7:

Արդ անծանօթ թիւ մարդկան այնպէս իմն համեմատի ընդ 120 արս, որպէս համեմատիցին երկայնութիւնքն ընդ միմեանս: Եւ քանզի յայտ է ի բնութենէ իսկ խնդրոյն, եթէ $\text{ա}:120$ նուազօղ է, քանզի բազում արանց աւելի քան զ120 պէտք են, վասն այսորիկ լինիցի համեմատութիւնն

$$\text{ա}:120=148^0:28^0 \text{ երկայնութիւն:}$$

Դարձեալ, եթէ ի հատանել զփոս ինչ որոյ լայնութիւն 2^0 իցէ, ա արանց պէտք իցեն, որչափ ինչ արանց կարօտիցի, որ կամիցի զփոս ինչ հատանել, որոյ $\frac{3^0}{2}$ լայնութիւն իցէ. դիցուք եթէ բ արանց, արդ

$$\text{բ}:\text{ա}=\frac{3^0}{2}:2^0 \text{ լայնութիւն,}$$

Զայս օրինակ յառաջ խաղան ամենայն համեմատութիւնքն, որք յայտ յանդիման երեւին, եթէ ուղիղ իցեն, եթէ խոտորնակ: Յորոց կարգաւ ելանեն համեմատութիւնքս զայս ձեւ

$$\begin{aligned}
\text{ա}&:120=148:28\\
\text{բ}&:\text{ա}=\tfrac{3}{2}:2\\
\text{գ}&:\text{բ}=\tfrac{3}{4}:\tfrac{3}{2}\\
\text{դ}&:\text{գ}=6:18\\
\text{ե}&:\text{դ}=6:5\\
\text{զ}&:\text{ե}=10:12\\
\text{է}&:\text{զ}=7:3
\end{aligned}$$

Արդ բազմացո միմեամբք զառաջնորդս եւ զյաջորդս երկոցունց կշռութեանց համեմատութեանցն, եւ յարդեանցն կազմիցի մեւս եւս համեմատութիւն

$$\text{–բէդեւղ}+ : 120\text{–բէդեւղ} = 148 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 7 : 28 \times 2 \times \frac{3}{2} \times 18 \times 5 \times 12 \times 3$$

Այլ չէ ինչ հարկ զառաջնորդս եւ զյաջորդս առաջին կշռութեանց համեմատութեանցն միմեամբք բազմացուցանել, քանզի իբրեւ եղծանիցես զնոյն նշանագիրս որ յառաջնորդս եւ ի յաջորդս գտանիցին, ծագիցէ կշռութիւն պարզ, որոյ առաջնորդ իցէ առաջնորդն յետին կշռութեանն, եւ յաջորդ՝ յաջորդն առաջին կշռութեան, որով շրջիցի բովանդակ համեմատութիւնն յայն՝ զորմէ ասացաք ի ∴. 339։ Զոր օրինակ,

$$+ : 120 = \begin{cases} 148 : 28 \\ \frac{3}{2} : 2 \\ \frac{3}{4} : \frac{3}{2} \\ 6 : 18 \\ 6 : 5 \\ 10 : 12 \\ 7 : 3 \end{cases}$$

ուստի եւ

$$+ = \frac{120 \times 148 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times 6 \times 6 \times 10 \times 7}{28 \times 2 \times \frac{3}{2} \times 18 \times 5 \times 12 \times 3} = 185$$

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր. Եթէ վարձք առն կառավարի, որ տանիցի զ 50 քանքար բեռն ընդ 30 մղոն ճանապարհ, 80 դահեկանք իցեն, քանի՞ ինչ իցեն վարձք նորա, յորժամ տանիցի զ60 քանքար ծանրութիւն ի տեղի ինչ, որ 40 մղոնաւ հեռի իցէ։

$$+ : 80 = \begin{cases} 60 : 50 \\ 45 : 30 \end{cases}$$

$$+ = \frac{80 \times 60 \times 45}{30 \times 50} = 8 \times 2 \times 9 = 144$$

Պատասխանի։ 144 դահեկանք։

Բ. Խնդիր. Այր ոմն որմաշէն պէտս ունի 5184 թրծուն աղիւսոց առ ի կանգնել զորմն, որոյ 6^{0} երկայնութիւն է, 8^{c} բարձրութիւն, եւ $1\frac{1^{c}}{2}$ լայնութիւն. արդ որչափ ինչ աղիւսոյ պէտս ունիցի այլ այր որմաշէն, որ հանդերձեալ իցէ կանգնել որմն, որոյ $8\frac{1^{0}}{3}$ երկայնութիւն, 2^{c} լայնութիւն, եւ 6^{c} բարձրութիւն իցէ։

$$+ : 5184 = \begin{cases} 8\frac{1^{0}}{3} : 6^{0} \\ 6^{c} : 8^{c} \\ 2^{c} : 1\frac{1^{c}}{2} \end{cases}$$

$$+ = \frac{5184 \times 8\frac{1}{3} \times 2}{8 \times 1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{25}{3} \cdot 2 \cdot 5184}{8 \cdot \frac{3}{2}}$$

$$+ = \frac{25 \cdot 2 \cdot 5184 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot 3} = 25 \times 288 = 7200$$

Պատասխանի։ 7200 աղիւսոց։

Գ. Խնդիր. Եթէ ձող ինչ երկաթի, որոյ 6^{c} երկայթիւն իցէ, եւ 4^{r} լայնութիւն եւ 2^{t} թանձրութիւն կշռիցէ 144 լտերս, որչափ ինչ ծանր իցէ ձողն 5^{c} երկայն, 5^{r} լայն, եւ 3^{r} թանձր։

Պատասխանի։ $+:144=\begin{cases}5^{ե}:6^{ե}\\5^{ր}:4^{ր}\\3^{ր}:2^{ր}\end{cases}$

$$+=\frac{144\times5\times5\times3}{6\times4\times2}=\frac{144\times5\times5}{16}=9\times5\times5=225$$ լիտր։

Դ. Խնդիր։ Եթէ 1260 քուռք ցորենոյ շատ իցեն 250 արանց ընդ $3\frac{3}{4}$ ամիս, ընդ որչա՞փ ժամանակս բաւական լինիցին 2400 քուռք ցորենոյ, 780 արանց։

Պատասխանի։ $+:3\frac{3}{4}=\begin{cases}2400:1260\\250:\ 780\end{cases}$

$$+=\frac{3\frac{3}{4}\times2400\times250}{1260\times780}=\frac{5\times5\times25}{21\times13}=\frac{625}{273}=2$$ Ամիս եւ $8\frac{62}{91}$ Օր։

341. Ընդ յօդուածոյ համեմատութեամբ անկանի եւ Յեռեալ կանոնն, որ է կիր արկանի, յորժամ զկշռութիւն երկուց չափուց չիցէ մարթ ի միմեանց ճանաչել, այլ ի ձեռս կշռութենէ, որ ընդ մէջ երկուց կշռութեանցն անկանիցի։ Արդ ի կիր արկանի Յեռեալ կանոնն ի համեմատել զչափս եւ զկշիռս, եւ զչափ ազգիազգի դահեկանաց, եւ զայլ եւս այնպիսիս։ Վասն այսորիկ իսկ անուանեալ կոչեցաւ Յեռեալ կանոն, զի կազմի յարդեանց բազում պարզ համեմատութեանց, որք այնպիսի իմն կցորդութեամբք ընդ միմեանս յօդեալ են, որպէս զի ներքին անդամն առաջին համեմատութեան արտաքին անդամ լինիցի երկրորդ համեմատութեանն, որոյ ծանօթ չափն գտանի ըստ 327 համարոյ։

Այլ խնդիրք յեռեալ կանոնին դիւրաւ եւ համառօտ վճարին զայս ձեւ օրինակի։ Ձգեա գիծ ուղղորդ վերուստ ի վայր. ի վերին կողմն ընդ ձախմէ գծին դրօշմեա զխնդրեալ Թիւն +, եւ հանդէպ նմին ընդ աջմէ զայն յոր շրջիցի +: Ընդ ձախմէ կողմանէ ընդ + չափով դրօշմեա զայն որ համազգի իցէ աջակողմեան չափոյն, եւ հանդէպ նմին դարձեալ ընդ աջմէ զայն՝ որ ընդ ձախակողմեան չափոյն հաղորդուԹիւն ունիցի: Յետ այնորիկ ընդ ձախմէ զայն չափ, որ ընդ վերջին աջակողմեան չափոյն համազգի իցէ, եւ զայն որ ընդ նմին հաղորդուԹիւն ունիցի ընդ աջմէ հանդէպ նմին: Զայս օրինակ յառաջ խաղա մինչեւ ի կատարել չափուցն, յորս վերջին աջակողմեան չափն համազգի է ընդ առաջին չափոյն՝ որ ընդ ձախմէ: Ապա այնուհետեւ եղծեալ զնոյն առնելին որ ի ձախմէ եւ ընդ աջմէ ուղղորդ գծին իցեն, + հաւասար լինիցի քանորդին, որ անդստին ի բաժանելոյ արդեանց աջակողմեան չափուց ընդ արդիւնս ձախակողմեան չափուցն ծնանիցի:

Ստուար օրինակքս առաւել եւս զկանոնն յայտ արասցեն:

Ա. Որպէս համեմատիցի արդեւք ոտն Վիէննացւոց ընդ ոտին Նուռնբերգի, եԹէ ոտն Վիէննացւոց համեմատիցի ընդ ոտին Բերլինի որպէս 51:50, եւ ոտն Բերլինի ընդ Պարիսուն որպէս 41:43, եւ Պարիսուն ընդ Լոնդինոնին որպէս 16:15, եւ լոնդինեանն ընդ ոտին Նուռնբերգի որպէս 336:337: Դնիցուք եԹէ ոտն Վիէննացւոց իցէ Վ, Նուռնբերգի Ն, Բերլինի Բ, Պարիսուն Պ, Լոնդինոնի Լ: Արդ

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Վ}:\text{Բ}=51:50 & \text{կամ} & 50\,\text{Վ}=51\,\text{Բ} \\
\text{Բ}:\text{Պ}=41:43 & ,, & 43\,\text{Բ}=41\,\text{Պ} \\
\text{Պ}:\text{Լ}=16:15 & ,, & 15\,\text{Պ}=16\,\text{Լ} \\
\text{Լ}:\text{Ն}=336:337 & ,, & 337\,\text{Լ}=336\,\text{Ն} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{Վ}:\text{Ն}=(51\cdot41\cdot16\cdot336):(50\cdot43\cdot15\cdot337)$$

$$=(17\cdot41\cdot16\cdot168):(25\cdot43\cdot5\cdot337)$$ ուստի եւ

$$(25\cdot43\cdot5\cdot337)\,\text{Վ}=17\cdot41\cdot16\cdot168\,\text{Ն}$$

$$1\,\text{Վ}\ \textit{իէն.}=\frac{17\cdot41\cdot16\cdot168}{25\cdot43\cdot5\cdot337}=\frac{1873536}{1811375}=1{,}03\ldots\text{Ն},$$

յորմէ եւ Վ.:Ն$=1,03\ldots:1$, եւ կշռութիւնս սակաւ ինչ փոքր է, զի օրինակաւ մերձենալոյ ի բուն զօրութիւնն գտեալ է։

Իսկ եթէ կամիցիմք համառօտիւք կատարել, լինիցի

+Վ.	1Ն
336Ն	337Դ.
16Դ.	15Պ
41Պ	43Բ
51Բ	50Վ.
+1811375	1873536

ուստի եւ $+=\dfrac{1873536}{1811375}=1,03\ldots$, յորմէ եւ Վ.:Ն$=$ $103\ldots:1$

Բ. Եթէ գինք բաժնի միոյ հողղանտեան ասուոյ, յորում 30 բրաբանտեան կանգունք կայցեն՝ 260 հողղանտեան գահեկանք իցեն, եւ մի հողղանտեան գահեկան $=$ 20 հողղանտեան նաքարակիտ, եւ 104 հողղանտեան նաքարակիտք $=$ 1 հողղանտեան տաղանդ եւ 1 հողղանտեան տաղանդ $=$ 4 գահեկան գերմանացւոց եւ 28 նաքարակիտ գերմանացւոց իցեն, արդ զի՞նչ ինչ գինք իցեն ասուոյ, որ մի կանգուն վիէննացւոց իցէ, եւ 89 կանգունք վիէննացւոց $=$ 100 բրաբանտեան կանգունք իցեն։

Պատասխանի։

+ գահեկ. Գերմ.	1 Վիէն. կանգ.
89 Վ. կանգուն.	100 Բր. կանգ.
30 Բ. կանգուն.	260 Հող. գահ.
1 Հողղ. գահ.	20 Հող. նաք.
104. Հող. նաքար	1 Հող. տաղ.
1. Հող. տաղանդ	$4\frac{28}{60}$ գահ. գերմ.

+	1
89	100
3	26
26	5
60	268
+	
89	100
3	
3	67

Կարձեալ 89·3·3ը=67·100, այսինքն 801ը=6700, ուստի եւ ը=6700:801=8 դահ. գ. երմ. եւ $21\frac{233}{267}$ նպք։

342. Ի համեմատութեան է մեւս եւս օրինակ համարելոյ, որ անուանեալ կոչի կանոն ընկերութեան, որ ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ զողջոյն թիւ ինչ ի չհաւասար մասունս կտորել, յորում մասունքն այնպէս իմն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս այլ ինչ չափք ընդ միմեանս համեմատիցին։ Եթէ մասունքն այնպէս ընդ միմեանս համեմատիցին, որպէս զոյգ մի իրաց ընդ միմեանս համեմատիցի, յորջորջի կանոնն Պարզ, իսկ Յօդուածոյ՝ յորժամ մասունքն այնպէս իմն ընդ իրեարս կշռիցին, որպէս բազում զոյգք իրաց ընդ միմեանս։ Զոր օրինակ եթէ զողջոյն թիւ Ն ի Դ մասունս ե, զ, է, ը հատանիցեմք, արդ մասունքս այնպէս իմն ընդ միմեանս կշռին, որպէս կշռիցին ա ընդ բ, բ ընդ գ, գ ընդ դ, դ ընդ ե, ուստի եւ

$$ա:բ:գ:դ=ե:զ:է:ը$$

յորմէ յառաջ գայ եթէ

$$ա:ե=բ:զ=գ:է=դ:ը,\ եւ$$

$$(ա+բ+գ+դ):\underbrace{(ե+զ+է+ը)}_{Ն}=\begin{cases}ա:ե\\ բ:զ\\ \ldots\end{cases}$$

յորմէ յառաջ գայ եւ այս կանոն, եթէ դէպ լինիցի ողջոյն ինչ Ն թուոյ յայնպիսի ինչ մասունս կտորել, որպէս զի մասունքն այնպէս իմն ընդ միմեանս կշռիցին, որպէս կշռիցին այլ թիւք ընդ միմեանս, յայնժամ բովանդակութիւն օտար թուոցն, այնպէս իմն համեմատի ընդ ողջոյն թուոյն, որ ի մասունս բաժանելոց իցէ, որպէս համեմատիցին թիւքն ընդ մասունս ողջոյն թուոյն, որ ընդ նոսա ունիցին կցորդութիւն։

343. Ի պարզ կանոնի ընկերութեան բովանդակութիւն պատճառայն այնպէս իմն կշռի ընդ բովանդակութեան գործոյն, որպէս իւրաքանչիւր պատճառ ընդ գործոյն, որ ընդ նմա ունիցի կցորդութիւն։ Իսկ ի յօդուածոյ կանոնի ընկերութեան բովանդակութիւն արդեանց պատճառայն եւ ժամանակաց, այնպէս իմն կշռի ընդ բովանդակութեան գործոյն, որպէս արդիւնք միոյ միոյ պատճառի եւ ժամանակի կշռիցին ընդ գործս իւրեանց։

Զառաջին մասն կանոնիս մարթեմք զայն ձեւ օրինակի յանդիման կացուցանել։ Համարեսցուք թէ որպէս պ_1 պատճառն համեմատիցի ընդ պ_2 պատճառին, նոյն օրինակ գ_1 գործն ընդ գ_2 գործոյն, ուստի եւ

$$\text{պ}_1 : \text{պ}_2 = \text{գ}_1 : \text{գ}_2$$

ըստ այլն նմանութեան որպէս համեմատիցի պ_2 պատճառն ընդ պ_3 պատճառին, նոյնպէս կշռիցի $\text{գ}_2 : \text{գ}_3$, ուստի եւ

$$\text{պ}_2 : \text{պ}_3 = \text{գ}_2 : \text{գ}_3,$$

այն օրինակ համարեսցուք թէ իցէ $\text{պ}_3 : \text{պ}_4 = \text{գ}_3 : \text{գ}_4$։ Եթէ զսոցա զներքին անդամն շրջիցեմք լինիցին

$$\text{պ}_1 : \text{գ}_1 = \text{պ}_2 : \text{գ}_2$$
$$\text{պ}_2 : \text{գ}_2 = \text{պ}_3 : \text{գ}_3$$
$$\text{պ}_3 : \text{գ}_3 = \text{պ}_4 : \text{գ}_4$$

յորս երկրորդ կշռութիւնն առաջին համեմատութեան լինի առաջին կշռութիւն երկրորդ համեմատութեան, ուստի եւ

$$\text{պ}_1 : \text{գ}_1 = \text{պ}_2 : \text{գ}_2 = \text{պ}_3 : \text{գ}_3 = \text{պ}_4 : \text{գ}_4 = \text{պ}_5 : \text{գ}_5 = \cdots$$

յորմէ եւ (Հ. 321. Ա.) $(\text{պ}_1 + \text{պ}_2 + \text{պ}_3 + \text{պ}_4 + \text{պ}_5 + \cdots)$

$$: (\text{գ}_1 + \text{գ}_2 + \text{գ}_3 + \text{գ}_4 + \text{գ}_5 + \cdots) = \left\{\begin{array}{l} \text{պ}_1 : \text{գ}_1 \\ \text{պ}_2 : \text{գ}_2 \\ \text{պ}_3 : \text{գ}_3 \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right.$$

այս ինքն հաւասար ամենայն մասնաւոր կշռութեանց։ Զոր եւ սովորական օրինակօք թուոց ցուցցուք։

Արդ 5 արք դրեցան ի խաղ բախտի, Ա. եդ 20 նաքար. գերմ. երկրորդն Բ. 30 նաքարակիտս, երրորդն Գ. 40 նաքարակիտս, չորրորդն Դ. եդ 60 եւ հինգերորդն Ե. 90 նաք.: Արդ ել վիճակն միում ի նոցանէ եւ շահեցան 1000 դահեկանս. որչա՞փ ինչ միում միում անկանիցի, քանզի ըստ չափոյ տրոցն ունին առնուլ:

Արծաթն 240 նաքարակաց որ ի նոցանէն տըւեալ է, պատճառ է, որ զ 1000 դահեկանացն գործածնաւ: Եւ զի կարիցեմք իմանալ եթէ որչափ ինչ միում միում անկանիցի, պարտ է զպատճառսն ի միմեանս յաւելուլ, զոր եւ պարտ է յառաջին անդամ համեմատութեան դնել, եւ ապա զգործն 1000 դահեկանաց, յետ այնորիկ զարծաթն՝ որ տուաւ յիւրաքանչիւրոցն՝ ընդ միմեամբք յերրորդ անդամն եւ առաջի նոցա զիւրեանց պատշաճական մարդիկն: Եւ ապա ըստ սովորական համեմատութեան գտանել:

$$240:1000=\begin{cases}20:\text{Ա.}\\30:\text{Բ.}\\40:\text{Գ.}\\60:\text{Դ.}\\90:\text{Ե.},\end{cases}$$

ուստի եւ

$$24:100=\left\{\begin{array}{l}20:\ 83+\frac{8}{24}\\30:125\\40:166+\frac{16}{24}\\60:250\\\underline{90:375}\\\quad 1000\end{array}\right\}\text{դահեկանք:}$$

Ըստ սմին օրինակի եւ երկրորդ մասն կանոնին: Դնիցուք գրեսցուք եթէ գ_1 եւ գ_2 գործքն այնպէս իցեն ընդ միմեանս համեմատիցին, որպէս համեմատիցին $\text{պ}_1\text{ժ}_1$ եւ $\text{պ}_2\text{ժ}_2$ արդիւնք պատճառացն եւ ժամանակաց ընդ միմեանս, ուստի եւ $ֆ_1 : ֆ_2 = պ_1ժ_1 : պ_2ժ_2$, ըստ նմին օրինակի եւ $ֆ_2 : ֆ_3 = պ_2ժ_2 : պ_3ժ_3$, եւ $ֆ_3 : ֆ_4 = պ_3ժ_3 : պ_4ժ_4$ եւ ...., ուստի եւ

$$ֆ_1 : պ_1ժ_1 = ֆ_2 : պ_2ժ_2 = ֆ_3 : պ_3ժ_3 = ֆ_4 : պ_4ժ_4 = ֆ_5 : պ_5ժ_5 = \cdots\cdot$$

յորմէ եւ $(ֆ_1 + ֆ_2 + ֆ_3 + ֆ_4 + ֆ_5 + \cdots) :$

$$(պ_1ժ_1 + պ_2ժ_2 + պ_3ժ_3 + պ_4ժ_4 + պ_5ժ_5 + \cdots) = \begin{cases} ֆ_1 : պ_1ժ_1 \\ ֆ_2 : պ_2ժ_2 \\ ֆ_3 : պ_3ժ_3 \\ \ddots \end{cases}$$

Զոր մարթեմք եւ օրինակաւ սովորական թուոց ցուցանել:

Չորք արք Ա., Բ., Գ., Դ., ի վարձու կալան զդաշտ մի 400 դահեկանաց, Ա. ետ արածել ի նմա 600 ոչխար զ7 ամիս, Բ.՝ 500 ոչխար զ9 ամիս, Գ.՝ 800 ոչխար զ6 ամիս, Դ.՝ 1000 ոչխար զ10 ամիս: Արդ կամիմք գիտել եթէ որչափ ինչ իւրաքանչիւր ոք ունիցի հատուցանել վասն գնոյն: Բովանդակութիւն գործոյն է 400 դահեկան, իսկ պատճառքն 600, 500, 800, 1000 ոչխարքն, իսկ ժամանակքն 7, 9, 6, 10 ամիսքն. բովանդակութիւն արդեանց պատճառացն եւ ժամանակաց, որ է

Ամիսք. Ոչխարք.

$$\begin{array}{r} 7 \times 600 = 4200 \\ 9 \times 500 = 4500 \\ 6 \times 800 = 4800 \\ 10 \times 1000 = \underline{10000} \\ 23500 \end{array}$$

այնպէս իմն կշռի ընդ բովանդակութեան գործոյն, որ է 400 դահ. որպէս կշռիցին արդիւնք իւրաքանչիւր պատճառաց եւ ժամանակաց ընդ անձանօթ գործս իւրեանց Ա., Բ., Գ., Դ.: Արդ

$$23500 : 400 = \begin{cases} 4200 : Ա. \\ 4500 : Բ. \\ 4800 : Գ. \\ 10000 : Դ. \end{cases}$$

ուստի եւ

$$235:4=\left\{\begin{array}{l} 4200:\ 71+\frac{115}{235} \\ 4500.\ 76+\frac{140}{235} \\ 4800:\ 81+\frac{165}{235} \\ 10000:170+\frac{50}{235} \end{array}\right\}\text{դահեկանս :}$$

$$\overline{400}$$

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. **Խնդիր**: *Չորք վաճառականք Ա., Բ., Գ., Դ., եդին դաշն միաբանութեան ընդ միմեանս եւ հաստատեցին ընկերութիւն իմն վաճառականութեան. Ա. ետ* 3200 *դահեկանս,* Բ. 4500 *դահեկանս,* Գ. 2700 *դահեկանս, եւ* Դ. 4000. *եւ շահեցան ի վերայ շահ* 4320 *դահեկանաց. արդ որչափ ինչ միում միում ըստ իւրաքանչիւր անձնիւր տրոյն անկանիցի:*

Պատասխանի:

$$14400:4320=\left\{\begin{array}{lll} 3200:\text{Ա.} & \text{յորում} & \text{Ա.}=\ 960 \\ 4500:\text{Բ.} & \text{„} & \text{Բ.}=1350 \\ 2700:\text{Գ.} & \text{„} & \text{Գ.}=\ 810 \\ 4000:\text{Դ.} & \text{„} & \text{Դ.}=1200 \end{array}\right.$$

Բ. **Խնդիր**: *Ի կազմած ազնիւ փոշւոյ հրացան գործեաց պէտք են* 16 *մասն բորակի,* 2 *մասն ծծմբոյ, եւ* 3 *մասն ածխոյ. արդ որչափ ինչ յանձնիւր մասանցն պէտք իցեն ի կազմել* 600 *քանքար փոշի հրացանի:*

Պատասխանի:

$$(16+2+3):600\left\{\begin{array}{lll} 16:\text{Բ.}, & \text{յորում} & \text{Բ.}=457\frac{1}{7}\,\text{քանքար.} \\ 2:\text{Ծ.} & \text{„} & \text{Ծ.}=\ 57\frac{1}{7}\,\text{քանքար.} \\ 3:\text{Ա.} & \text{„} & \text{Ա.}=\ 85\frac{5}{7}\,\text{քանքար.} \end{array}\right.$$

Գ. Խնդիր: Եթէ ի կազմած ապանխացուց մոմոյն պէտք իցեն 2 լիտր բեւեկն, 3 լիտր խորուկ, 3 լիտր գոճի խիժ, եւ $\frac{1}{2}$ լիտր կաւիճ, որչափ ինչ պարտ իցէ առնուլ ի նոցանէ յիւրաքանչիւրոցն, ի կազմել զ25 լիտր ապանխացուց մոմոյ:

Պատասխանի:

$$\left(2+3+3+\frac{1}{2}\right):25=\begin{cases} 2:\text{Բ}, \text{ յորում } \text{Բ}=5\frac{15}{17}\text{ Բեւեկն} \\ 3:\text{Խ} \quad \text{„} \quad \text{Խ}=8\frac{14}{17}\text{ Խորուկ} \\ 3:\text{Գ} \quad \text{„} \quad \text{Գ}=8\frac{14}{17}\text{ Գոճի խիժ} \\ \frac{1}{2}:\text{Կ} \quad \text{„} \quad \text{Կ}=1\frac{8}{17}\text{ Կաւիճ} \end{cases}$$

Դ. Խնդիր: Արք երեք վաճառականք եդին գլուխ մի դրամոց, Ա. ետ 530 դահեկանս վասն 6 ամսոց, Բ. 840 դահեկանս վասն 5 ամսոց, Գ. 250 դահեկանս վասն միոյ տարւոյ կամ 12 ամսոց: Արդ շահեցան 200 դահեկանս, զի՞նչ ինչ իւրաքանչիւր ոք առնուցու:

$$\begin{array}{r} \text{Դահ. ժամանակ} \\ 530\times\ 6=3180 \\ 840\times\ 5=4200 \\ 250\times12=\underline{3000} \\ 10380 \end{array}$$

արդ

$$10380:200\begin{cases} 3180:\text{Ա.} \text{ յորում } \text{Ա.}=61\frac{471}{173} \\ 4200:\text{Բ.} \quad \text{„} \quad \text{Բ.}=80\frac{160}{173} \\ 3000:\text{Գ.} \quad \text{„} \quad \text{Գ.}=57\frac{139}{173} \end{cases}$$

Յաղագս միջնորդին համարողութեան գտանելոյ։

344. Ի կիր արկանի կանոնս, յորժամ պէտք ինչ լինիցին զբովանդակութիւն ինչ, որ ի չհաւասար մասանց կազմեալ իցէ, ի հաւասար մասունս բաժանել։ Արդ այսպիսի ինչ է կանոնն։ Բաժանեա զբովանդակութիւն չհաւասար մասանց, ընդ թիւ համարոյ հաւասար մասանցն։ Արդ գտեալ թիւն տայ Միջնորդ համարողութեան։

Օրինակ։ Շահ տան առն ուրումն էր

յառաջնում	ամի	2400	դահ.
յերկրորդում	,,	2000	,,
յերրորդում	,,	2350	,,
ի չորրորդում	,,	1930	,,
չորից ամաց միանգամայն		8680	,, ։

Արդ զի՞նչ իցէ միջին շահն։

Պատ.: $+ = \frac{8680}{4} = 2170$ դահ.։

Գ· Լ Ո Ւ Խ Ն

ՅԱՂԱԳՍ ՂՈԳԱՐԻԹՄԵԱՑ

345. ՊԱՐՏ եւ պատշաճ է մեզ յառաջագոյն քան զցուցանել, եթէ զի՞նչ ինչ իցէ ղոգարիթմոյն, ընծայեցուցանել կանոնս ինչ, զոր ի միտ առեալ, ապա այնուհետեւ դիւրաւ ի վերայ հասանել կարիցեմք բնութեան ղոգարիթմեայց: Հնար է զթիւ ինչ համամբ եւ յաւելլով յազգիազգի կերպարանս փոփոխել, ըստ նմին օրինակի եւ բազմացուցանելով եւ բաժանելով եւ հանելով արմատս: Արդ սկիզբն արասցուք քննելոյ, եթէ գուցէ՞ հնար արդեօք զայն փոփոխմունս կատարել, եւ համբառնալով ի կարողութիւն, առանց ինչ զօրութեանն փոփոխելոյ:

Ա· Յայտ է զամենայն թիւ ընդ մէջ երկուց կարողութեանց այլոյ թուոյ դնել, որպէս զի երկուքին կարողութիւնք այնր թուոյ 1ով եւեթ այլակերպք ի միմեանց իցեն, եւ չիցեն արմատքն 1: Որպէս ինչ 10 անկանի ընդ մէջ երրորդ եւ չորրորդ կարողութեանց 2 թուոյ, քանզի $2^3=8$ եւ $2^4=16$, արդ է $8<10<16$: Ըստ նմին օրինակի եւ կոտորոց հնար է ընդ մէջ երկուց կարողութեանց այլոյ թուոյ անկանել՝, զոր օրինակ $\frac{1}{5}$ կոտորն: Քանզի որովհետեւ 0 կարողութիւն 2 թուոյ է$=1$, այս ինքն $2^0=1$, ուրեմն պարտ է այնպիսի ինչ չափս խնդրել, որ փոքր քան զ1 իցեն, արդ

$$2^{-1}=1:2=\frac{1}{2}$$ (Հ· 95· Գ·), նոյնպէս

$$2^{-2}=1:2^2=\frac{1}{4}$$

$$2^{-3}=1:2^3=\frac{1}{8}$$

աստատին յառաջ գայ, եթէ $\frac{1}{8} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, ուրեմն $2^{-3} < \frac{1}{5} < 2^{-2}$: Նաեւ այս իսկ է այլակերպութիւնն որ ի միջի անդ կատարոցն եւ ողջոյն թուոց կայ, զի որչափ ինչ մեծ իցէ կարողութիւն կատարոյ, այնչափ եւ փոքր է զօրութիւն նորա: Ըստ նմին օրինակի հնար է կատարոյ իրիք անկանել ընդ մէջ երկուց կարողութեանց կատարոյ. զոր օրինակ $\frac{1}{5}$ կատարս կայ ընդ մէջ առաջին եւ երկրորդ կարողութեան $\frac{1}{4}$ կատարոյ, քանզի առաջին կարողութիւն $\frac{1}{4}$ է $\frac{1}{4}$, իսկ երկրորդ կարողութիւնն՝ $\frac{1}{16}$, ուստի եւ

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{5} < \left(\frac{1}{4}\right)^1 :$$

Դարձեալ մարթ է որ ինչ եւ իցէ թուոյ անկանել ընդ մէջ որ ինչ եւ իցէ կարողութեանց կատարոյ: Նմա պարտ է կարողութեանց կատարոցն ուրացականս լինել, քանզի յորչափ ինչ մեծամեծ կարողութիւնս հաստատականս համբառնայցէ կատար ինչ, առաւել եւս նուազի զօրութիւնն, որով եւ անհնարին ինչ է նմա ողջոյն ինչ թուոյ հաւասարել, եւ զողջոյն ինչ թիւ ի միջի փակել: Նաեւ զի եթէ 0 լինիցի է=1, զորին զհետ գայ զի եթէ նուազ քան զ0 իցէ ցուցիչն, առաւել աճիցէ կարողութիւնն, որով եւ հնարաւոր ինչ լինիցի զողջոյն թիւն յիւրեանց միջի փակել: Որպիսի ինչ 5 թիւն փակի ի մէջ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ եւ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ չափուց: Քանզի

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=1:\frac{1}{4}=4$, իսկ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=1:\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=1:\frac{1}{16}=16$, ուրեմն

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}<5<\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \text{ կամ } 4<5<16։$$

Բ. Հնար է զամենայն թիւ ընդ մէջ երկուց կարողութեանց որ ինչ եւ իցէ թուոյ գտնել, որպէս զի այլակերպութիւն կարողութեանցն փոքր իցէ քան զ1, որպէս 1000 երորդ կամ 10000 երորդ մասն միութեան, որպէս եւ կամք իցեն։

Դնիցուք գրեսցուք եթէ $\text{բ}^{\text{ն}}<\text{ա}<\text{բ}^{\text{ն}+1}$ իցէ, յորում ն եւ ն$+1$ միով եւեթ այլակերպք ի միմեանց են։ Արդ եթէ զերկոսին եւս կարողութիւնսն միով չափով բազմացուցանիցեմք եւ զարդիւնսն ընդ նոյն չափ բաժանիցեմք, յայտ է եթէ չփոփոխի զօրութիւն նոցա. արդ բազմացուցեալ ր$+1$ չափով, եւ ընդ նոյն չափ բաժանեալ լինիցի

$\text{բ}^{\frac{\text{ն}(\text{ր}+1)}{\text{ր}+1}}<\text{ա}<\text{բ}^{\frac{(\text{ն}+1)(\text{ր}+1)}{\text{ր}+1}}$, որ են հաւասար

$$\text{բ}^{\frac{\text{նր}+\text{ն}}{\text{ր}+1}}<\text{ա}<\text{բ}^{\frac{\text{նր}+\text{ր}+\text{ն}+1}{\text{ր}+1}}$$

զորս եթէ ի մի եւ նոյն ր$+1$ կարողութիւն համբառնայցեմք, որ մեծն իցէ ի նոցանէ չփոփոխիցի եւ մնայցէ մեծ, եւ որ փոքրն իցէ, փոքր, (Հ. 219.) եւ անուանիչքն եղծանիցին, որով եւ լինիցի.

$$\text{բ}^{\text{նր}+\text{ն}}<\text{ա}^{\text{ր}+1}<\text{բ}^{\text{նր}+\text{ն}+\text{ր}+1},$$

Արդ սկիզբն արասցուք զ$\text{ա}^{\text{ր}+1}$ ընդ մէջ երկուց կարողութեանց բ չափոյն գտնել, որպէս զի ցուցիչք բ չափոյն 1 միաւորբ ր$+1$ երորդ չափոյն ի միմեանց այլակերպք իցեն։ Իսկ զի այս լինիցի, յաւելցուք ի ցուցիչ $\text{բ}^{\text{նր}+\text{ն}}$ չափոյն զանծանօթ +, որով լինիցի $\text{բ}^{\text{նր}+\text{ն}++}<\text{ա}^{\text{ր}+1}$ եւ եթէ մի միութիւն յաւելցի ի կաբողութիւն ք չափոյն, իցէ $ա^{ր+1} < ք^{նր+ն+ւ+1}$, ուստի եւ

$$ք^{նր+ն+ւ} < ա^{ր+1} < ք^{նր+ն+ւ+1}։$$

Եթէ ի յերից կարողութեանց առնի զնոյն արմատ $ր+1$ հանիցեմք, լինիցին

$$\sqrt[ր+1]{ք^{նր+ն+ւ}} < \sqrt[ր+1]{ա^{ր+1}} < \sqrt[ր+1]{ք^{նր+ն+ւ+1}},$$

որք եւ հաւասար են չափուցս,

$$ք^{\frac{նր+ն+ւ}{ր+1}} < ա < ք^{\frac{նր+ն+ւ+1}{ր+1}}$$

Արդ եթէ զայլակերպութիւն կարողութեանց ք չափոյն տեսանել կամիցիս, է

$$\frac{նր+ն+ւ+1}{ր+1} - \frac{նր+ն+ւ}{ր+1} = \frac{1}{ր+1}$$

յորմէ յայտ է, եթէ մի մասամբ $ր+1$ չափոյն ի միմեանց այլակերպք են։ Յուցանէ հասարակաց օրինակս եթէ կարիցեմք զամենայն չափ ընդ մէջ երկուց կարողութեանց այլոյ թուոյ գտնել։ Որպիսի ինչ. մարթեմք զթիւ ինչ ա ընդ մէջ երկուց կարողութեանց ք չափոյն գտնել, որպէս զի երկոքին կարողութիւնքն 1 ներորդ մասամբ այլակերպք ի միմեանց իցեն։

Ընդ սմին ի բանիցս ասացելոց յայտ է, եթէ կարողութիւն ք չափոյն, որ փոքր իցէ քան զա պարտ է կոտոր ինչ լինել, որոյ անուանիչ իցէ ն եւ համարիչ անծանօթ ւ, եւ այնպէս իմն լինել, որպէս զի եթէ մի միութիւն յաւելուցու ի ցուցիչն, առաւելուցու քան զա, այս ինքն $ք^{\frac{ւ}{ն}} < ա < ք^{\frac{ւ+1}{ն}}$, յորում եթէ զ $\frac{ւ}{ն}$ եւ զ $\frac{ւ+1}{ն}$ ի միմեանց հանիցեմք այլակերպութիւնն $\frac{1}{ն}$ իցէ։ Արդ քանզի ա է ի մէջ երկուց կարողութեանց ք չափոյն, յայտ է եթէ չէ ինչ հաւասար կատարեալ կարողութեան նորա. վասն այսորիկ եթէ կամիցիս զ $ե^{\frac{+}{ն}}$, եւ զ $ե^{\frac{++1}{ն}}$ առաւել մերձեցուցանել ի զօրութիւն ա չափոյն, պարտ է քեզ զանուանիչն ն առաւելուլ, եւ որչափ ինչ առաւել իցէ ն կամ 1000, 10000, 100000, ... այնչափ առաւել մերձենայցէ ի զօրութիւն անդր ա չափոյն, որպէս զի կարիցեմք $ե^{\frac{+}{ն}}=ա$, կամ $ե^{\frac{++1}{ն}}=ա$ դնել: Այլ քանզի $ե^{\frac{+}{ն}}$ կարի իմն փոքրագոյն է քան զա, եւ $ե^{\frac{++1}{ն}}$ կարի իմն մեծագոյն քան զա, վասն այսորիկ առ ի զմիջին մերձաւորութիւնն գտանելոյ, պարտ է զմիջնորդն համարութեան գտանել $ե^{\frac{+}{ն}}$ եւ $ե^{\frac{++1}{ն}}$ չափուցս, որով $ե^{\frac{2++1}{2ն}}=ա$:

Աստէն ի սմին վայրի դիցուք օրինակ ինչ սովորական թուովք, որով առաւել յայտ լիցի Ի· կանոնն: Կամք են մեզ զթիւն 11 ի մէջ երկուց կարողութեանց 10 թուոյ ձգել. որք մի 1000 երորդական մասամբ ի միմեանց այլակերպք իցեն: Ի Ի· կանոնէ յայտ է եթէ կարողութիւն 10 թուոյ, որ փոքր իցէ քան զ11, պարտ է կոտոր ինչ լինել, որոյ անուանիչ իցէ 1000, եւ համարիչ անծանօթ + զայս օրինակ $10^{\frac{+}{1000}}<11$, յոր եթէ մի միութիւն յաւելցի առաւելուցու քան զ11: Եթէ զերկուս հաւասար չափս ի 1000երորդ կարողութիւն հանիցեմք, լինիցին հաւասարքն $10^{+}<11^{1000}$: Առ ի գտանել զզօրութիւն + կարողութեան, պարտ է արդեամբք իսկ զ11 ի 1000 երորդ կարողութիւն հանել, վասն որոյ եւ զհամառօտ կանոն բազմացուցանելոյ ի կիր արկանել, որով

$11^2=121$,	$11^4=146 \cdot 10^2$
$11^8=213 \cdot 10^6$	$11^{10}=258 \cdot 10^8$
$11^{20}=666 \cdot 10^{18}$	$11^{40}=4436 \cdot 10^{38}$

$11^{80}=19677\cdot10^{79}$, $11^{100}=131\cdot10^{102}$

$11^{200}=171\cdot10^{206}$ $11^{400}=293\cdot10^{414}$

$11^{800}=859\cdot10^{830}$ $11^{1000}=1469\cdot10^{1038}$

Արդ ի բազմացուցանելն զայս ինչ կարգ պահեցաք, զյետին աջակողման տեղեան դատարկս համարեցաք եւ նշանակեցաք զնոսա կարողութեամբք 10 թուոյ, որպէս տեսանես։ Արդ եթէ ի $11^{1000}=1469\cdot10^{1038}$ զյետին երիս տեղեան դատարկս համարիցիմք, լինիցի $11^{1000}=10^{1041}$։ Այլ քանզի 10^{1041} փոքր է քան զ11^{1000}, զի ի բաց թողաք յամենայն նուագի զնշանակս թուոց վերջին տեղեացն, եւ զի յորժամ 1 միութիւն ի կարողութիւնն յաւելուցումք մեծագոյն լինիցի քան զ11^{1000}, քանզի աւելեալն զօրութիւնքն տեղեաց, զորս զհետ զայ, եթէ 11^{1000} ոչ միայն եւ ոչ միւսոյն հաւասար իցէ, ուստի եւ

$$10^{1041}<11^{1000}<10^{1042}\text{ ։}$$

Եթէ յերից չհաւասար չափուցս զ1000 երորդ արմատս հանցես լինիցին

$$10^{\frac{1041}{1000}}<11<10^{\frac{1042}{1000}}\text{ ։}$$

Եւ զի կարիցեմք առաւել եւս մերձենալ ի զօրութիւն 11 թուոյն, պարտ է զմիջնորդն համարողութեան զտանել երկոցունց կարողութեանց 10 անց, ուստի եւ լինիցի $11=10^{\frac{2083}{2000}}$, որով եւ լինիցի

$$11=10^{1,0415}\text{ ։}$$

Այսու օրինակաւ կարիցեմք եւ զամենայն թիւ ընդ մէջ երկուց կարողութեանց 10 թուոյ դնել, որով եւ հնար է զամենայն թիւ հաւասար դնել իբրեւ կարողութեան 10 թուոյ։

346. Ասացուք որ ինչ եւ իցէ թիւ $ա>1$, եւ համարեսցուք, եթէ հնար ինչ իցէ, զի փոխանակ որ ինչ եւ իցէ ն թուոյ դիցի Ն երորդ կարողութիւն ա չափոյն որպէս զի լինել $ն=ա^{Ն}$։ Ցուցիչն Ն, որով

այս ինք կատարիցին անուանեալ կոչի Ղոգարիթմոս Ն. թուոյ, եւ ա խարիսխ ղոգարիթմեայ։ Իբրեւ ամենայն ղոգարիթմեայց նոյն թիւ խարիսխ լինիցի, յորջորջի Ղոգարիթմական կարգ։ Որպիսի ինչ $բ^{ա}=ա$, $բ^{գ}=ֆ$, $բ^{դ}=փ$, ... է ղոգարիթմական կարգ ինչ, յորում բ խարիսխ է, եւ ա, գ, դ, ... ղոգարիթմունք ա, բ, չափոյն, եւ այլքն ըստ նմին օրինակի։ Ի ղոգարիթմական կարգին, որոյ խարիսխ իցէ 10, թիւքս 2, 3, 4, 5 .... Ն են ղոգարիթմեայք $100=10^2$, $1000=10^3$, եւ համարակաց օրինակաւ $10^{Ն}$ թուոց։

Ղոգարիթմոյն նշանակի, յորժամ առընթեր թուոյն, որոյ իցէ ղոգարիթմոյն դիցես զսկզբունս ղոգ. որպիսի ինչ ղոգ. ա=ա, ղոգ. ֆ=գ, ... նոյնպէս ղոգ. 100=2, ղոգ. 1000=3, ղոգ. Ն=Ն ։

347. Ղոգարիթմոյն արդեանց ինչ հաւասար է բովանդակութեան ղոգարիթմեայց առնելեացն։

Համարեսցուք եթէ $Մ=ա^{մ}$, եւ $Ն=ա^{ն}$, ուստի եւ մ=ղոգ. Մ եւ ն=ղոգ. Ն։ Արդ որովհետեւ $ՄՆ=ա^{մ+ն}$, ուրեմն ղոգ. ՄՆ=մ+ն կամ եթէ փոխանակ մ եւ ն չափուցն զիւրեանց զօրութիւնն դնիցեմք, լինիցին

ղոգ. ՄՆ=ղոգ Մ+ղոգ. Ն։

Ըստ նմին օրինակի եւ

ղոգ. ՄՆՊ=ղոգ. Մ+ղոգ. Ն+ղոգ. Պ։

Աստուստին յառաջ գայ, զի եթէ ի ղոգարիթմական կարգի ուրեք, ղոգարիթմունքն նախաւոր թուոց իցեն ծանուցեալ, մարթ է միայն բովանդակութեամբ ղոգարիթմեայցն այնոցիկ ղոգարիթմս յօդուածոյ կազմել։ Զոր օրինակ,

ղոգ. 6=ղոգ. 2+ղոգ. 3։

ղոգ. 105=ղոգ. 3+ղոգ. 5+ղոգ. 7. քանզի 3.5.7=105։

Ըստ նմին օրինակի,

ղոգ. 3աբ (ա+բ)=ղոգ. 3+ղոգ. ա+ղոգ. բ+ղոգ. (ա+բ)։

ղոգ. $(ա^2-ֆ^2)$=ղոգ. (ա+ֆ)+ղոգ. (ա−ֆ)։

348. Ղոգարիթմոն քանորդին հաւասար է այլակերպութեանն որ գտանի, յորժամ ղոգարիթմոն բաժանարարին հանցի ի ղոգարիթմէ բաժանելւոյն, յորմէ յառաջ գայ եւ այս, եթէ ղոգարիթմոն իրիք կոտորոյ հաւասար է ղոգարիթմէ համարչին, յորմէ հանցի ղոգարիթմոն անուանչին։

Դնիցուք գրեցուք եթէ $\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}=\text{Ք}$ իցէ, ուստի եւ $\text{Մ}=\text{Ն}.\text{Ք}$, եւ

$$\text{ղոգ.}\,\text{Մ}=\text{ղոգ.}\,\text{Ն}+\text{ղոգ.}\,\text{Ք},\ (\text{Տ.}\ 347.),$$

յորոց եթէ յերկուց կողմանց հաւասարութեան զ ղոգ. Ն հանիցեմք, լինիցի

$$\text{ղոգ.}\,\text{Մ}-\text{ղոգ.}\,\text{Ն}=\text{ղոգ.}\,\text{Ք},$$

եւ եթէ փոխանակ Ք չափոյն զ $\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$ դնիցեմք, յայնժամ $\text{ղոգ.}\,\text{Մ}-\text{ղոգ.}\,\text{Ն}=\text{ղոգ}\,\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$։ Զոր օրինակ,

$$\text{ղոգ.}\,\frac{2\text{ա}}{3\text{բ}}=\text{ղոգ.}\,2\text{ա}-\text{ղոգ.}\,3\text{բ}=\text{ղոգ.}\,2+\text{ղոգ.}\,\text{ա}$$
$$-\,\text{ղոգ.}\,3+\text{ղոգ.}\,\text{բ}:$$

$$\text{ղոգ.}\,\frac{3\text{աբ}}{\text{ա}-\text{բ}}=\text{ղոգ.}\,3\text{աբ}-\text{ղոգ.}\,(\text{ա}-\text{բ})=$$
$$\text{ղոգ.}\,3+\text{ղոգ.}\,\text{ա}+\text{ղոգ.}\,\text{բ}-\text{ղոգ.}\,(\text{ա}-\text{բ}):$$

349. Ղոգարիթմոն իրիք կարողութեան հաւասար է ղոգարիթմէ արմատոյն, որ բազմացուցեալ իցէ ցուցչաւ կարողութեանն։

Քանզի որովհետեւ $\text{Ն}=\text{ա}^{\text{ն}}$, ուստի եւ $\text{ն}=\text{ղոգ.}\,\text{Ն}$, ուրեմն եւ $\text{Ն}^{\text{մ}}=(\text{ա}^{\text{ն}})^{\text{մ}}=\text{ա}^{\text{նմ}}$ իցէ, եւ $\text{նմ}=\text{ղոգ.}\,\text{Ն}^{\text{մ}}$, կամ եւ եթէ փոխանակ ն քանիօնութեան զզօրութիւն ղոգ. Ն դնիցեմք, լինիցի $\text{ղոգ.}\,\text{Ն}^{\text{մ}}=\text{մ.}\,\text{ղոգ.}\,\text{Ն}$։ Զոր օրինակ,

$$\text{ղոգ.}\,4=2.\,\text{ղոգ.}\,2.,\ \text{ղոգ.}\,27=3\,\text{ղոգ.}\,3,$$
$$\text{ղոգ.}\,2187=7\,\text{ղոգ.}\,3,\ \text{քանզի}\ 3^{7}=2187\text{։}$$

Այնպէս,

$$\text{լոգ}\cdot 4\text{ա}^2\text{բ}^3\text{գ}^{\text{մ}}=\text{լոգ}\cdot 4+\text{լոգ}\cdot \text{ա}^2+\text{լոգ}\cdot \text{բ}^3+\text{լոգ}\cdot \text{գ}^{\text{մ}}=$$
$$2\text{լոգ}\cdot 2+2\text{լոգ}\cdot \text{ա}+3\text{լոգ}\cdot \text{բ}+\text{մ}\cdot\text{լոգ}\cdot \text{գ}\,:$$

$$\text{լոգ}\cdot \frac{5\text{ա}^{\text{ն}}(\text{ա}^2-\text{դ}^2)^2}{3\text{բ}^3(\text{գ}-\text{դ})^4}$$
$$=\text{լոգ}\cdot 5\text{ա}^{\text{ն}}(\text{ա}^2-\text{դ}^2)^2-\text{լոգ}\cdot 3\text{բ}^3(\text{գ}-\text{դ})^4$$
$$=\text{լոգ}\cdot 5+\text{ն}\,\text{լոգ}\cdot \text{ա}$$
$$+2\,\text{լոգ}\cdot(\text{ա}+\text{դ})+\text{լոգ}\cdot(\text{ա}-\text{դ})$$
$$-\text{լոգ}\cdot 3+3\,\text{լոգ}\cdot \text{բ}+4\,\text{լոգ}\cdot(\text{գ}-\text{դ})\,:$$

350. Լոգարիթման արմատոյն, զոր յայս նիշ թուոյ կամք իցեն հանել, գտանի, եթէ զլոգարիթման այնր թուոյ բաժանիցես ընդ արմատոյ ցուցիչն:

Դնիցուք գրեսցուք եթէ $\text{Ա}=\sqrt[\text{մ}]{\text{Ն}}$ իցէ, ուստի եւ $\text{Ն}=\text{Ա}^{\text{մ}}$, եւ ըստ ∸·349 $\text{լոգ}\cdot\text{Ն}=\text{մ}\cdot\text{լոգ}\cdot\text{Ա}$, եւ կամ եթէ զերկուս անդամն եւս հաւասարութեանն ընդ մ բաժանեսցես, $\text{լոգ}\cdot\text{Ա}=\frac{\text{լոգ}\cdot\text{Ն}}{\text{մ}}$, եւ եթէ փոխանակ Ա չափոյն զզօրութիւնն $\sqrt[\text{մ}]{\text{Ն}}$ դնիցեմք, լինիցի,

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt[\text{մ}]{\text{Ն}}=\frac{\text{լոգ}\cdot\text{Ն}}{\text{մ}}\,:$$

Որպիսի ինչ,

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt{2}=\frac{\text{լոգ}\cdot 2}{2}$$

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt[3]{3}=\frac{\text{լոգ}\cdot 3}{3}$$

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt[5]{\frac{3}{7}}=\frac{\text{լոգ}\cdot 3-\text{լոգ}\cdot 7}{5}$$

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt[3]{\frac{5\text{ա}^2\text{բ}^{\text{մ}}}{3\text{գ}^{\text{ն}}\text{ե}}}=\frac{\text{լոգ}\cdot 5\text{ա}^2\text{բ}^{\text{մ}}-\text{լոգ}\cdot 3\text{գ}^{\text{ն}}\text{ե}}{3}=$$
$$\frac{\text{լոգ}\cdot 5+2\text{լոգ}\cdot\text{ա}+\text{մ}\,\text{լոգ}\cdot\text{բ}-\text{լոգ}\cdot 3+\text{ն}\,\text{լոգ}\cdot\text{գ}+\text{լոգ}\cdot\text{ե}}{3}$$

$$ղոգ·2ա^3\sqrt[ն]{(ա-գ)^2}=ղոգ·2+3ղոգ·ա+\frac{2ղոգ·(ա-գ)}{ն}:$$

351․ Խարիսխն ա, որպիսի ինչ եւ զօրութիւն ունիցի, ցանգ $ա^0=1$, ուստի եւ յամենայն ղոգարիթմական կարգս ղոգ․ $1=0$:

352․ Ըստ Հ․ 246, $ա>1$ իցէ: Եթէ ն հաստատական թիւ իցէ, յայնժամ զօրութիւն $ա^ն$ կարողութեան այնչափ ինչ մեծագոյն լինիցի, որչափ ինչ միանգամ ն մեծագոյն իցէ, յորմէ յառաջ գայ եթէ ն, մեծագոյն չափոյն, եւ մեծագոյն ղոգարիթմոս իցէ: Ապա եթէ ն ուրացական թիւ իցէ, յայնժամ եւ կարողութիւնն $ա^{-ն}=\frac{1}{ա^ն}$, փոքր քան զ1 լինիցի, կամ ն, ճշմարիտ կոտոր իցէ, որոյ եւ զօրութիւնն այնչափ ինչ փոքր իցէ, որչափ ինչ միանգամ մեծագոյն իցէ ն: Ուրեմն Ղոգարիթմոքն բուն կոտորոյ ուրացական թիւք են, եւ որչափ ինչ միանգամ փոքր իցէ զօրութիւն կոտորոյն, այնչափ մեծագոյն են ղոգարիթմոքն, որ նոցա կշռին:

Յասացելոցս աստի յառաջ գայ, եթէ ղոգ․ ամենայն խարսխաց է 1, քանզի $բ^1=բ$, ուստի եւ ղոգ․ $բ=1$: Իսկ ղոգ․ 1ոյ է 0, քանզի $բ^0=1$, ուստի եւ ղոգ․ $1=0$: Իսկ $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, այս ինքն եթէ Ղոգարիթմոքն թուոց որ ի 1ոյ մինչեւ ց9, են ընդ մէջ 0ի եւ 1ոյ, իսկ թուոցն, որ ի 10անց մինչեւ ց99 ղոգարիտմոքն՝ են ընդ մէջ 1ոյ եւ 2ուց, իսկ թուոց, որ ի 100ոյ մինչեւ ց999, այս ինքն որ յերից նշանակաց թուոց կազմիցին, են ընդ մէջ 2, եւ 3 թուոց, նոյնպէս եւ այլոցն կարգ ըստ կարգէ: Սորին հակառակն $10^0=1$, $10^{-1}=0{,}1$ $10^{-2}=0{,}01$ $10^{-3}=\ldots\ldots$:

353․ Համարեսցուք եթէ ա եւ բ խարիսխք իցեն երկուց այլեւայլ ղոգարիթմական կարգաց․ եւ դիցուք գրեսցուք եթէ $ն=ա^ն$ յառաջին կարգին իցէ, եւ $\text{Ն}=\text{բ}^{\text{ր}}$ ի մեւս կարգի. զորին զհետ գայ, զի եթէ չիցէ $\text{Ն}=1$, հարկ է զի ն եւ ր այլեւայլ թիւք իցեն։ Արդ զղոգարիթմոն առաջին կարգին նշանակեսցուք Ղոգ. սիւղոբայիւ, եւ զմեւսն ղոգ. սիւղոբայիւ, որով լինիցի $\text{ն}=\text{Ղոգ.}\,\text{Ն}$, եւ $\text{ր}=\text{ղոգ.}\,\text{Ն}$։ Քանզի որովհետեւ $\text{բ}^{\text{ր}}=\text{ա}^{\text{ն}}$, ուստի եւ $\text{բ}=\text{ա}^{\frac{\text{ն}}{\text{ր}}}$. յորմէ լինիցի

$$\text{Ղոգ.}\,\text{բ}=\frac{\text{ն}}{\text{ր}}=\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Ն}}{\text{ղոգ.}\,\text{Ն}}։$$

Ըստ նմին օրինակի եթէ իցէ $\text{Մ}=\text{ա}^{\text{մ}}$ եւ $\text{Մ}=\text{բ}^{\text{ց}}$. ուրեմն $\text{մ}=\text{Ղոգ.}\,\text{Մ}$, եւ $\text{ց}=\text{ղոգ.}\,\text{Մ}$. եւ վասն $\text{բ}^{\text{ց}}=\text{ա}^{\text{մ}}$ լինելոյ, եւս $\text{բ}=\text{ա}^{\frac{\text{մ}}{\text{ց}}}$, եւ

$$\text{Ղոգ.}\,\text{բ}=\frac{\text{մ}}{\text{ց}}=\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Մ}}{\text{ղոգ.}\,\text{Մ}}$$

Ուստի եւ

$$\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Մ}}{\text{ղոգ.}\,\text{Մ}}=\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Ն}}{\text{ղոգ.}\,\text{Ն}},\ \text{կամ}$$

$$\text{ղոգ.}\,\text{Մ} : \text{Ղոգ.}\,\text{Մ}=\text{Ղոգ.}\,\text{Ն} : \text{ղոգ.}\,\text{Ն}$$

Ապա ուրեմն. Ղոգարիթմունքն նոյն թուոց յայլեւայլ ղոգարիթմական կարգս նոյնին համեմատութեամբ ընդ միմեանս կշռին։ Արդ եթէ կշռութիւնն երկուց ղոգարիթմական կարգաց, եւ ղոգարիթմոն միոյ կարգի ծանուցեալ իցեն. սովաւ մարթ է զղոգարիթմոն միւսոյ կարգին գտանել։ Եւ քանզի ցուցիչ կշռութեանցն ծանուցեալ է, զի

$$\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Ն}}{\text{ղոգ.}\,\text{Ն}}=\text{Ղոգ.}\,\text{բ},$$

յորմէ ծագէ

$$\text{ղոգ.}\,\text{Ն}=\frac{\text{Ղոգ.}\,\text{Ն}}{\text{Ղոգ.}\,\text{բ}}։$$

Ապա ուրեմն. Եթէ Ղոգարիթմունքն կարգին, որոյ խարիսխն ա իցէ, ծանուցեալ իցեն, սովաւ զղոգարիթմոսն որ զինչ եւ իցէ Ն թուոյ որպիսի ինչ եւ իցէ կարգի, որոյ Բ խարիսխ իցէ մարթ է գտանել, եթէ ոք զլոգարիթմոսն Ն թուոյ՝ ծանուցեալ կարգին, ի վերայ լոգարիթմեայ Բ խարսխին ի նմին կարգի բաժանիցէ:

354. Սովորական լոգարիթմական կարգին, որ եւ անուանեալ կոչի Բրիգեան կարգ, խարիսխն է 10: Արդ լոգարիթմոսն սովորական ինչ թուոյ է կարողութիւն 10անց: Ի սմին կարգի 10, 100, 1000, ... թուոց եւեթ լոգարիթմունքն ողջոյն թիւք են. իսկ լոգարիթմունքն այլոց թուոց կոտորք, որ տասներորդական կոտորովք յանդիման կացուցանին: Արդ լոգարիթմունքն այնց թուոց, որ ի մէջ 1 եւ 10 թուոյ (Տ. 346.) >0, այլ <1 են: Ըստ նմին օրինակի եւ լոգարիթմունք թուոցն որ ընդ մէջ 10 եւ 99 թուոյ են, են>1, այլ <2. եւ հասարակաց օրինակաւ լոգարիթմունք ամենայն թուոց, որ ընդ մէջ $10^{ֆ}$ եւ $10^{ֆ+1}$ թուոց անկանին, են $>ֆ$ եւ $<ֆ+1$: Զսացին զհետ գայ, եթէ ամենայն լոգարիթմունքս այսոքիկ կազմին ի ֆ յողջոյն թուոյ, որ անուանեալ կոչի Ցայտնիչ, եւ ի տասներորդական կոտորոյ, որ սաի Ցաւելուած լոգարիթմեայ: Նաեւ քանզի ամենայն թիւք որ ընդ մէջ $10^{ֆ}$ եւ $10^{ֆ+1}$ չափուց անկանին, ունին նշանակս $ֆ+1$, եւ յայտնիչ լոգարիտմեայց ամենայն թուոցս է ֆ, ուրեմն Ցայտնիչ սովորական լոգարիթմեայ թուոց՝ միով միութեամբ փոքր է քան զթիւ համարոյ նշանակացն յորոց ողջոյն թիւն այն կազմեալ իցէ:

355. Համարեսցուք եթէ իցէ Պ միջին երկրաչափական համեմատական թիւ Մ՝ եւ Ն թուոց. հարկ է զի լոգարիթմոսն Պ քանիօնութեան իցէ միջին համարողական համեմատական թիւ լոգարիթմեայց Մ՝ եւ Ն թուոց. քանզի որովհետեւ $Մ:Պ=Պ:Ն$, ուրեմն $Պ^2=ՄՆ$, ուստի եւ $Պ=\sqrt{ՄՆ}$ եւ (Տ. 350.),

$$\text{լոգ. } Պ = \frac{\text{լոգ. } Մ + \text{լոգ. } Ն}{2}:$$

Արդ զլոգարիթմոն իրիք թուոյ, զոր օրինակ 5 թուոյ գտանել կարիցես, եթէ առնուցուս զերկուս մերձաւոր թիւս յորոց միջի կայցէ 5, որոց եւ զլոգարիթմսն ծանուցեալ իցեն, (յօրինակի աստ են երկու թիւքս 1 եւ 10), եւ խնդրիցես զերկուց թուոյն այնոցիկ զմիջին երկրաչափական համեմատական թիւն. ուստի եւ

Ա. $1:\text{դ}=\text{դ}:10$. ուրեմն $\text{դ}=\sqrt{10}=3,162277$, եւ

$$\text{լոգ}.\ \text{դ}=\frac{\text{լոգ}.\ 1+\text{լոգ}.\ 10}{2}=\frac{0+1}{2}=0,5$$

Բ. Քանզի 5 ընդ մէջ երկուց դ եւ 10 թուոց կայ, վասն այսորիկ դարձեալ խնդրեա զե զմիջին երկրաչափական համեմատական թիւ սոցին դ եւ 10 թուոց, այս ինքն

$$\text{ե}=\sqrt{10\text{դ}}=\sqrt{31,622777}=5,623413\ \text{եւ}$$

$$\text{լոգ}.\ \text{ե}=\frac{\text{լոգ}.\ \text{դ}+\text{լոգ}.\ 10}{2}=\frac{1,5}{2}=0,75$$

Գ. Արդ քանզի 5 ի միջոցի դ եւ ե թուոց կայ, խնդրեա զզ զմիջին երկրաչափական համեմատական թիւ նոցա, որով ելանիցէ

$$\text{զ}=\sqrt{\text{դե}}=\sqrt{17,782789}=4,216964\ldots,\ \text{եւ}$$

$$\text{լոգ}.\ \text{զ}=\frac{\text{լոգ}.\ \text{դ}+\text{լոգ}.\ \text{ե}}{2}=\frac{1,25}{2}=0,625$$

Դ. Եթէ սոյն օրինակաւ յառաջ խաղայցես, գտանիցի

$$\text{է}=\sqrt{\text{եզ}}=\sqrt{23,713730}=4,869674\ldots,\ \text{եւ}$$

$$\text{լոգ}.\ \text{է}=\frac{\text{լոգ}.\ \text{ե}+\text{լոգ}.\ \text{զ}}{2}=\frac{1,375}{2}=0,6875$$

Ե. $\text{ը}=\sqrt{\text{զէ}}=\sqrt{27,384188}=5,232990$, եւ

$$\text{լոգ}.\ \text{ը}=\frac{\text{լոգ}.\ \text{զ}+\text{լոգ}.\ \text{է}}{2}=\frac{1,4375}{2}=0,71875$$

$$Զ.\ ք=\sqrt{ոք}=\sqrt{25,482955}=5,048064\ldots,\ \text{եւ}$$

$$ղոգ.\ ք=\frac{ղոգ.\ ո+ղոգ.\ ք}{2}=\frac{1,40625}{2}=0,703125$$

Արդ եթէ այնչափ ինչ յառաջ խաղայցես, մինչեւ միջին համեմատական թիւն ելանիցէ=5,0000000, որոյ եւթներորդ տասներորդական տեղին եւս իցէ =0, յայնժամ կարիցես զայն փոխանակ 5 թուոյ դնել, եւ զնորին ղոգարիթմսն = ղոգ. 5 համարել։

Այսու օրինակաւ զառաջինն առաջնորդք ղոգարիթմեայց գտին զղոգարիթմեայս, եւ զղոգարիթմական պատկերսն յօրինեցին։

Ցայնցանէ զորս ցայս վայր վասն ղոգարիթմեայցն ճառեցաք, մարթես ի միտ առնուլ ճանաչել, եթէ ի ձեռն ղոգարիթմեայց հաշուելն, փոփոխէ զբազմացուցանել ի յաւելուլ, զբաժանումն ի հանել, եւ զհամբառնալն ի կարողութիւնս ի բազմացուցանել, եւ զհանելն արմատս ի բաժանել։ Եւ եթէ զկարգ եւ որով օրինակաւ պարտ իցէ զասոյն ի կիր արկանել, կարիցէ այր իւրաքանչիւր, ինքնին սատար լինելով նմա օրինացն ասացելոց դիւրաւ ի վերայ հասանել։

Առաջին գտիչ եւ առաջնորդ ղոգարիթմեայցն եղեւ Յովհաննէս Նեպեր, Սեպուհ Մերգիստոնի, որ յամին հազարերորդի վեցհարիւրորդի չորեքտասաներորդի ընծայեցոյց յԷդինբուրկ գիրս, որ կոչի Նկարագիր զարմանալի ղոգարիթմական կանոնաց, եւ նոյին պէտք յերկուս երեքանկիւնաչափութիւնս, եւ մեկնութիւն խօսուն անուանեալ ուսողութեան։ Թէպէտեւ յառաջագոյն քան զնա Միքայէլ Շտիֆէլ ուղիղ ինչ միտս զայնմանէ իմացեալ էր, որպէս յայտ ի նորին գրոցն է, որ առ ի կատարեալ համարողութիւն. Նորիմբերգ. 1544. Գիրք. Ա. Գլ. Դ. Ե. եւ Գիրք Գ. Գլ. Ե։ Թէպէտեւ Նեպեր զառաջինն յօրինեաց զպատկեր ղոգարիթմական, այլ յետոյ եւ ինքնին իսկ ետես եթէ կարէր այնպիսի ինչ յօրինել, զոր դիւրագոյն մարթ էր այր իւրաքանչիւր ի կիր արկանել։ Քանզի Հենրիկոս Բրիգոս ուսուցիչ երկրաչափութեան յՕքսֆորդ յետ նորա յարդարեաց միւս եւս պատկեր կարի դիւրագոյն, եւ եդ խարիսխ 10, յորում գտանէին ամենայն ղոգարիթմսքն թուոց ի 1ոյ մինչեւ ց20000, եւ ի 90000է մինչեւ ց100000։ Զպակասութիւնն ի 20000է մինչեւ ց 90000 ելից Ադրիանոս Բղագգոս ուսող հոլլանդացի։ Իսկ այժմ են բազում պատկերք ղոգարիթմեայց, եւ գտաւ համառօտ օրինակ գտանելոյ զղոգարիթմեայս, քանզի երկայնագոյն է սովորական օրինակն որ ի Հ. 355 տեսցուք. այլ զի այս գործ է բարձրագոյն ուսողութեան, վասն որոյ զայն ի բաց թողաք: Արդ որ զպատկեր ղոգարիթմական ի ձեռին ունիցի, կարիցէ գտանել ի նմա տեղեկութիւնս կարեւորս, վասն զղոգարիթմայս ողջոյն թըւոց, եւ կոտորոց ի պատկերին գտանելոյ:

356. Ղոգարիթմունքն տասներորդական կոտորոց գտանին զայս ձեւ օրինակի: Իցէ Ր. թիւ ինչ, յորում $\text{Ն}+1$ նշանակք թուոց կայցեն, եւ $0,\text{մ}$ յայտ արարեալ ցուցանիցէ զբուն ինչ տասներորդական կոտոր. արդ

$$\text{ղոգ.}\,\text{Ր}=\text{Ն}+0,\text{մ}=\text{Ն},\text{մ} \text{ եւ}$$

$$\text{ղոգ.}\left(\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}\right)=\text{ղոգ.}\,\text{Ր}-\text{ղոգ.}\,10^{\text{ր}}, \text{ կամ}$$

$$\text{ղոգ.}\left(\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}\right)=\text{Ն},\text{մ}-\text{ր}=(\text{Ն}-\text{ր})+0,\text{մ}$$

Իսկ քանզի $\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}$ ցուցանէ տասներորդական կոտոր ինչ, յորում են ր տասներորդական տեղիք կամ ր նշանակք թուոց ընդ աջմէ ստիքսի բաժանման, եւ $\text{Ն}+1-\text{ր}$ կամ $\text{Ն}-\text{ր}+1$ նշանակք թուոց ի տեղիս ողջոյն թուոցն կամ ընդ ձախմէ ստիքսին. ապա ուրեմն եթէ կամք իցեն զղոգարիթմս տասներորդական կոտորոյ գտանել, պարտ է զյայտնիչն ըստ թուոյ նշանակացն որ ի տեղիս ողջոյն թուոցն կայցեն, եւ զյաւելուածն ըստ Ր. համարչի տասներորդական կոտորոյն գտանել:

Իսկ եթէ $\text{Ն}=\text{ր}$, այս ինքն եթէ $\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}$ տասներորդական կոտորն ի տեղի միաւորին մի նշանակիչ թիւ եւեթ ունիցի. յայնժամ ղոգ. $\left(\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}\right)=0,\text{մ}$. այլ եթէ $\text{Ն}<\text{ր}$ իցէ, ուստի եւ $\text{Ն}-\text{ր}$ ուրացական, զոր օրինակ $\text{Ն}-\text{ր}=-\text{ա}$ իցէ, յայնժամ եւ

$$\text{ղոգ.}\left(\frac{\text{Ր}}{10^{\text{ր}}}\right)=-\text{ա}+0,\text{մ}=-(\text{ա}-0,\text{մ})$$

ուրացական լինիցի, որպէս եւ հարկ իսկ է: Այլ սակայն մարթ է

$$\text{ղոգ}\cdot\left(\frac{\text{Ն.}}{10^{\text{ն}}}\right)=-(\text{ա}-0,\text{ն})=-(\text{ա}-1),\text{ն}'$$

դնել, եթէ ոք զլրումն 0, ն յաւելուածոյն առ մի միաթիւն յայտնչին=ն′ դնիցէ. այլ սակայն զի ուրացական ղոգարիթմոյն փոփոխիցի, պարտ է զայս օրինակ գրել

$$\text{ղոգ}\cdot\left(\frac{\text{Ն.}}{10^{\text{ն}}}\right)=0,\text{ն}-\text{ա}$$

եւ յայս հասարակաց օրինակս ղոգարիթմոյն անուանեալ կոչի կէս հասարակական: Ուրացական յայտնիչն —ա ցուցանէ ի սմին, եթէ յորում տասներորդական տեղւոջ կայցէ առաջին թիւն նշանակիչ:

Արդ դասնի ղոգարիթմոյն բուն տասներորդական ինչ կոտորոյ, եթէ ոք զյաւելուածն, որ համարչի կոտորոյն պատշաճիցի, ընդ ձախմէ կողմանէ ուրացական ցուցչի տասներորդական կոտորոյն դիցէ: Զսորին հակառակն եթէ առաջի կայցէ զուրացական ինչ ղոգարիթմայ — (ա — 1), ն′ զպատշաճական թիւն դասնել, պարտ է զառաջինն զայն ըստ համօրէն օրինակիս 0, ն—ա կէս հասարակական ղոգարիթմայ գրոշմել. ապա խնդրել զթիւն որ 0, ն յաւելուածոյ պատշաճիցի, եւ ընդ ձախմէ նորա դնել դատարկս ըստ յայտ առնելոյ միութեանց ցուցչին ա, եւ յետ այնորիկ հատանել զվերջին դատարկն իբրեւ զմիաւոր տիքսին բաժանման:

Արդ ըստ կանոնացս այսոցիկ եւ օգնականութեամբ ղոգարիթմական պատկերին դասնին

ղոգ· 5376,8=3,730524
ղոգ· 537,68=2,730524
ղոգ· 53,768=1,730524
ղոգ· 5,3768=0,730524
ղոգ· 0,53768=0,730524—1
ղոգ· 0,053768=0,730524—2

$$\text{ղոգ}\cdot\ 0{,}0053768=0{,}730524-3$$

այլովքն համդերձ ։

Եթէ $\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}=\text{ն}$, ժ լիցի, յայնժամ

$$\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}\cdot 10^{\text{ր}}=\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}+\text{ր}=(\text{ն}+\text{ր}),$$ ժ եւ

$$\text{ղոգ}\cdot \frac{\text{Ա}}{10^{\text{ր}}}=\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}-\text{ր}=(\text{ն}-\text{ր}),$$ ժ

Այս ուրեմն, Եթէ Ա թիւն կարողութեամբ իւիք 10թուոյ բազմացուցանիցի կամ բաժանիցի, ղոգարիթ-մոյն արդեանց զնոյն յաւելուած ունի որպէս թիւն Ա։

357 · Եթէ զերկու դասանիցի ղոգարիթմոյն տո-վորական կոտորոց, կարիցես ինքնին ի վերայ հաստա-նել ի 348 համարոյ, յորում ասացաւ եթէ $\text{ղոգ}\cdot \frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}=\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}-\text{ղոգ}\cdot \text{Բ}$։ Երկուց դիպաց մարթ է դիպել ի սմին, զի կամ $\text{Ա}<\text{Բ}$ եւ կամ $\text{Ա}>\text{Բ}$։ Եթէ $\text{Ա}>\text{Բ}$, յայնժամ եւ $\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}>\text{ղոգ}\cdot \text{Բ}$, ուստի եւ $\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}-\text{ղոգ}\cdot \text{Բ}=+\text{ա}$, եթէ զայլակերպութիւնն ա նշանագրով նշանակիցեմք ։ Օր օրինակ է $\text{ղոգ}\cdot\frac{5}{2}=\text{ղոգ}\cdot 5-\text{ղոգ}\cdot 2$ $=0{,}6989700-0{,}3010300=0{,}3979400$, եւ $\text{ղոգ}\cdot\frac{0{,}0876}{0{,}0239}$ $=0{,}9425041-2-(0{,}3783979-2)=0{,}9425041-2$ $-0{,}3783979+2=0{,}5641062$ ։

Այլ եթէ $\text{Բ}>\text{Ա}$, յայնժամ եւ $\text{ղոգ}\cdot \text{Բ}>\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}$, ուստի եւ $\text{ղոգ}\cdot \text{Ա}-\text{ղոգ}\cdot \text{Բ}=-\text{ա}$ ։ Օր օրինակ,

$$\text{ղոգ}\cdot\frac{2}{5}=\text{ղոգ}\cdot 2-\text{ղոգ}\cdot 5=0{,}3010300-0{,}6989700$$

$$=-(0{,}6989700-0{,}3010300)=0{,}3979400$$

Բայց սակայն զի եւ սաստէն եւս դարման լիցի ուրացական ղոգարիթմեայ, եւ զի դիւրութիւն լիցի ի համարելն, պարտ է (⸫ · 356) զուրացական յայտ-նիշն ի կիր արկանել, այս ինքն պարտ է ի նուազելն յաւելուլ միութիւնս, որչափ ինչ պէտք իցեն, զի այլակերպութիւն գտեալ լոգարիթմեայ հաստատական լինիցի, եւ յետ այնորիկ հանել անտի այնչափ միութիւնս։ Զոր օրինակ,

$$\text{լոգ.}\,\frac{2}{5}=0{,}3010300-0{,}6989700=1{,}3010300-$$

$$0{,}6989700-1=0{,}6020600-1$$

Լոգարիթմոսն բուն կոտորոյ գտանի, եթէ զսովորական կոտորն ի տասներորդական կոտոր շրջիցես, եւ ապա զլոգարիթմոսն խնդրիցես։ Զոր օրինակ

$$\text{լոգ.}\,\frac{2}{5}=\text{լոգ.}\,0{,}4=0{,}6020600-1,$$

որպէս վերագոյն։

Այլ եթէ կամք իցեն զլոգարիթմոսն խառն ինչ թուոյ գտանել, պարտ է զայն յառաջագոյն յանբուն ինչ կոտոր շրջել եւ կամ ի տասներորդական կոտոր, եւ ապա զերան վճարել ըստ վերագոյն ճառելոյ։ Զոր օրինակ,

$$\text{լոգ.}\,2\tfrac{1}{2}=\text{լոգ.}\,\frac{5}{2}=\text{լոգ.}\,5-\text{լոգ.}\,2=0{,}3979400 \text{ կամ},$$

$$\text{լոգ.}\,2^{1}_{2}=\text{լոգ.}\,2{,}5=0{,}3979400$$

ԳԼՈՒԽ Զ.

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ

ՀԱՏԱԾ Ա.

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄՕՐԷՆ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ

358. Հաւասարութիւնն է քանիօնութիւն նշանագրովք համարողութեան, որով հաւասարութիւն երկուց չափուց յայտ յանդիման կացուցանի: Հաւասարութիւնն կազմի յերկուց չափուց, որք հաւասարք իցեն միմեանց, յորոց ի միջի դրոշմի նշանըն հաւասարութեան, որպիսի ինչ Պ=Ռ.: Պ եւ Ռ. չափովք կարիցես զամենայն չափս հնարաւորս իմանալ, որ նախաւորքն իցեն, եւ որ յօդուածոյք, որ ողջոյն թիւք իցեն, եւ որ կոտորեալ, կամ հաստատունք եւ կամ առանց հաստատութեան: Բազում անդամ դէպ լինի, զի մին յերկուց չափուցն հաստատուն ինչ նշանակօք թուոց դրոշմեալ չափով նշանակիցի կամ ամենեւին=0 լինիցի: Արդ հաւասարութիւնս Պ=0 ցուցանէ, եթէ չափքն, յորոց Պ կազմիցի փոփոխ զմիմեանս եղծանեն: Պ եւ Ռ. չափքն յորոց՝կայ հաւասարութիւնն, անուանեալ կոչին Անդամք հաւասարութեան, Պ առաջին, իսկ Ռ. երկրորդ անդամ. իսկ չափքն, որ + կամ — նշանովք կայցեն յանդամս հաւասարութեան ասին Մասունք: Յանձնէ իսկ յայտ է եթէ չփոփոխի հաւասարութիւնն, յորժամ զանդամս հաւասարութեանն փոփոխիցես զոր օրինակ Պ=Ռ., նոյն է Ռ.=Պ:

Եթէ երկոքին անդամքն նովին նշանագրովք եւս միմեանց հաւասարք իցեն, որպէս Պ=Պ, յորջորջի Հաւասարութիւն զուգութեան: Զոր օրինակ,

$$\frac{\text{ա}+\text{բ}}{\text{գ}}=\frac{\text{ա}+\text{բ}}{\text{գ}}:$$

359. Կարես ի հաւասարութեան զոր ինչ եւ իցէ մասն ի միոյ անդամոյ ի միւս անդամն փոփոխել, առանց ինչ հաւասարութեանն եղծանելոյ, եթէ փոփոխիցես զնշանն, եւ այնպէս անդր տանիցիս:

Համարեսցուք եթէ $\text{Պ}-\text{Ռ}=\text{Ս}$ իցէ, ապա $\text{Պ}=\text{Ռ}+\text{Ս}$, քանզի (Հ. 20), բովանդակութիւն մնացորդին եւ հանելոյն հաւասար է նուազելոյն. եւ կամ եթէ յերկոսին կողմանս եւս հաւասարութեանն $+\text{Ռ}$ յաւելուցուս, լինիցի $\text{Պ}+\text{Ռ}-\text{Ռ}=\text{Ս}+\text{Ռ}$, որ է $\text{Պ}=\text{Ս}+\text{Ռ}$: Իսկ նմին օրինակի եթէ իցէ $\text{Պ}+\text{Ռ}=\text{Ս}$ հաւասարութիւնն, լինիցի $\text{Պ}=\text{Ս}-\text{Ռ}$, քանզի եթէ ի բովանդակութենէ, զմի մասն բովանդակութեանն հանցես, մնայցէ միւս մասն կամ եթէ ի նոյն հաւասարութիւն յաւելուցուս $-\text{Ռ}$, լինիցի $\text{Պ}+\text{Ռ}-\text{Ռ}=\text{Ս}-\text{Ռ}$ որ է $\text{Պ}=\text{Ս}-\text{Ռ}$: Որոց համօրէն օրինակ է

$$\text{Պ}\pm\text{Ռ}=\text{Ս},\ \text{նոյնպէս},$$
$$\text{Պ}=\text{Ս}\mp\text{Ռ}$$

360. Եթէ ամենայն մասունքն առաջին անդամոյն հաւասարութեան, զնշանս փոփոխելով յերկրորդ անդամ հաւասարութեան փոփոխիցին, նոյնպէս եւ ամենայն մասունք երկրորդին յառաջինն, եւ դարձեալ եւ ի սմին իսկ հաւասարութեան միւսանգամ անդամքն փոփոխիցին, չփոփոխի զօրութիւն հաւասարութեանն: Համարեսցուք եթէ իցէ

$$\text{Պ}+\text{Ռ}-\text{Ս}=\text{Վ}-\text{Տ},\ \text{ուրեմն եւ}$$
$$-\text{Վ}+\text{Տ}=-\text{Պ}-\text{Ռ}+\text{Ս},\ \text{եւ}$$
$$-\text{Պ}-\text{Ռ}+\text{Ս}=-\text{Վ}+\text{Տ}$$

Ուրեմն, Եթէ բովանդակ նշանքն ամենայն մասանց հաւասարութեան ի հակառակն փոփոխիցին, չեղծանի հաւասարութիւնն:

361. Եթէ ամենայն մասունքն միոյ յանդամոց հաւասարութեան հակառակ նշանօք ի միւս անդամ հաւասարութեան փոփոխիցին, յայնժամ չափն այն $=0$ լինիցի: Զոր օրինակ եթէ ի $Պ+Ռ=Ս-Վ$ հաւասարութեան զ $Ս-Վ$ անդամն ի միւս կողմն տանիցեմք, յայնժամ

$$Պ+Ռ-Ս+Վ=0 \text{ լինիցի, քանզի}$$
$$Ս-Վ-Ս+Վ=0 \text{ է:}$$

362. Ըստ 86 համարոյ իբրեւ $ԱՊ+Ռ=Ս$ հաւասարութիւնս ընդ $Ի$ բաժանիցի, լինիցի

$$\frac{ԱՊ+Ռ}{Ի}=\frac{Ս}{Ի} \text{ կամ } \frac{ԱՊ}{Ի}+\frac{Ռ}{Ի}=\frac{Ս}{Ի}$$

Արդ եթէ ամենայն մասանցն, որ յերկոսին անդամս հաւասարութեանն գտանիցին, մի համօրէն առնելի իցէ, մարթ է զհաւասարութիւնն կարճ ի կարճոյ դրոշմել, եթէ զամենայն անդամս հաւասարութեան ընդ նոյն համօրէն առնելին բաժանիցեմք: Սովաւ կարիցեմք զչափ ինչ, որ իբրեւ առնելի ի մի մասն հաւասարութեան գտանիցի եղծանել, զոր օրինակ զ$Ա$ առնելի ի մօտաւոր հաւասարութեանն զորմէ բանքս են, եթէ զբովանդակ հաւասարութիւնն ընդ $Ա$ բաժանիցեմք, որով

$$Պ+\frac{Ռ}{Ա}=\frac{Ս}{Ա} \text{ լինիցի:}$$

363. Եթէ հաւասար չափք հաւասար չափովք բազմացուցանիցին, գործեն հաւասար արդիւնս (Ա.61):

Արդ եթէ զերկոսին անդամս հաւասարութեանս $\frac{Պ}{Ա}+Ռ=Ս$, $Ի$ չափով բազմացուցանիցեմք, արդիւնքն լինիցին

$$\left(\frac{Պ}{Ա}+Ռ\right)Ի=ԻՍ \text{ կամ } \frac{ԻՊ}{Ա}+ԻՌ=ԻՍ$$

Եթէ ի հաւասարութեանս $Ա=Ի$ դնիցեմք, լինիցին արդիւնքն

Ապա, մարթ է յամենայն հաւասարութենէ զբաժանարարն ի բաց թողուլ, եթէ զբովանդակ հաւասարութիւնն, այս ինքն զամենայն մասունս հաւասարութեան նովին բաժանարարաւ բազմացուցանիցես։

364. Յորժամ հաւասար չափուց հաւասար ցուցիչք իցեն, եւ կարողութիւնքն եւս միմեանց հաւասարք են (Հ. 216)։ Զոր օրինակ եթէ $Ա+Գ=Ո$ իցէ, պարտ է զի $(Ա+Գ)^{ր}=Ո^{ր}$ լինիցի, եւ եթէ $\sqrt[ր]{(Ա+Գ)}=Ո$ իցէ, պարտ է զի $Ա+Գ=Ո^{ր}$ իցէ։

365. Եթէ ի հաւասար չափուց հաւասար արմատս հանցես, արմատքն միմեանց հաւասարք լինիցին։ Արդ եթէ $Գ=Ո$, պարտ է զի $\sqrt[ր]{Գ}=\sqrt[ր]{Ո}$ իցէ։

366. Քանզի հաւասար թիւք ի միում ղոգարիթմական կարգի հաւասար ղոգարիթմս ունին. վասն որոյ պարտ է զի $ղոգ.\,Գ=ղոգ.\,Ո$ իցէ, եթէ $Գ=Ո$։

367. Ի ձեռն հաւասարութեան յառաջագոյն իմացեալ, եթէ զինչ ինչ համեմատութիւն եւ հաղորդութիւն ունիցին ընդ միմեանս անծանօթ չափքն, եւ կամ անծանօթքն ընդ ծանօթս, կարիցեմք զզօրութիւնս անծանօթիցն գտանել։ Ամենայն կցորդութիւն, որ ի միջին կայցէ, անդստին ի հանդամանաց խնդրոյն ճանաչի, եւ այնպիսի իմն պարտ է լինել կցորդութեանն եւ հաղորդութեան, որպէս զի հաւասարութիւն իմն գտանիցի ընդ մէջ ծանօթիցն եւ անծանօթից։ Այլ թէ որպէս եւ որով օրինակաւ ի հանդամանաց խնդրոյն հաւասարութիւնն կազմիցի, չէ մարթ կանոնս հաստատունս գտանել։ Որպէս (Հ. 43.) ասացաք, անծանօթ չափքն, որ ի հաւասարութեանն գտանիցին, նշանակին յետին նշանագրովք այփափետացն, որպէս զի մարթ իցէ անդստին ի ծանուցելոց, կամ յայնցանէ, զորս իբրեւ ծանուցեալս համարիցիմք, որք առաջին նշանագրովք

աղփափետայն նշանակին, զատել որոշել: Նոյն եւս պարտ է միտ դնել, զի հաղորդութիւնն եւ կցորդութիւնն, որ ըստ հանգամանաց խնդրոյն ընդ մէջ չափուցն գտանիցի, կարի իսկ հաւաստեաւ եւ ճշգիւ նշանօք համարողութեան նշանակիցի: Որպիսի ինչ են մօտաւոր օրինակքս,

Ա. Զթիւն 60 յերկուս մասունս բաժանել, որք ընդ միմեանս համեմատիցին որպէս $2:3$:

Եթէ առաջին մասն իցէ $+$, երկրորդ մասն իցէ $60-+$, եւ ըստ հանգամանաց խնդրոյն $+:60-+=2:3$, յորմէ ելանէ հաւասարութիւնս $3+=(60-+)2$:

Բ. Երկուս թիւս գտանել, յորոց առաջինն երկուքումբք չափ մեծ իցէ քան զերկրորդն, եւ եթէ երկոքեանն եւս 20իւ չափ նուազիցին, այլակերպութիւն առաջնոյն երիւք չափ մեծագոյն լինիցի, քան զայլակերպութիւն երկրորդին:

Երկու թիւքն իցեն $\ddagger$ եւ $+$, արդ առաջին հաւասարութիւնն է $\ddagger=2+$, իսկ յերկրորդէն յառաջ գայ հաւասարութիւնս $\ddagger-20=3(+-20)$:

Գ. Գտանել թիւ ինչ $+$, որ երկու միութեամբք չափ մեծ իցէ քան զիւր երկրորդ արմատն: Ի հանգամանաց խնդրոյն յառաջ գայ հաւասարութիւնն $+=\sqrt{+}+2$:

368. Եթէ ոք կամիցի ի վերայ հասանել զօրութեան հաւասարութեանն, պարտ եւ պատշաճ է զզօրութիւն անծանօթ չափոյն գտանել: Արդ զի գտանիցի զօրութիւն անծանօթին, պարտ է յառաջ քան զամենայն ինչ զհաւասարութիւնն յամենայն կոտորոցն, յորս անծանօթ անդամն իբրեւ անուանիչ գտանիցի քակել. դարձեալ եթէ անծանօթ անդամն ի մի կամ ի բազում մասունս հաւասարութեան արմատական նշանոյն գտանիցի, պարտ է զարմատոյ նշանն ի միջոյ ի բաց բառնալ:

Յետ այսր ամենայնի ի գլուխ ելանելոյ, իբրեւ անծանօթ չափքն հաստատուն եւեթ ցուցիչս ունի-

ցին, յայնժամ պարտ է զամենայն չափս ի մի ան-
գամ հաւասարութեանն փոխել, եւ ապա զայն ըստ
կարգի ցուցչաց անծանօթիցն կարգել: Նոյն այս իսկ
է կարգեալ յարդարեալ հաւասարութիւն: Զոր
օրինակ,

Ա. Կարգեա զհաւասարութիւնս $\frac{3+7x}{4-3x}=5$:

Յորժամ ողջոյն իսկ հաւասարութիւնն $4-3x$ չա-
փով բազմացուցանիցի, ծագիցէ

$$3+7x=20-15x:$$

Յետ այնորիկ եթէ ամենայն չափքն ի մի անդամ
հաւասարութեան փոփոխիցին, լինիցի

$$3+7x-20+15x=0:$$

Ապա իբրեւ համազգի չափքն համառօտիւք դրոշ-
միցին, ելանիցէ

$$22x-17=0,$$

որ է կարգեալ եւ յարդարեալ հաւասարութիւն:

Բ. Ըստ նմին օրինակի կարգիցի հաւասարու-
թիւնս $\frac{3-5x}{4-x}=\frac{2+7x}{5+3x}$:

Եթէ երկոքին անդամքն $(4-x)\,(5+3x)$ չա-
փովք բազմացուցանիցին, առնիցեն զհաւասարու-
թիւնս

$$(3-5x)\,(5+3x)=(2+7x)\,(4-x):$$

Արդ եթէ յարդեանցն զհամազգի չափս կարճ ի կար-
ճոյ դրոշմիցես, կարգեալ յարդարիցի հաւասարու-
թիւնս, ուստի եւ

$$8x^2+42x-7=0:$$

Գ. Եթէ ի հաւասարութենէս $\frac{7x-5}{3x+1}+\frac{2x-1}{2x+1}$
$=5x-3$ զկոտորան ի բաց ջնջիցես, ելանիցէ

$$(7x-5)\,(2x+1)+(2x-1)\,(3x+1)$$
$$=(5x-3)\,(3x+1)\,(2x+1):$$

Արդ որպէս վերագոյն ասացաք, եթէ արդեամբք իսկ բազմացուցանիցես, եւ ապա կարճ ի կարճոյ դրոշմիցես, ելանիցէ

$$30\text{խ}^3-13\text{խ}^2-6\text{խ}+3=0:$$

369. Եթէ կամք իցեն զանձանօթ անդամն յարմատական նշանէն քակել, յառաջագոյն պարտ եւ պատշաճ է յայն միտ եդեալ նայել, եթէ մի կամ բազում անձանօթ չափք առանց հաստատութեան ի հաւասարութեանն գտանիցին. յորժամ մի առանց հաստատութեան անձանօթ չափ գտանիցի պարտ է զմեւս չափս հաստատունս ի մի անդամ հաւասարութեան կարգել, եւ զառանց հաստատութեան չափն ի միւս անդամ հաւասարութեան, եւ ապա զերկոսին անդամսն հաւասարութեանն համբառնալ ի կարողութիւն արմատական ցուցչին, զոր կամիցիս ի միջոյ ի բաց բառնալ: Զոր օրինակ,

Ա. Զհաւասարութիւնս $5\text{խ}-3\sqrt{\text{խ}}=7$ ի հաստատուն շրջեա:

Զհաստատուն չափս յառաջին անդամ, իսկ զառանց հաստատութեան չափս յերկրորդ անդամ հաւասարութեան կարգեա, զայս ձեւ օրինակի

$$5\text{խ}-7=3\sqrt{\text{խ}},$$

զոր իբրեւ յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցես, ելանիցէ

$$25\text{խ}^2-70\text{խ}+49=9\text{խ},$$

յորմէ եւ ծագէ կարգեալ եւ յարդարեալ հաւասարութիւնս

$$25\text{խ}^2-79\text{խ}+49=0:$$

Բ. Զ $3\sqrt[3]{(\text{խ}+2)}=3\text{խ}+\sqrt[3]{(\text{խ}+2)}$ ի հաստատուն շրջեա: Որովհետեւ ի հաւասարութեանս երկոքին արմատական չափքն համազգի են, յորժամ զերկոսեանն միանդամայն ի մի անդամ հաւասարութեան կարգիցեմք, եւ ապա կարճ ի կարճոյ դրոշմիցեմք, ելանիցէ

$$2\sqrt[3]{(ք+2)}=3ք:$$

Իբրեւ զհաւասարութիւնս յերրորդ կարողութիւն համբառնայցես, լինիցի

$$8\,(ք+2)=27ք^3,$$

որ եւ կարգեալ յարդարիցի զայս ձեւ օրինակի,

$$27ք^3-8ք-16=0:$$

Գ․ Հաւասարութիւնս $\sqrt[ն]{(2ք-1)}=\sqrt[2ն]{(ք+2)}$ հաստատուն լինիցի, եթէ զերկոսին անդամսն եւս հաւասարութեան ի 2ներորդ կարողութիւն համբառնայցես, ուստի եւ լինիցի

$$\sqrt[ն]{(2ք-1)^{2ն}}=ք+2, \text{ եւ}$$

$$(2ք-1)^2=ք+2, \text{ կամ,}$$

$$4ք^2-4ք+1=ք+2,$$

որ եւ կարգեալ յարդարիցի այսպէս

$$4ք^2-5ք-1=0:$$

370. Ապա եթէ բազում օտարազգի առանց հաստատութեան չափք ի հաւասարութեանն գտանիցին, մարթ է մի ըստ միոջէ զարմատական նշանսն ի միջոյ ի բաց բառնալ, եթէ զերկոսին անդամսն եւս հաւասարութեանն կարգ ըստ կարգէ ի կարողութիւն արմատական ցուցչացն համբառնայցես, որպէս ի մօտաւոր օրինակացն երեւիցի:

Ա․ Զհաւասարութիւնս

$$2\sqrt{(ք+2)}-3\sqrt{(ք-1)}=5\sqrt{(2ք-3)}$$

ի հաստատուն շրջեա:

Իբրեւ երկաքին անդամքն հաւասարութեան յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցեն, առնիցեն

$$4(ք+2)+9(ք-1)-12\sqrt{((ք+2)(ք-1))}=25(2ք-3)$$

Զորս եթէ արդեամբք իսկ բազմացուցանիցես, եւ զարդիւնսն կարճ ի կարճոյ դրոշմիցես, եւ զհաստատուն չափս յառաջին անդամ հաւասարութեան, եւ զառանց հաստատութեան չափսն յերկրորդ անդամ կարգիցես, ելանիցէ

$$74-37\text{ք}=12\sqrt{(\text{ք}^2+\text{ք}-2)}:$$

Եթէ զայս հաւասարութիւն դարձեալ յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցես, առնիցի,

$$5476-5476\text{ք}+1369\text{ք}^2=144\text{ք}^2+144\text{ք}-288,$$

կամ կարգեալ եւ յարդարեալ զայս օրինակ,

$$1225\text{ք}^2-5620\text{ք}+5764=0:$$

Բ. Զհաւասարութիւնս $3\sqrt{\text{ք}}-1=2\sqrt[3]{\text{ք}}$ ի հաստատուն շրջեա:

Եթէ զերկոսին անդամն եւս յերրորդ կարողութիւն համբառնայցես, ելանիցէ,

$$27\text{ք}\sqrt{\text{ք}}-27\text{ք}+9\sqrt{\text{ք}}-1=8\text{ք} \text{ կամ},$$
$$9(3\text{ք}+1)\sqrt{\text{ք}}=35\text{ք}+1$$

Որդ իբրեւ հաւասարութիւնս յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցէ, առնիցէ,

$$81(9\text{ք}^2+6\text{ք}+1)\text{ք}=1225\text{ք}^2+70\text{ք}+1, \text{ կամ}$$
$$729\text{ք}^3+486\text{ք}^2+81\text{ք}=1225\text{ք}^2+70\text{ք}+1,$$

որ եւ կարգեալ յարդարիցի այսպէս,

$$729\text{ք}^3-739\text{ք}^2+11\text{ք}-1=0:$$

371. Իբրեւ յայսպիսի ինչ կարգեալ յարդարեալ հաւասարութենէ զզօրութիւն անծանօթ անդամոյն գտանել կամիցիս, եւ կամ եթէ բուն իսկ զօրութիւնն գտեալ իցէ, հարկ է զի իբրեւ փոխանակ անծանօթին զզօրութիւնն դնիցես, հաւասարութիւն ինչ զուգութեան երեւիցի: Զոր օրինակ ի $3\text{ք}^2-5\text{ք}+2=0$ հաւասարութեանս անծանօթն $\text{ք}=1$ իցէ, լինիցի $3-5+2=0$ կամ $0=0$. ուստի եւ $\text{ք}=1$ է բուն զօրութիւն անծանօթ չափոյն հաւասարութեան: Այլ եթէ որպէս եւ որոշ օրինակաւ գտանիցի զօրութիւնն, տատանցուք մի բառ միոջէ, որ եւ կախեալ իսկ է զբարձրագոյն կարողութենէ անծանօթին, որ ի հաւասարութեան անդ գտանիցի:

ՀԱՏԱԾ Բ

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ԱՌԱՋՆՈՅ ԱՍՏԻՃԱՆԻ

372. ԿԱՐԳԵԱԼ *եւ յարդարեալ հաւասարութիւն ինչ անուանեալ կոչի Առաջնոյ աստիճանի, յորում կարողութիւն անծանօթ չափոյն առաջին եւեթ կարողութիւն իցէ։ Սորին ազգի հաւասարութիւնք հասարակաց իմն օրինակաւ գրուելին զայս օրինակ* $Պ+ \pm Ռ = 0$, *յորում* Պ *եւ* Ռ *իբրեւ ծանուցեալ ինչ չափք համարեալ են, եւ զօրութիւն անծանօթ չափոյն գտանիցի, յորժամ* զՌ *չափն յերկրորդ անդամ հաւասարութեան կարգիցէ ոք, եւ ընդ* Պ *գործակից* + *անծանօթ չափոյն զբովանդակ հաւասարութիւնն բաժանիցէ, զայս օրինակ* $+ = \frac{Պ}{Ռ}$։ *Զոր օրինակ,*

Ա. Ի $ա(բ + գ+) = դ(ե + զ+) + է$, *նոյն օրինակաւ, զոր վերագոյն յիշատակեցաք, ելանիցէ,*

$$+ = \frac{դե + է - աբ}{ագ - դզ}։$$

Բ. *Հաւասարութիւնս* $\frac{ա+}{բ} + \frac{գ+}{դ} + \frac{ե+}{է} = զ + \frac{մ+}{ն}$

տանէ

$$+ = \frac{բդզէն}{ադէն + բգէն + բդեն - բդէմ}։$$

Գ. Ի $(ա+ + բ)(գ+ + դ) = (ա+ + ե)(գ+ + զ) + է$ *հաւասարութենէս, ելանէ,*

$$+ = \frac{է + եզ - բդ}{ա(դ - զ) + գ(բ - ե)}։$$

Դ. $\frac{ա+^{2}}{բ + գ+} = \frac{դ+^{2}}{ե + զ+}$ *հաւասարութիւնս իբրեւ ընդ* $+^{2}$ *բաժանիցի, տայ*

$$\frac{ա}{բ+գք}=\frac{դ}{ե+զք},$$ յորմէ դարձեալ

$$ք=\frac{բդ-աե}{ազ-գդ}$$ գտանիցի ։

Ե. $ա\sqrt[ն]{(բ+գք)}=ե+դ\sqrt[ն]{(բ+գք)}$ ։

Իբրեւ զհամազգի արմատական չափս հաւասարութեան յառաջին անդամն կարգիցես, լինիցին,

$$(ա-դ)\sqrt[ն]{(բ+գք)}=ե,$$

եւ եթէ զերկոսին անդամսն եւս ի ներորդ կարողութիւն համբառնայցես, լինիցին

$$(ա-դ)^ն(բ+գք)=ե^ն$$

յորմէ եւ $$ք=\frac{ե^ն-բ(ա-դ)^ն}{գ(ա-դ)^ն}$$

Զ. Համարեսցուք եթէ $ա\sqrt[ն]{(բ+գք)}=դ\sqrt[ն]{(ե+զք)}$ իցէ ։

Համբարձեալ զերկոսին անդամսն եւս ի ներորդ կարողութիւն, լինիցի

$$ա^ն(բ+գք)=դ^ն(ե+զք),$$

որ հաւասարութիւնն,

$$ք=\frac{դ^նե-ա^նբ}{ա^նգ-դ^նզ}=\frac{ա^նբ-դ^նե}{դ^նզ-ա^նգ}$$ գործէ ։

Է. $\frac{ա+բ\sqrt[ն]{(է+ք)}}{գ+դ\sqrt[ն]{(է+ք)}}=ե$ ։ Յառաջինն քակեա զհաւասարութիւնն ի կոտորոյն, եւ լինիցի

$$ա+բ\sqrt[ն]{(է+ք)}=գե+դե\sqrt[ն]{(է+ք)}$$ կամ

$$(բ-դե)\sqrt[ն]{(է+ք)}=գե-ա,$$ եւ

$$\sqrt[ն]{(է+ք)}=\frac{գե-ա}{բ-դե}$$ ։

Իսկ հաւասարութիւնս ի ներորդ կարողութիւն համբառնայցէ, լինիցի

$$1+\text{ք}=\left(\frac{\text{գղ}-\text{ա}}{\text{բ}-\text{դղ}}\right)^{\text{ն}},\ \text{եւ}$$

$$\text{ք}=\left(\frac{\text{գղ}-\text{ա}}{\text{բ}-\text{դղ}}\right)^{\text{ն}}-1:$$

373. Եթէ ի հաւասարութեան անծանօթ չափն իբրեւ ցուցիչ ի վերայ ծանուցեալ ինչ չափոյ գտանիցի, որպիսի ինչ $\text{ա}^{\text{ք}}=\text{բ}$, զզօրութիւն անծանօթին կանոնովք ղոգարիթմեայց եւեթ հնար է գտանել: Այս ինքն (Հ. 366.), $\text{ղոգ. ա}^{\text{ք}}=\text{ղոգ. բ}$, եւ (Հ. 349.) $\text{ղոգ. ա}^{\text{ք}}=\text{ք. ղոգ. ա}$, ուստի եւ

$$\text{ք. ղոգ. ա}=\text{ղոգ. բ},\ \text{եւ}$$

$$\text{ք}=\frac{\text{ղոգ. բ}}{\text{ղոգ. ա}}:$$

Դիցուք դրեսցուք եթէ $\text{ղա}^{\text{մք}+\text{ն}}=\text{լբ}^{\text{րք}+\text{ս}}$ իցէ, ի նոյն իսկ սկզբանց յայտ է, եթէ

$\text{ղոգ. ղ}+(\text{մք}+\text{ն})\,\text{ղոգ. ա}=\text{ղոգ. լ}+(\text{րք}+\text{ս})\,\text{ղոգ. բ}$, կամ

$\text{ղոգ. ղ}+\text{մք ղոգ. ա}+\text{ն ղոգ. ա}=\text{ղոգ. լ}+\text{րք ղոգ. բ}+\text{ս ղոգ. բ}$

լինիցի, յորում իբրեւ զծանօթսն ի մի անդամ, եւ զանծանօթսն ի միւս անդամ հաւասարութեան կարգիցես, լինիցի,

$\text{մք ղոգ. ա}-\text{րք ղոգ. բ}=\text{ղոգ. լ}-\text{ղոգ. ղ}+\text{ս ղոգ. բ}-\text{ն ղոգ. ա}$,

կամ,

$\text{ք}(\text{մ ղոգ. ա}-\text{ր ղոգ. բ})=\text{ղոգ. լ}-\text{ղոգ. ղ}+\text{ս ղոգ. բ}-\text{ն ղոգ. ա}$

եւ

$$\text{ք}=\frac{\text{ղոգ. լ}-\text{ղոգ. ղ}+\text{ս ղոգ. բ}-\text{ն ղոգ. ա}}{\text{մ ղոգ. ա}-\text{ր ղոգ. բ}}:$$

Զօրութիւն նորին իսկ անծանօթ չափոյն գտանի եւ այլով իմն օրինակաւ:

Հաւասարութիւնն, զոր եդաք՝ հաւասար է ամենեւին նմանւոր հաւասարութեանս

$$\text{ղ. ա}^{\text{մք}}.\ \text{ա}^{\text{ն}}=\text{լ. բ}^{\text{րք}}.\ \text{բ}^{\text{ս}}:$$

Իբրեւ հաւասարութիւնս ընդ $\text{ղ. ա}^{\text{ն}}.\ \text{բ}^{\text{րք}}$ բաժանիցի առնիցէ

$$\frac{\text{ա}^{\text{մ}+}}{\text{բ}^{\text{ր}+}}=\left(\frac{\text{ա}^{\text{մ}}}{\text{բ}^{\text{ր}}}\right)^{+}=\frac{\text{կ}\cdot\text{բ}^{\text{ո}}}{\text{ղ}\cdot\text{ա}^{\text{ն}}},\ \text{յորմէ}$$

$$+(\text{լոգ}\cdot\text{ա}^{\text{մ}}-\text{լոգ}\cdot\text{բ}^{\text{ր}})=\text{լոգ}\cdot\text{կ}+\text{ո լոգ}\cdot\text{բ}-\text{լոգ}\cdot\text{ղ}-\text{ն լոգ}\cdot\text{ա}$$

կամ

$$+=\frac{\text{լոգ}\cdot\text{կ}+\text{ո լոգ}\cdot\text{բ}-\text{լոգ}\cdot\text{ղ}-\text{ն լոգ}\cdot\text{ա}}{\text{մ լոգ}\cdot\text{ա}-\text{ր լոգ}\cdot\text{բ}}$$

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. **Խնդիր**: Գտանել թիւ ինչ, յոր իբրեւ զիւր կէսն յաւելուցու ոք, բովանդակութիւնն հաւասար իցէ 12 թուոյ:

Կազմած հաւասարութեանն եւ Պատասխանի:

Թիւն զոր խնդրեմք իցէ +, ուստի եւ կէսն է $\frac{+}{2}$: Արդ

$+ + \frac{+}{2} = 12$, եւ $+ = 8$:

Բ. **Խնդիր**: Գտանել թիւ ինչ որ ընդ 3 բաժանեալ, քանորդն հաւասար իցէ այլակերպութեանն՝ որ ծագէ ի հանելոյ ի նմանէ զ30:

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի: Չծանուցեալ թիւն + իցէ, արդ իբրեւ զայն ընդ 3 բաժանիցեմք, լինիցի $\frac{+}{3}$· դարձեալ եթէ ի նմանէ հանցես զ30, ծագէ $+-30$, որով եւ ի հանգամանաց խնդրոյն յայտ է եթէ

$$\frac{+}{3}=+-30,$$

ուստի $+=45$:

Գ. Հարցին ոմանք ցԱ., եթէ որչափ ինչ մուտս ամսոյ ամսոյ ունիցի: Պատասխանի ետ եւ ասէ. Եթէ զկէսն, եւ զերրորդ մասն եւ զչորրորդ մասն մտից իմոց միահամուռ գումարիցէք, աւելուցու քան զմուտս իմ 2 դահեկանօք: Արդ որչափ իցեն մուտքն:

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Դնիցուք գրեացուք եթէ մուտքն իցեն $\dagger$. արդ $\frac{\dagger}{2}$ է կէսն, $\frac{\dagger}{3}$ երրորդ մասն, $\frac{\dagger}{4}$ չորրորդ մասն, որք միանգամայն առեալ են $\frac{\dagger}{2}+\frac{\dagger}{3}+\frac{\dagger}{4}$: Արդ քանզի այս երկու դահեկանօք առաւել է քան զ$\dagger$, ապա ուրեմն

$$\frac{\dagger}{2}+\frac{\dagger}{3}+\frac{\dagger}{4}-2=\dagger,$$

ուստի եւ $\dagger=24$:

Գ. Խնդիր: Պարտ է զ63 դահեկանս գերմանացւոց ի չորս արս մուրացիկս Ա., Բ., Գ., Դ. բաժանել, որպէս զի Բ. աղքատն մի դահեկան աւելի քան զԱ. առնուցու, իսկ Գ. մի դահեկան առաւել քան զԱ. եւ զԲ. միանգամայն. եւ Դ. մի դահեկան աւելի քան զոր երեք առաջինքն առեալ իցեն:

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Դնիցուք գրեացուք եթէ

Ա. առնուցու $\dagger$ դահեկան, զորին զհետ գայ զի
Բ. „ $(\dagger+1)$ դահեկան, իսկ
Գ. „ $(2\dagger+1+1)=(2\dagger+2)$ դահեկանս, եւ
Դ. „ $\dagger+\dagger+1+2\dagger+2+1=(4\dagger+4)$ դահ.

Արդ քանզի բովանդակութիւն ամենայն դահեկանաց, զոր առնլոց են աղքատքն $=63$ է, ուրեմն

$$\dagger+\dagger+1+2\dagger+2+4\dagger+4=63 \text{ իցէ, կամ}$$
$$8\dagger+7=63$$
$$8\dagger=63-7=56$$
$$\dagger=\frac{56}{8}=7.$$

ուստի Ա. առնուցու 7 դահեկանս, Բ. $7+1=8$, Գ. $15+1=16$, իսկ Դ.՝ $31+1=32$. եւ $7+8+16+32=63$:

Ն. Խնդիր: Ճենական ոմն ասաց ցընկերակիցս իւր. ասէ: Այսօր 5 քոռս ցորենոյ գնեցի: Յանցելում ամի 9 քոռս ցորենոյ միով դահեկանաւ աւելի քան զ5 քոռսս գնոց առեալ էր իմ: Արդ 3 դահեկանաւ չափ ծանրագնոյ գնեալ է իմ զմի քոռ ցորենոյ քան զքոռն անցելոյ ամին. կամիմք գիտել, եթէ քանոյ առեալ իցէ զմի մի քոռ ցորենոյն:

Վարժ. հաւ. եւ Պատասխանի: Դիցուք գրեացուք եթէ + իցէ գինք 5 քոռ ցորենոյն, ապա ուրեմն 1 քոռ ցորեանն $\frac{+}{5}$ դահեկանաց է: Միով ամաւ յառաջ զ9 քոռս ցորենոյ գնեաց $(+ + 1)$ դահեկանաց, որոյ մի մի քոռն էր $\frac{+ + 1}{9}$: Արդ ի հանգամանաց խնդրոյն յայտ է, եթէ

$$\frac{+}{5} = \frac{+ + 1}{9} + 3$$

այսինքն եթէ գինք 5 քոռ ցորենոյ իցէ 35 դահեկան, եւ 1 քոռն $\frac{35}{5} = 7$ դահեկան, եւ միով ամաւ յառաջագոյն 1 քոռն էր $7 - 3 = 4$ դահեկանաց:

Ձ. Խնդիր: Պանդոկապետ ոմն խառնեաց զ8 մարս գինւոյ յերկուց ազգաց գինւոյ: Եւ վասն 1 շիշ գինւոյ առաջնոյ ազգին արկ գինս 1 դահեկան գերմանացւոց, իսկ վասն երկրորդ ազգին 48 նաքարակիտս: Արդ զխառնեալ գինին վաճառեաց զ1 մար 35 դահեկանաց: Կամիմք գիտել, եթէ որչափ ինչ յիւրաքանչիւր ազգաց գինւոյ, զոր խառնեացն առեալ իցէ:

Վարժ. հաւ. եւ Պատասխանի: Դիցուք գրեացուք եթէ յայնիւ գինւոյն + մարս առեալ իցէ, աստատին յայտ է եթէ 8—+ յերկրորդ յուի գինւոյն առնուցու: Մար մի գինւոյ առաջին ազգին է 40 դահեկանաց, ուստի եւ + մարքն 40+ դահեկանաց. իսկ մար մի յերկրորդ ազգէն է 40 × 48 նաքարակիտ =40 × $\frac{4}{5}$ դահեկ. = 32 դահեկանաց, ուստի եւ 8 — + մարքն 32 (8 — +) դահեկանաց: Եւ քանզի զբովանդակ խառնուածն 8 × 35 = 280 դահեկանաց վաճառեաց, ապա ուրեմն հարկ է զի 40+ + 32 (8 — +) = 280 լինիցի, կամ

40+ + 256 — 32+ = 280

8+ = 280 — 256 = 24

+ = $\frac{24}{8}$ = 3, եւ 8 — + = 8 — 3 = 5

այս ինքն 5 մար ի յոռի գնոյ անտի եւ 3 մար յազնիւ գնոյն խառնեալ է:

Է. Խնդիր: Ասաց Գայոս. 46 ամաց եմ. անդրանիկն յորդւոց իմոց 11 ամաց է, իսկ մանկագոյնն 9 ամաց: Ե՞րբ ամք երկոցունց որդւոցս միահամուռ գումարեալ հաւասար իցէ հասակի ամաց իմոց:

Կազմած հաւ. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք եթէ այն դիպիցի ի +երորդ ամի, յայնժամ հայրն լինիցի 46 + + ամաց, անդրանիկն 11 + + ամաց, իսկ մանկագոյնն 9 + + ամաց. ուստի եւ

46 + + = 11 + + + 9 + +, կամ

46 + + = 20 + 2+, ուստի եւ

46 — 20 = +, այս ինքն + = 26:

Ը. Խնդիր: Հայրն խոստացաւ որդւոյ իւրում, զի եթէ բարւոք եւ փութով աշխատ լինիցի եւ գործիցէ տալ նմա յաւուրն 10 նաքարակիտս գերմանացւոց. այլ եթէ յուլութեամբ զժամանակն ծախիցէ, առնուլ ի նմանէ 18 նաքարակիտս: Արդ ի կատարել աւուրցն երեսնից, շահեցաւ որդին 2 դահեկանս եւ 12 նաքարակիտս: Կամիմք ի վերայ հասանել, եթէ քանի ինչ աւուրս բարւոք գործեալ իցէ որդին, եւ որչափ ինչ աւուրս չարւոք:

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի: Եթէ զաւուրս

յորս բարւոք գործեալ իցէ x չափով նշանակիցեմք, յայտ է եթէ այլ աւուրքն յորս չարւոքն գործեաց $30-x$ իցեն: Որդին էառ ի հօրէն $10x$ նաք., եւ տուժեաց $18(30-x)$ նաքարակիտս, եւ քանզի ի գլուխ ամսոյն 2 դահեկանս եւ 12 նաքարակիտս կամ 132 նաք. ստացեալ էր, ստատին ելանէ հաւասարութիւնս $10x-18(30-x)=132$ յորմէ եւ

$$10x-540+18x=132$$

$$28x=132+540=672$$

$$x=\frac{672}{28}=\frac{168}{7}=24,$$ եւ

$$30-x=30-24=6,$$

այս ինքն որդին 24 աւուրս փութով գործեալ է, իսկ 6 աւուրս յուլութեամբ:

Թ. Խնդիր: Երկու մարմինք Մ եւ Մ' շարժին ուղղութեամբ ըստ միոյ ուղիղ գծի. Մ ընթանայ ի Ժ. ժամանակի զանջրպետութիւնն Ա., իսկ Մ' ի Ժ' ժամանակի զանջրպետս վայրացն ա: Իսկ բացարձակութիւնք վայրացն յորոց երկուքին մարմինքն սկիզբն արարեալ իցեն շարժելոյ՝ իցէ Բ. եւ խտիրն կամ այլակերպութիւն ժամանակացն, յորս սկսանիցին մարմինքն յառաջ խաղալ՝ իցէ Խ: Արդ կամիմք գտանել զվայրն, յորում երկուքին մարմինքն զմիմեանս հատանիցեն, կամ լաւ եւս ասել, զճանապարհն, զոր երկուքին մարմինքն մինչեւ ի միմեանս հասանել իւրեանց, հատանիցեն:

Պատասխանի: Ի խնդիրս երկու գլխաւոր դէպք են. զի երկու Մ եւ Մ' մարմինքն կամ ըստ միոյ ուղղութեան շարժին, եւ կամ հակառակ հանդէպ երեսաց միմեանց:

Ա. ԴԷՊՔ: Զի առաւել յայտնապէս երեւիցի զոր ասելոցս եմք, կամք են մեզ զմտաւոր ձեւս յաւելուլ,

Գ'' ———————— Ա. Գ' Բ. ———————— Գ.

յորում ԱԲ ցուցանէ զլայնարձակութիւն վայրացն երկոցունց մարմնոց, որ է բ. եւ դիցուք եթէ ֆ իցէ ի Ա վայրի, եւ ֆ' ի Բ, եւ երկոքին շարժիցին ի Գ կոյս։ Դարձեալ համարեսցուք եթէ երկոքին մարմինքն ի Գ վայրի զմիմեանս հատանիցեն, ուստի եւ ճանապարհն ընդ որ ֆ մարմինն անցեալ իցէ, իցէ ք, այս ինքն ԱԳ=ք. զորս զհետ գայ, եթէ ԲԳ=ԱԳ—ԱԲ =ք—բ ճանապարհ ֆ' մարմնոյն լինիցի։

Քանզի յառաջագոյն իսկ համարեցաք. եթէ շարժումն երկոցունց մարմնոցն մի օրինակ իցէ. արդ յանձնէ իսկ յայտ է եթէ յորժամ զք ծանուցեալ գնիցեմք, այնուհետեւ զժամանակն ժ, եւ ժ', որք վասն հատանելոյ զհաստատուն ինչ անջրպետութիւն ֆ եւ ֆ' մարմնոյն կարեւորքն իցեն, կարիցեմք ի ձեռն մտաւոր համեմատութեանս գտանել։ Քանզի

$$ժ : ձ = ք : Ա, \text{ յորում } ժ = \frac{ձք}{Ա}$$

$$ժ' : ճ = ք—բ : ա, \text{ յորում } ժ' = \frac{ճք—բճ}{ա}$$

Ի հասարակաց օրինակի աստ երկու դէպք գտանին այլեւայլք եւ այլակերպք ի միմեանց, քանզի մարթ է $\frac{ձք}{Ա} \gtrless \frac{ճք—բճ}{ա}$ լինել, այս ինքն կարէ ֆ մարմինն յառաջագոյն կամ զկնի քան զ ֆ' սկիզբն առնել շարժելոյ։

Ա. Յառաջինն դէպն է $\frac{ձք}{Ա} > \frac{ճք—բճ}{ա}$, ուստի եւ ի հանդամանաց խնդրոյն ծագէ հաւասարութիւնս $\frac{ձք}{Ա} - ի = \frac{ճք—բճ}{ա}$, ուստի եւ

$$աձք—Աաի=Աճք—բճԱ$$
$$աձք—Աճք=Աաի—բճԱ$$
$$(աձ—Աճ)ք=Ա(աի—բճ), \text{ եւ}$$
$$ք=\frac{Ա(աի—բճ)}{աձ—Աճ}, \text{ կամ } ք = \frac{Ա(բճ—իա)}{Աճ—աձ}$$

Բ. Իսկ եթէ Մ՛ ի միասին ժամանակի յառաջագոյն շարժիցի քան զՄ, յայնժամ ելանիցէ $\frac{վք}{Ա}+խ$ $=\frac{ծք-բծ}{ա}$, ուստի եւ

$$ավք+Աախ=Ածք-Աբծ, \text{ եւ}$$
$$Աբծ+Աախ=Ածք-ավք,$$
$$Ա(բծ+ախ)=(Ած-ավ)ք,$$
$$ք=\frac{Ա(բծ+խա)}{Ած-ավ}:$$

Հասարակաց օրինակքս փոփոխին յազգի ազգի կերպարանս:

1. Եթէ այնպէս իմն դնիցեմք, զի երկոքին մարմինքն պահեալ զայլ հանգամանս իւրեանց, ի նմին ժամանակի շարժիցին, որպէս զի ի հասարակաց օրինակի անդ լինել $խ=0$, յայնժամ հաւասարութիւնն լինիցի

$$ք=\frac{բծԱ}{Ած-ավ}:$$

2. Դիցուք դրեսցուք եթէ Մ եւ Մ՛ մարմինքն ի միջէ վայրէ, զոր օրինակ ի Ա տեղւոյէ անտի, չփոփոխեալ զայլ հանգամանսն, շարժիցին. յայտ է եթէ ի հաւասարութեան անդ մարթեմք $բ=0$ դնել. յորմէ ծագէ

$$ք=\frac{-խաԱ}{Ած-ավ}=\frac{խաԱ}{ավ-Ած},$$

եթէ Մ յառաջագոյն սկիզբն արարեալ իցէ շարժելոյ, եւ

$$ք=\frac{խաԱ}{Ած-ավ},$$

յորժամ Մ՛ յառաջագոյն շարժեալ իցէ:

3. Արդ եթէ Մ եւ Մ՛ մարմինքն ի միում ժամանակի, ի նմին վայրէ շարժիցին, որպէս զի լինել

$\text{բ}=0$, եւ $\text{խ}=0$, յայնժամ

$$\text{ք}=\frac{\text{Ա}\cdot 0}{\text{Ած}-\text{աձ}}=0,$$

այս ինքն եթէ չհանդիպին միմեանց:

4. Դիցուք գրեսցուք եթէ $\text{ձ}=\text{ծ}=1$ իցէ, յայնժամ $\text{ք}=\frac{\text{Ա}(\text{բ}-\text{խա})}{\text{Ա}-\text{ա}}$, եթէ Մ յառաջագոյն շարժեալ իցէ. եւ $\text{ք}=\frac{\text{Ա}(\text{բ}+\text{խա})}{\text{Ա}-\text{ա}}$, եթէ Մ' վաղագոյն շարժիցի: Ապա եթէ եւ $\text{Ա}=\text{ա}$, եւ $\text{բ}=\text{խ}=0$, յայնժամ յառաջին հաւասարութենէ անտի ելանէ $\text{ք}=\frac{0}{0}$, կամ $\text{ք}\cdot 0=0$: Արդ եթէ այս իցէ յետին արդիւնքն, յայտ արարեալ ցուցանէ զերայն անհաստատութիւն, եւ որ զինչ զօրութիւն փոխանակ ք չափոյն դնիցես, ցանդ ելանէ $\text{ք}\cdot 0=0$, կամ $\text{ք}=\frac{0}{0}$, որ յայտ արարեալ ցուցանէ եթէ Մ եւ Մ' մարմինք ցանդ ի միասին շարժին:

Սոցին նման մարթ է եւ յայլ կերպարանս զհաստատակաց օրինակն փոփոխել:

Բ. ԴԷՊՔ: Համարեսցուք եթէ երկուքին մարմինքն Մ եւ Մ' հակառակ հանդէպ երեսաց միմեանց շարժիցին. արդ եթէ զանջրպետութիւն վայրացն ընդ որ Մ անցեալ իցէ, $\text{ԱԳ}'=\text{ք}$ դրիցեմք, յայնժամ ճանապարհն, զոր Մ' հատեալ իցէ $=\text{ԲԳ}'=\text{ԱԲ}-\text{ԱԳ}'=\text{բ}-\text{ք}$ լինիցի: Սորթեմք յերկոսին եւս հաւասարութիւնս որ յառաջին դէպսն ի հանդամանաց խնդրոյն ծագեցան, ընդ այր $\text{ք}-\text{բ}$ չափոյ դնել $\text{բ}-\text{ք}$, զի զերկրորդ դէպս ճշդիւ լուծանել կարիցեմք: Արդ

Ա. $$\frac{\text{ձք}}{\text{Ա}}-\text{խ}=\frac{\text{բծ}-\text{ծք}}{\text{ա}}$$

$$\text{աձք}-\text{Աախ}=\text{Աբծ}-\text{Ածք},$$

$$ադք+Աժք=Աբժ+Աաե,$$

$$ք=\frac{Ա(բժ+եա)}{Աժ+ադ},$$ եթէ ք յառաջագոյն շարժիցի։

Բ. $$\frac{դք}{Ա}+ե=\frac{բժ-ժք}{ա}$$

$$ադք+Աաե=Աբժ-Աժք$$
$$ադք+Աժք=Աբժ-Աաե$$
$$(ադ+Աժ)ք=(բժ-աե)Ա$$
$$ք=\frac{Ա(բժ-աե)}{ադ+Աժ},$$ եթէ ք՛ յառաջագոյն շարժիցի։

Եթէ $ե=0$ դնիցեմք եղանէ հաւասարութիւնս

$$ք=\frac{Ա\cdot բժ}{ադ+Աժ}։$$

Իսկ իբրեւ $բ=0$ համարիցիմք. գտանեմք զհաւասարութիւնն Բ. փոխեալ ի $ք=-\frac{եաԱ}{Աժ+ադ}$, յորում ուրացական զօրութիւնն ք չափոյն յայտ արարեալ ցուցանէ եթէ զուղղութիւնն զոր ք մարմնոյն ընծայեցաք, հարկ է ի հակառակ ուղղութիւն փոփոխել, զի ք՛ մարմնոյն հասանել կարիցէ։ Այս ուրացական զօրութիւն ճշմարտիւ զանհնարին լինել խնդրոյն ցուցանէ, եւ թէպէտ եւ չիցէ ամենեւին անհնարին, այլ հանդամանաց խնդրոյն, եւ զօրութեան չափուցն որ ի նմին կայցեն հակառակի, վասն այսորիկ զբովանդակ խնդիրն պարտ է փոփոխել։ Տացուք օրինակս ինչ վասն ընդելանելոյ։

Ա. Օրինակ։ Սուրհանդակ ոմն ք ելեալ ի Վիեննայ ընդ Պարիս, յ3 ժամս 5 մղոն ճանապարհ հատանէ։ Իսկ ի Լենտիս քաղաքէ ելեալ միւս ոմն սուրհանդակ ք՛ յետ 20 ժամուց, յորմէ հեռէ սկիզբն արարեալ իցէ առաջին սուրհանդակն ք մեկնել ի Վիեննայեցւոց քաղաքէն։ Արդ եթէ ք՛ ի 5 ժամս 12 մղոն ճանապարհ հատանիցէ, եւ Լենտիս 26 մղոնաւ հեռի է ի Վիեննայ, երբ ք՛ կարիցէ հասանել ք սուրհանդակին։

Պատասխանի: Օրինակս ըստ Ա. հաւասարութեան որ յԱ. դէպս է, լուծանի:

Դնանք ձ=3, ծ=5, Ա.=5, ռ=12, ք=26, եւ խ=20, որով, եթէ զհաւասարման ի հասարակաց օրինակին դնիցեմք, գտանի

$$+=\frac{5(26\cdot5-20\cdot12)}{5\cdot5-12\cdot3}=50$$

ուստի եւ +—ք=50—26=24 մղոն, այս ինքն եթէ Տ' սուրհանդակս մղոնս 24 ունի ընթանալ, զի Տ սուրհանդակին հասանիցէ, որում 10 ժամուց ունի պէտս, քանզի

ֆ ժամ :5 ժամք=24 մղոնք : 12 մղոնք, կամ

ֆ:5=2:1, ուստի եւ ֆ=2·5=10

Եթէ յօրինակի անդ խ=9 դնիցեմք, յայնժամ գտանիցի +=—10, ուստի եւ +—ք=—10—26=—36. այս ինքն եթէ հարկ է Տ' սուրհանդակին ընդ հակառակ ուղղութիւն ի Դենտիս քաղաքէ ընդ կողմն Վիեննայ ճանապարհ հատանել, եւ Տ սուրհանդակին 9 ժամ զկնի 10 մղոնս ի Վիեննայ քաղաքէ յայսկոյս գնալ, զի Տ' սուրհանդակն նմա հանդիպիցի: Եւ այս ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ հակառակ առացելոցս: Արդ եթէ զխնդիրն յայսպիսի ինն կերպարանս փոփոխիցեմք, որպէս զի Տ ի Դենտիս քաղաքէ ելեալ ընդ ճանապարհ Վիեննայեցւոց քաղաքին ի Պէստ ճանապարհորդիցէ $\frac{12}{5}$ արագութեամբ, այս ինքն ընդ 12 մղոն ի 5 ժամու անցանիցէ, իսկ Տ 9 ժամ զկնի ելեալ ի Վիեննայեցւոց քաղաքէն ընդ Պէստ քաղաք գնայցէ $\frac{5}{3}$ արագութեամբ, այս ինքն 5 մղոնս յ3 ժամու հատանիցէ. Ե՞րբ Տ եւ Տ' սուրհանդակքն միմեանց հանդիպիցին. յայնժամ գտանեմք զզօրութիւն + չափոյն հաստատական 36, որ է ճանապարհն Տ' սուրհանդակին, եւ 10 ճանապարհ Տ սուրհանդակին, յորժամ զզօրութիւոյն, զոր վերագոյն յիշատակեցաք, ի համառակաց օրինակին հաստատեցեմք։ Արդ ի վախճան օրինակիս ասեմք, եթէ պարտ եւ պատշաճ է միտ եդեալ նայել, զի գ. եւ ժ եւ Ն. եւ ա ըստ բնութեան խնդրոյն փոփոխիցին։

Ուրացական զօրութիւն + չափոյն, զոր յիշատակեցաք, ցուցանէ, զի եթէ կամիցի ոք խնդրոյն հաստատուն պատասխանի առնել, պարտ է զհանգամանս խնդրոյն ի հակառակ ինչ փոխել։

Բ. Օրինակ։ Համարեսցուք եթէ ամենայն հանգամանք օրինակին նման առաջնոյն իցեն, այլ այս եւեթ այլակերպ, զի Ս' ի Վիեննացւոց քաղաքէն առաքիցի, յետ մեկնելոյ անտի Ս սուրհանդակին, կամ $ք=0$։

Պատասխանի։ Լուծանի խնդիրս ըստ $+=\frac{բաՆ}{ագ—Նժ}$ համառակաց օրինակիս, յորում եթէ զհաւասար զօրութիւնն հաստատեցեմք, գտանեմք $+=\frac{20\cdot12\cdot5}{12\cdot3—5\cdot5}=\frac{1200}{36—25}=\frac{1200}{11}=109\frac{1}{11}$, որ զճանապարհ Ս եւ Ս' սուրհանդակին ցուցանէ։ Այլ քանզի Ս յ3 ժամս 5 մղոն ճանապարհ հատանէ կամ զի ընդ 1 մղոն անցանիցէ $\frac{3}{5}$ ժամուց պէտք են, յայտ է եթէ $\frac{1200}{11}\times\frac{3}{5}=\frac{720}{11}$ ժամուց կարօտիցի առ ի $\frac{1200}{11}$ մղոնն գնալոյ։ Իսկ Ս սուրհանդակին պէտք են $\frac{1200}{11}\times\frac{5}{12}=\frac{500}{11}$ ժամուց։ Այլ քանզի $\frac{720}{11}—\frac{500}{11}=\frac{220}{11}=20$, վասն այսորիկ ուղիղ է համարումն։

Այլ եթէ $Ն=ա$, եւ $գ=ժ$ դնիցեմք, այս ինքն զի արագութիւն երկուց սուրհանդակացն հաւասար իցէ, յայնժամ $+=\frac{\text{խտՄ}}{\text{Մժ}-\text{Մժ}}=\frac{\text{խՄ}^2}{0}$, որ յայտ առնէ եթէ անպատեհագոյն է խնդիրն, եւ անհնարին։

Ուստի եւ

$$+=\frac{\text{խտՄ}}{0}=\frac{\text{խՄ}^2}{0}=\infty$$

այս ինքն եթէ մեծագոյն իցէ քան զամենայն թիւ, զոր հնար իցէ մարդոյ ածել զմտաւ, զորոյ զհետ գայ, եթէ Տ մարմինն յանրաւ հեռաւորութեան կայցէ, եւ չիցէ հնար նոցա միմեանց հանդիպել.

Դարձեալ եթէ ի յետին օրինակի անդ դնիցեմք, եթէ Տ՝ յառաջագոյն քան զՏ սկիզբն արարեալ իցէ շարժելոյ, պատասխանի խնդրոյն ըստ $+=\frac{\text{խտՄ}}{\text{Մծ}-\text{տժ}}$ հաւասարութեանն լինիցի, ուստի եւ $+=\frac{20\cdot12\cdot5}{5\cdot5-12\cdot3}=\frac{1200}{-11}=-\frac{1200}{11}$, յորում ուրացական զօրութիւնն զօրինակ անհնարին լինելոյն նշանակեալ ցուցանէ Քանզի Տ՝ արագագոյն ընթանայ քան զՏ, վասն այսորիկ չէ մարթ զի Տ հասանիցէ նմա։

Գ. Օրինակ։ Ի 23 աւուր սեպտեմբեր ամսեան չուեաց գունդ մի զօրաց ի Պէտրոպօլիս քաղաքէ գնալ ի կողմանս Վիէննացւոց, եւ աւուր աւուր հատանէ 4 մղոնս ճանապարհաց։ Ի 28 երրորդում աւուր սեպտեմբեր ամսեան առաքեցին ի Վիէննայ հրեշտակ առ գունդն, ցուցանել նոցա զհրաման արքունի դառնալոյ յետս, եւ դեսպանն հատանէ օր ըստ օրէ 16 մղոնս ճանապարհաց։ Երբ հասանիցէ հրեշտակն առ գունդն, յորժամ բացարձակութիւն վայրաց երկուց քաղաքացն 100 մղոն դնիցեմք։

Պատասխանի։ Լուծանի խնդիրս ըստ $+=\frac{\text{Մ}(\text{բծ}-\text{խտ})}{\text{Մծ}+\text{տժ}}$ օրինակիս, (Ի Դէպք)։ Յօրինակիս ժ=

$\text{ժ}=1$ է, $\text{Ա}=16$, $\text{ա}=4$, $\text{բ}=100$, $\text{ի}=28-23=5$, ուստի եւ $\text{ք}=\frac{16(100-5\cdot4)}{16+4}=\frac{4}{5}\cdot80=64$ մղոն է ճանապարհն հրեշտակին, որոյ ի կատարումն ունի պէտս 4 աւուրց, ուստի եհաս նա ի դունդն ի 1 հով-տարերի:

Դ. Օրինակ: Աստղ մի գիսաւոր եւ լուսին ուղղութեամբ շարժին ըստ միոյ ուղիղ գծի, եւ գիսաւորն 25 աստիճանօք յառաջոյ գնայցէ լուսնին: Եթէ լուսինն աւուր աւուր 13^0 եւ գիսաւոր աստղն 10^0 ճանապարհ հատանիցեն. Երբ կարիցէ լուսինն աստեղն հասանել:

Պատասխանի: Խնդիրս լուծանի (ըստ Ա. Դիպաց, 1.) ըստ $\text{ք}=\frac{\text{բժԱ}}{\text{Աժ}-\text{աձ}}$ հաւասարութեան: Յօրինակիս շրջի հասարակաց օրինակն ի $\text{ք}=\frac{\text{բԱ}}{\text{Ա}-\text{ա}}$ քանզի $\text{ձ}=\text{ժ}=1$ է: Արդ ի սմին է $\text{բ}=25^0$, $\text{Ա}=13^0$, $\text{ա}=10^0$, ուստի եւ $\text{ք}=\frac{25\cdot13}{13-10}=\frac{325}{3}=(108\frac{1}{3})^0=108^0$ $20^{\text{Ա}}$ ճանապարհն լուսնին, եւ $\text{ք}-\text{բ}=108^0\,20^{\text{Ա}}-25^0=83^0\,20^{\text{Ա}}$ ճանապարհ գիսաւոր աստեղն: Իսկ քանզի լուսինն աւուր աւուր 13^0, եւ գիսաւորն 10^0 հատանեն, գտանեմք ըստ համեմատութեանս,

$$\text{ֆ}:1=\frac{325^0}{3}:13^0,\ \text{կամ}$$

$$\text{ֆ}:1=\frac{25}{3}:1,\ \text{եւ}$$

$$\text{ց}:1=83\frac{1}{3}:10^0\ \text{կամ}$$

$$\text{ց}:1=250:30,$$

ուստի եւ $\text{ֆ}=\frac{25}{3}$ օր իցէ ճանապարհն լուսնին, իսկ

$$ջ=\frac{250}{30}=\frac{25}{3}$$ ճանապարհ գլխաւորին,

այս ինքն է զի լուսինն ի $\frac{25}{3}=8$ աւուրս, եւ յ8 ժամս գլխաւորին հասանիցէ:

Ե Օրինակ: Ա եհարց ցԲ, եթէ քանի՞ ժամք իցեն աւուրն: Պատասխանի ետ Բ եւ ասէ, Չկարեմ հաւաստեաւ տեսանել, այլ այնչափ ինչ նշմարեմ, զի երկոքին ցուցիչքն ժամուց ի միջին վայրի 6 եւ 7 ժամուց ի միմեանց վերայ կան: Արդ քանի՞ ժամք իցեն աւուրն:

Պատասխանի: Լուծանի խնդիրս ըստ $+=\frac{ԲԱ}{Ա-ա}$ հասարակաց օրինակիս, (որ ի Գ. օրինակին) յորում ըստ այսմ առնելոյ խնդրոյս $Բ=30$, եւ $Ա=60$, եւ $ա=5$ է: Քանզի յորժամ համարիցիմք եթէ ցուցիչն ժամուց ջ, ի վերայ 6 ժամուց կայցէ, յայտ է եթէ եւ ցուցիչն վայրկենից Յ ցուցանիցէ զ12, ուստի եւ երկոքին ցուցիչքն հեռի են ի միմեանց 30 մասամբ ինչ վայրաց, քանզի բոլորակ շրջանակ թուոյն ի 60 հաւասար մասունս բաժանի: Իբրեւ Յ ընդ 60 մասունս անցանիցէ, ջ ընդ 5 մասունս հաւասարս միայն անցանէ. ապա ուրեմն թիւքս են թիւք համեմատութեան արագութեան երկուց ցուցչացն, ուստի եւ $Ա=60$, եւ $ա=5$, յորմէ եւ $+=\frac{30\cdot60}{60-5}=\frac{30\cdot60}{55}=\frac{360}{11}=32^{\text{Ր}}\frac{8}{11}$, այս ինքն զի Յ ընդ $32^{\text{Ր}}\frac{8}{11}$ կամ $32^{\text{Ր}}43^{\text{ր}}\frac{7}{11}$ անցանելոց է, զի ջ ցուցչին կարիցէ ի միջոցի 6 եւ 7 ժամուց հասանել: Արդ զհետ գայ եթէ $6^{\text{ժ}}$, $32^{\text{Ր}}$, $43^{\text{ր}}\frac{7}{11}$ իցեն ժամքն:

Քանի՞ ժամք իցեն, յորժամ ցուցիչք ժամուցն ընդ մէջ 4 եւ 5 ժամուց կայցեն։

Ժ. Խնդիր։ Ոմն ի մանկանց վարժոցին գրեաց թուղթ առ հայր իւր, եւ պատճէն նամակին էր այս։ Հայր. յարծաթոյն զոր ետուր ինձ, ամսոյ ամսոյ զութերորդ մասն ծախեցի կերակրոց եւ ընակութեանս, իսկ զքսաներորդ մասն գրոց եւ հանդերձից, զոր ետու լուանալ։ Յետ հինգ ամսոց անցանելոյ կային առ իս 50 դահեկանք, եւ այժմ, որ է ամ մի, պարտաւոր եմ 440 դահեկանաց։ Արդ որչա՞փ ինչ դահեկանս տուեալ էր հօրն որդւոյն, եւ նա որչա՞փ ինչ ծախեաց։

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի։ Դիցուք գրեացուք եթէ արծաթն՝ զոր հայրն ետ՝ իցէ +. արդ ծախքն ամսոյ ամսոյ են $\frac{+}{8}+\frac{+}{20}=\frac{7+}{40}$, եւ 5 ամսոյն $5\cdot\frac{7+}{40}=\frac{7+}{8}$, ուստի եւ խնդիրն է $\frac{7+}{8}+50=+$, որ է $7++400=8+$, եւ $+=400$։

Որպէս յայտ է, բազում հանգամանք են, որք կարեւորքն են ի գտանել զզօրութիւն խնդրոյն։ Արդ դիցուք, զի ի բաց թողցի հանգամանքս, եթէ որդին յետ 5 ամսոց 50 դահեկանս առ իւր ունիցի, յայնժամ $12\cdot\frac{7+}{40}=++440$, յորմէ ելանէ $+=400$։ Արդ քանզի ծախքն միոյ ամսոյ է $\frac{7\cdot400}{40}=70$ դահեկան, եւ միոյ տարւոյ $12\cdot70=840$ դահեկան, ապա $840-400$ է պարտքն։

ԱԺ. Խնդիր։ Այր ոմն ունի երկուս ազգս նիւթոց, գինք միոյ միութեան Ա. ազգին է=ա, եւ գինք միոյ միութեան Բ. ազգին=բ։ Արդ՝ եթէ կամիցի ոք յերկուց նիւթոցն կազմել խառնուած Խ, որպէս զի ի Խ՝ն միութիւնք գտանիցին, եւ գինք միոյ միութեան *իցէ = գ. արդ քանի ինչ միութիւնս յերկուց ազ-գաց նիւթոցն ի խառնուածն առնուցու։*

Կազ. Հաւ. եւ Պատասխանի։ Համարեսցուք եթէ չափ միութեանցն Ա. ազգի, զոր առնուցու, իցէ ք. յայտ է եթէ միութիւնքն Բ. ազգին լինիցին ն—ք։ Ըստ հանգամանաց խնդրոյն գինք ք միութեանց Ա. ազգին է աք, իսկ ն—ք միութեանցն Բ. ազգին = բ(ն—ք), ուստի եւ գինք բովանդակ խառնուածոյն է = աք + բ(ն—ք)։ Իսկ քանզի գինք միութեան խառնուածոյն գ լինելոց է, ուրեմն բովանդակ խառնուածն = գ. ն գնոց իցէ. յորմէ ծագէ հաւասարութիւնս աք + բ(ն—ք) = գն։ Զորոյ զհետ գալ, եթէ

$$\text{ա}\text{ք}+\text{ն}\text{բ}-\text{բ}\text{ք}=\text{գ}\text{ն}$$
$$(\text{ա}-\text{բ})\text{ք}=\text{գ}\text{ն}-\text{բ}\text{ն}, \text{ եւ}$$
$$\text{ք}=\frac{\text{գ}\text{ն}-\text{ն}\text{բ}}{\text{ա}-\text{բ}}=\frac{\text{ն}(\text{գ}-\text{բ})}{\text{ա}-\text{բ}}, \text{ ուստի եւ}$$
$$\text{ն}-\text{ք}=\text{ն}-\frac{\text{ն}(\text{գ}-\text{բ})}{\text{ա}-\text{բ}}=\frac{\text{ն}(\text{ա}-\text{բ})-\text{ն}(\text{գ}-\text{բ})}{\text{ա}-\text{բ}}=\frac{\text{ն}(\text{ա}-\text{գ})}{\text{ա}-\text{բ}}\text{։}$$

Ի հաւասարութեանց աստի

$$(\text{ա}-\text{բ})\text{ք}=\text{ն}(\text{գ}-\text{բ}), \text{ եւ } (\text{ն}-\text{ք})(\text{ա}-\text{բ})=\text{ն}(\text{ա}-\text{գ}),$$

ծագեն մօտաւոր համեմատութիւնքս,

$$(\text{ա}-\text{բ}):(\text{գ}-\text{բ})=\text{ն}:\text{ք},$$
$$(\text{ա}-\text{բ}):(\text{ա}-\text{գ})=\text{ն}:(\text{ն}-\text{ք})$$

ուստի եւ

$$(\text{գ}-\text{բ}):(\text{ա}-\text{գ})=\text{ք}:\text{ն}-\text{ք}, \text{ (Տ. 330. Բ.), եւ}$$
$$(\text{ա}-\text{գ})+(\text{գ}-\text{բ}):(\text{գ}-\text{բ})=\text{ն}:\text{ք},$$
$$(\text{ա}-\text{գ})+(\text{գ}-\text{բ}):(\text{ա}-\text{գ})=\text{ն}:\text{ն}-\text{ք}. \text{ (Տ. 330. Ա.)}$$

Այս կանոն, անուանեալ կոչի Կանոն զուգելոյ։ Ի համեմատութեանց աստի ծագէ օրէնքս. վասն դիւրաւ հաշուելոյ զօրինակս, որ ընդ սովին կանոնաւ անկանիցին։ Գրեսջիր զբարձրագոյն եւ զխոնարհագոյն գինս ընդ միմեանց, եւ ընդ ձախմէ նոցա ի միջոցի երկոցունցն զմիջին գինն։ Իսկ ընդ աջմէ բարձրագոյն գնոյ զայլակերպութիւն միջին եւ խո-

նարհագոյն գնոց, եւ ընդ նոյնս զայսկերպութիւն բարձրագոյն եւ միջին գնոց. ապա այնուհետեւ ի սացանէ կարիցես զանդամս համեմատութեանն կազմել, յորում նիւթքն վասն խառնուածոյն առնլոց իցեն:

Օրինակ: Այր ոմն ունի երկուս ազգս գինւոյ, Ա. եւ Բ.: Գինիք Ա. ազգին. մի շիշն է 1 դահեկան եւ 15 նաքարակիտք դերմնացւոց, այս ինքն =75 նաքար. իսկ մի շիշն յերկրորդ ազգէն 50 նաքարակիտք: Արդ՝ յերկուց ազգաց գինւոյն թակոյկ մի գինւոյ խառնիցէ, որ 5 մար գինւոյ տանիցի, եւ մի շիշն 1 դահեկան իցէ, որչափ ինչ յերկուց ազգացն պարտ իցէ նմա առնուլ:

Արդ դրոշմեսջիր

1 դահեկ. դեր.=	75 նաքար.=ա	10=գ−բ
60 նաք. =գ	50 նաք. =բ	15=ա−գ
	25=ա−բ	=(գ−բ)+(ա−գ)

Ապա ուրեմն ի 10 շիշս յԱ. ազգէն պարտ է յաւելուլ եւ զ15 շիշս ի Բ. ազգէն. այս ինքն ի 10+15 =25 շիշս խառնուածոյն գտանին 10 շիշք յԱ. ազգէ եւ 15 շիշք ի Բ. ազգէն ուստի եւ

25:200 (=5 մար)=10:ի, յորում ի=80 շիշ,
եւ 25:200=15:ն−ի, յորում ն−ի=120 շիշ

(ն−ի)+ի=ն=200 շիշ.

Բժ. Խնդիր: Պ գնեաց կողով մի խնձոր, եւ ետ երից երից խնձորոցն 2 նաքարակիտս դերմնացւոց: Նա երթեալ վաճառեաց 4 խնձորս մի մի երեքդրամենի դերմնացւոց, որով եւ 1 դահեկան ի վերայ շահեցաւ: Արդ քանի՞ խնձորք կային ի կողովն:

Կազմ. հաւաս. եւ Պատասխանի: Քանզի 3 խնձորոյ 2 նաքարակիտս ետ. զորին զհետ գայ, եթէ 1 խնձորն $\frac{2}{3}$ նաքարակիտ իցէ, ուստի եւ ի խնձորն $\frac{2ի}{3}$ նաքարակիտ: Նա զի վաճառեաց զմի խնձոր $\frac{3}{4}$

նաքարակտաց, ուրեմն զ+ խնձորս $\frac{3{\scriptstyle +}}{4}$ նաքարակտաց իցէ վաճառեալ, արդ

$$\frac{3{\scriptstyle +}}{4}=\frac{2{\scriptstyle +}}{3}+60,$$
$$9{\scriptstyle +}=8{\scriptstyle +}+720$$
$${\scriptstyle +}=720\,:$$

Գ.Ժ.. **Խնդիր**։ Արք ոմանք հարցին ցԱ. եթէ քանի՞ ամաց իցէ. ընդ որ պատասխանի տուեալ ասէ. Ամք հասակի իմոյ եւ որդւոյս միահամուռ 100 է, յառաջ քան զ20 ամ երիցս մեծ էի քան զորդի իմ։ Արդ քանի՞ ամաց իցեմ։

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի ։ Համարեսցուք եթէ այժմեան ամք հասակի հօրն + իցէ, յայտ է եթէ ամք որդւոյն են 100—+։ Իսկ քանզի ամք հասակի հօրն յառաջ քան զ20 ամ էին +—20, ուրեմն եւ որդւոյն 100—+—20=80—+. ուստի եւ ըստ հանգամանաց խնդրոյն

$${\scriptstyle +}-20=3(80-{\scriptstyle +})$$
$${\scriptstyle +}-20=240-3{\scriptstyle +},$$
$${\scriptstyle +}+3{\scriptstyle +}=240+20$$
$$4{\scriptstyle +}=260$$
$${\scriptstyle +}=\frac{260}{4}=65 \text{ հասակ հօրն},$$
$$100-{\scriptstyle +}=100-65=35 \text{ հասակ որդւոյն},$$
$$65+35=100$$
$$65-20=3(35-20)=45$$
$$35-20=15\,:$$

Դ.Ժ.. **Խնդիր**։ Հայրն եթող ժառանգութիւն որդւոց իւրոց, եւ բաժանեաց ի նոսա հաւասար չափով իւրաքանչիւր զիւր մասն։ Առաջինն յորդւոցն առ 100 դահեկան եւ զ $\frac{1}{10}$ մասն մնացորդին, իսկ երկրորդն 200 դահեկան եւ զ $\frac{1}{10}$ մնացորդին, իսկ երրորդն

300 դաՀեկան եւ զ $\frac{1}{10}$ մնացորդին, եւ զայս օրինակ միըստ միոջէ ամենայն որդիքն, իւրաքանչիւր ոք առ 100 դաՀեկան աւելի քան զառաջինն եւ զ $\frac{1}{10}$ մասն մնացորդին: Արդ որչափ ինչք էին Հօրն, եւ քանի՞ թիւ որդւոյն:

Կազմած Հաւ. եւ Պատասխանի: Դիցուք գրեացուք եթէ ինչքն $=\text{ք}$ իցեն. արդ առաջինն յորդւոյն առ

$$100+\frac{1}{10}(\text{ք}-100)=\frac{1000+\text{ք}-100}{10}=\frac{900+\text{ք}}{10}$$

ուստի եւ մնացորդն է $\text{ք}-\frac{900+\text{ք}}{10}=\frac{9\text{ք}-900}{10}$:

Իսկ երկրորդն էառ

$$200+\frac{1}{10}\left(\frac{9\text{ք}-900}{10}-200\right)=200+\frac{9\text{ք}-900-2000}{100}$$

$$=\frac{20000+9\text{ք}-2900}{100}=\frac{17100+9\text{ք}}{100}:$$

Եւ քանզի իւրաքանչիւր մասունքն միմեանց Հաւասարք են, ապա ուրեմն

$$\frac{900+\text{ք}}{10}=\frac{17100+9\text{ք}}{100},\ \text{ուստի եւ}$$

$$9000+10\text{ք}=17100+9\text{ք},\ \text{եւ}$$

$$\text{ք}=17100-9000=8100:$$

ԵԺ. Խնդիր: Ա Հանդիպեալ աղքատաց ի ճանապարՀի, կամեցաւ միում միում ի նոցանէ տալ 3 նաքարակիտս, եւ պակասեցան 8 նաքարակիտք. իսկ իբրեւ 2 նաքարակիտս կամեցաւ տալ, յաւելան ի քսակի 4 նաքարակիտք: Արդ քանի՞ ինչ իցէ թիւ աղքատացն, եւ որչափ արծաթն՝ զոր ունէր Ա:

Կազմած Հաւա. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք եթէ ք իցէ թիւ աղքատացն. առաջին Հանգամանք խնդրոյն ցուցանէ $3\text{ք}-8$, եւ երկրորդն $2\text{ք}+4$, ուստի եւ

$$3\dagger-8=2\dagger+4,\ \text{եւ}$$
$$3\dagger-2\dagger=8+4$$
$$\dagger=12$$

Արդ եթէ 12 աղքատք իցեն, ուրեմն Ա. ունէր $3.12-8=2\times12+4=28$ նաքարակիտս:

Ը.Ժ. Խնդիր: Երեք կարասք են Ա., Բ., Գ.: Իբրեւ լնուցու ոք յԱ. կարասէ զԲ., մնայ յԱ. $\frac{2}{3}$ ջրոյն, իսկ իբրեւ լնուցու յԱ. կարասէ զԳ., մնայ յԱ. $\frac{5}{9}$ մասն ջրոյն. ապա եթէ զԲ. եւ զԳ. միանգամայն յԱ. կարասէ լնուցուս, մնան 8 մարք յԱ.: Քանի՞ մարս տանիցին Ա., Բ., Գ.:

Լուծ. հաւ. եւ պատասխանի: Համարեսցուք եթէ ջուրն Ա. կարասոյ $\dagger$ իցէ, ապա ջուրն Բ. կարասոյն իցէ $=\frac{1}{3}\dagger$, իսկ Գ. կարասոյն $=\frac{4}{9}\dagger$, ուստի եւ $\dagger=\frac{1}{3}\dagger+\frac{4}{9}\dagger+8$, կամ

$$9\dagger=3\dagger+4\dagger+72,$$
$$9\dagger-7\dagger=72$$
$$2\dagger=72$$
$$\dagger=36$$

ուրեմն Ա. ունի 36 մարս, Բ. $\frac{36}{3}=12$ մարս, եւ Գ. $\frac{36\cdot4}{9}=16$ մարս:

Ի.Ժ. Խնդիր: Ոմն վաճառական ունէր հաստատանել զպարտս իւր ի գլուխ այլեւայլ ամաց, այս ինքն յետ ա ամաց ա դահեկանս, յետ բ ամաց բ, յետ գ ամաց գ, այլովքն հանդերձ: Իսկ պարտատէրն կամեցաւ ի միում նուագի զբովանդակ արծաթն առնուլ. արդ յետ քանի՞ ինչ ամաց հաստատանելոյ իցէ վաճառականն:

Կարգ. հաւ. եւ Պատասխանի։ Դիցուք դրեացուք եթէ արծաթն, զոր վաճառականն ի միում ամսեան 1ով դահեկանաւ շահիցի իցէ$=շ$, յայտ է եթէ α դահեկանք յա ամսեան $ա\alpha շ$ շահիցի, β դահեկանք ի բ ամսեան $բ\beta շ$, γ դահեկանք ի գ ամսեան $գ\gamma շ$, այլովքն համդերձ. ուստի եւ բովանդակ շահն, զոր վաճառականն յարծաթոյն կարիցէ շահել

$$է = ա\alpha շ + բ\beta շ + գ\gamma շ + \cdots = շ(ա\alpha + բ\beta + գ\gamma + \cdots)։$$

Իսկ ժամանակն, որոյ յետ անցանելոյ՝ բովանդակ $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ արծաթն ի միում նուագի հատուցանիցի, լինիցի $= \tau$ ամսեան. ուստի եւ շահն զոր ի սմին ժամանակի շահել կարիցէ, $է = (\alpha + \beta + \gamma \cdots) շ\tau$. եւ քանզի յերկոսին դէպսն եւս շահքն միմեանց հաւասարք են, վասն այսորիկ

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots) շ\tau = (ա\alpha + բ\beta + գ\gamma + \cdots) շ,$$

ուստի եւ

$$\tau = \frac{ա\alpha + բ\beta + գ\gamma + \cdots}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}։$$

Այս ինքն բազմացուցեալ զմի մի մասն բովանդակութեան արծաթոյն իւրեանց առանձինն ժամանակաւ, յորում հատուցանելոց իցեն, եւ բաժանեալ զայն ընդ բովանդակ պարտսն, գտանի ժամանակն, զոր խնդրեա։ Որպիսի ինչ, եթէ վաճառականն 2832 դահեկանս յետ 3 ամսոց, եւ 2560 դահեկանս յետ 9 ամսոց, եւ 1450 դահեկանս յետ 16 ամսոց հատուցանելոց իցէ, գտանի եթէ յետ

$$\frac{2832 \cdot 3 + 2560 \cdot 9 + 1450 \cdot 16}{2832 + 2560 + 1450} = 8$$

ամսոց ի միում նուագի հատուցանելոց է։

ՀԱՏԱԾ Դ

Ա. ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ՅՈՐՍ ԵՐԿՈՒ ԱՆԾԱՆՕԹ ՉԱՓՔ ԵՆ

374. Եթէ դէպք ինչ լինիցին պատահել իւիք խնդրոյ, յորում պէտք իցեն զզօրութիւնս երկուց անծանօթ չափուց գտանել, յայնժամ առ զխնդիրն լուծանելոյ, հանդամանք խնդրոյն այնպէս իմն պահանջեն, զի խնդիրն յերկուս ազգիազգի հաւասարութիւնս զատեալ որոշիցի, յորոց եւ ոչ մին ի միւսն բովանդակիցի։ Որպիսի ինչ են $3‡+2†=14$ եւ $5‡+8†=12$ այլեւայլ հաւասարութիւնք. այլ սակայն $3‡-5†=7$ եւ $2‡-\frac{10}{3}†=4\frac{2}{3}$, չեն զատ եւ ուրոյն ի միմեանց, քանզի երկրորդն յառաջինն փակեալ բովանդակի, եթէ զայն 6 թուով բազմացուցանիցես, եւ ընդ 9 բաժանիցես, կամ համառօտ եւս ասել, եթէ զառաջինն $\frac{2}{3}$ չափով բազմացուցանիցես։

Արդ առ ի վերայ հասանելոյ հաւասարութեանն, յորում երկու անծանօթ չափք իցեն, պարտ է զայնօսիկ յայնպիսի իմն հաւասարութիւնս դարձուցանել, որպէս զի մի անծանօթ չափ ի նմին գտանիցի, զոր եւ ազգիազգի կերպարանօք մարթ է կատարել, որպէս մօտաւոր բանքս յայտ առնիցեն։

375. Առաջին կարգ, որ անուանեալ կոչի Կարգ համեմատութեան։ Պարտ եւ պատշաճ է զզօրութիւն միոյ յանծանօթ անդամոյն, ուրոյն ուրոյն յերկոսին եւս հաւասարութիւնս խնդրել, զոր մարթ է քեզ դիւրագոյն կատարել, յորժամ զմեւս անծանօթ չափն ծանուցեալ համարիցիս։ Ապա յետ այնորիկ զերկոսին զօրութիւնսն անծանօթին միմեանց հաւասարս դնել, որով շիջիցի հաւասարութիւնն այն՝ յորում

մի անծանօթ չափ կայցէ: Արդ դիցուք գրեսցուք եթէ հաւասարութիւնս

$$\text{Ա.}\quad \text{ա}\ddagger+\text{ք}\dagger=\text{ֆ},\ \text{ուստի եւ}\ \ddagger=\frac{\text{ֆ}-\text{ք}\dagger}{\text{ա}}$$

$$\text{Բ.}\quad \textit{ա}\ddagger+\text{ր}\dagger=\text{դ},\quad ,,\quad \ddagger=\frac{\text{դ}-\text{ր}\dagger}{\textit{ա}}$$

ուրեմն եւ

$$\frac{\text{ֆ}-\text{ք}\dagger}{\text{ա}}=\frac{\text{դ}-\text{ր}\dagger}{\textit{ա}},\ \text{կամ}$$

$$\textit{ա}\text{ֆ}-\textit{ա}\text{ք}\dagger=\text{ա}\text{դ}-\text{ա}\text{ր}\dagger,\ \text{կամ}$$

$$\text{ա}\text{ր}\dagger-\textit{ա}\text{ք}\dagger=\text{ա}\text{դ}-\textit{ա}\text{ֆ},$$

ուստի եւ

$$\dagger=\frac{\text{ա}\text{դ}-\textit{ա}\text{ֆ}}{\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք}}:$$

Արդ եթէ զզօրութիւն † չափոյն դնիցեմք փոխանակ † չափոյն որ ի զօրութեան անդ ‡ չափոյն գտանիցի, զոր օրինակ յառաջինն, ծագիցէ

$$\ddagger=\frac{\text{ֆ}-\text{ք}\left(\frac{\text{ա}\text{դ}-\textit{ա}\text{ֆ}}{\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք}}\right)}{\text{ա}}$$

$$\ddagger=\frac{\text{ֆ}(\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք})-\text{ք}(\text{ա}\text{դ}-\textit{ա}\text{ֆ})}{\text{ա}(\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք})}$$

$$\ddagger=\frac{\text{ա}\text{ֆ}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք}\text{ֆ}-\text{ա}\text{ք}\text{դ}+\textit{ա}\text{ք}\text{ֆ}}{\text{ա}(\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք})}$$

$$\ddagger=\frac{\text{ֆ}\text{ր}-\text{ք}\text{դ}}{\text{ա}\text{ր}-\textit{ա}\text{ք}}$$

Համանմին օրինակի մարթ է յԱ. եւ ի Բ. հաւասարութեանց, զառաջինն զզօրութիւն † չափոյն խնդրել եւ յետ այնորիկ հաւասարութիւն ինչ գտանել յորում ‡ անծանօթն եւեթ կայցէ:

Երկրորդ կարգն, որ անուանեալ կոչի Կարգ փոխանակելոյ, այսպիսի ինչ է: Պարտ է զմին յանծանօթ չափուցն իբրեւ գծանուցեալ համարել, եւ գտանել զզօրութիւն միւս անծանօթ չափոյն. ապա այնուհետեւ զայն զօրութիւն, զոր գտեալ ուրուք իցէ, դնել փոխանակ այնր անծանօթ չափոյ, որ ի հաւասարութեանն գտանիցի. որով շրջիցի բովանդակ հաւասարութիւնն, ի հաւասարութիւն միով անծանօթիւ, եւ զայն ըստ օրինի գտանել: Զոր օրինակ դիցուք գրեցուք, եթէ

$$Ա.\ ա'ֆ + բ'ք = գ',$$
$$Բ.\ աֆ + բք = գ$$

հաւասարութիւնք իցեն: Արդ յԱ. հաւասարութեանն $ք = \frac{գ' - ա'ֆ}{բ'}$ է. իբրեւ զզօրութիւնն $ք$ չափոյն ի Բ. դրոշմիցեմք, լինիցի

$$աֆ + բ \cdot \frac{գ' - ա'ֆ}{բ'} = գ,\ \text{ուստի եւ}$$
$$աբ'ֆ + բգ' - ա'բֆ = բ'գ$$
$$ֆ = \frac{բ'գ - բգ'}{աբ' - ա'բ} = \frac{բգ' - բ'գ}{ա'բ - աբ'}$$

Արդ եթէ զզօրութիւն $ֆ$ չափոյն յԱ. հաւասարութեան անդ դրոշմիցեմք, ելանիցէ

$$ա' \cdot \frac{բգ' - բ'գ}{ա'բ - աբ'} + բ'ք = գ',\ \text{ուստի եւ}$$
$$բ'(ա'բ - աբ')ք = ա'բգ' - աբ'գ' - ա'բգ' + ա'բ'գ,$$
$$(ա'բ - աբ')ք = ա'գ - ագ',$$
$$ք = \frac{ա'գ - ագ'}{ա'բ - աբ'},\ \text{որպէս ի վեր անդր:}$$

Երրորդ կարգն, որ անուանեալ կոչի Կարգ ջնջելոյ ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ զերկուս հաւասարութիւնս ի միմեանս յաւելլով, եւ կամ ի միմեանց հանելով, զմին յանծանօթիցն ի միջոյ ի բաց բառնալ: Արդ զի այս լինիցի, պարտ եւ պատշաճ է զերկոսին հաւասարութիւնս, յայնպիսի իմն շրջել, որպէս զի մին յանծանօթ չափուց, որ յերկոսին եւս հաւասարութիւնս գտանիցի, զնոյն գործակից առընթեր ունիցի, զոր մարթ է առանց փոփոխելոյ զօրութեան հաւասարութեան բազմացուցանելով եւ բաժանելով կատարել: Եթէ նման միմեանց իցեն նշանք չափուցն այնոցիկ, պարտ է զերկոսին հաւասարութիւնսն ի միմեանց հանել, ապա եթէ այլակերպք ի միմեանց իցեն նշանքն, պարտ է զհաւասարութիւնսն ի միմեանս յաւելուլ, որով չափքն, յորս անծանօթ չափն գտանիցի, ամենեւին եղծանիցի: Զոր օրինակ դիցուք գրեցուք եթէ իցեն հաւասարութիւնքս

$$\text{Ա}.\quad \text{ա}'\ddagger + \text{բ}'{+} = \text{գ}',$$
$$\text{Բ}.\quad \text{ա}\ddagger + \text{բ}{+} = \text{գ},$$

յորոց կամք են մեզ զ+ ի միջոյ բառնալ: Բազմացո զհաւասարութիւնն Ա. բ չափով, եւ զհաւասարութիւնն Բ. բ' չափով, որով շրջիցին հաւասարութիւնքն այնոքիկ ի

$$\text{Գ}.\quad \text{ա}'\text{բ}\ddagger + \text{բ}'\text{բ}{+} = \text{բ}\text{գ}'$$
$$\text{Դ}.\quad \text{ա}\text{բ}'\ddagger + \text{բ}'\text{բ}{+} = \text{բ}'\text{գ},$$
$$\overline{\text{Գ}-\text{Դ} = \text{Ե}.\ (\text{ա}'\text{բ} - \text{ա}\text{բ}')\ddagger = \text{բ}\text{գ}' - \text{բ}'\text{գ}},$$

յորմէ եւ

$$\ddagger = \frac{\text{բ}\text{գ}' - \text{բ}'\text{գ}}{\text{ա}'\text{բ} - \text{ա}\text{բ}'}$$

Արդ իբրեւ զզօրութիւն ‡ չափոյն յԱ. կամ ի Բ. հաւասարութիւնսն դրոշմիցեմք, դիւրաւ զզօրութիւն + չափոյն կարիցեմք գտանել: Ըստ նմին նմանութեան, յորժամ զ‡ կամիցիմք յառաջագոյն ջնջել, պարտ է զԱ. ա չափով, եւ զԲ. ա' չափով բազմացուցանել, եւ ապա զերկոսին հաւասարութիւնսն ի միմեանց հանելով, զզօրութիւն + չափոյն գտանիցեմք:

Չորրորդ կարգն, զոր հնարեաց եւ եգիտ Բեզուտ ուսող գաղղիացի, որ եւ կից ի նորին անուն անուանեալ կոչի Բեզուտեան կարգ, այսպիսի ինչ է: Պարտ է զմին ի հաւասարութեանց անտի այլով ֆ չափով, որ իբրեւ ծանուցեալ համարիցի, բազմացուցանել, եւ յայն յաւելուլ զմեւս հաւասարութիւնն: Յետ այնորիկ զգործակից անծանօթ անդամոյն, զոր ի բաց բառնալ կամիցիս, համարեա =0, որով չափն այն ամենեւին ի բաց ջնջեալ, իբրեւ փոխանակ Մ չափոյն զզօրութիւնն ի հաւասարութեանն դնիցես, շրջի ի հաւասարութիւն միով անծանօթ չափով: Զոր օրինակ երկու հաւասարութիւնք իցեն

$$\text{Ա.}\quad \bar{ա}է+\bar{բ}ը=\bar{գ}$$
$$\text{Բ.}\quad աէ+բը=գ$$

արդ իբրեւ Ա. Մ չափով բազմացուցանիցի, ծագիցէ

$$\text{Գ.}\quad մ\bar{ա}է+մ\bar{բ}ը=մ\bar{գ},$$ զոր ի Բ. յաւելեալ,

$$\text{Բ}+\text{Գ}=\text{Դ.}\quad (մ\bar{ա}+ա)է+(մ\bar{բ}+բ)ը=մ\bar{գ}+գ:$$ Եթէ կամիցիս ի Դ. հաւասարութենէ զը ջնջել, դիջիր $մ\bar{բ}+բ=0$, ուստի եւ $մ=\frac{-բ}{\bar{բ}}$, զոր իբրեւ ի Դ. դնիցես,

$$\left(\frac{-բ}{\bar{բ}}\bar{ա}+ա\right)է=\frac{-բ\cdot\bar{գ}}{\bar{բ}}+գ,$$ կամ

$$(ա\bar{բ}-\bar{ա}բ)է=\bar{բ}գ-բ\bar{գ},$$ եւ

$$է=\frac{\bar{բ}գ-բ\bar{գ}}{ա\bar{բ}-\bar{ա}բ}=\frac{բ\bar{գ}-\bar{բ}գ}{\bar{ա}բ-ա\bar{բ}}:$$

Ըստ նմին օրինակի, եթէ կամիցիս ի Դ. հաւասարութենէ զէ ջնջել, պարտ է $մ\bar{ա}+ա=0$, ուստի եւ $մ=\frac{-ա}{\bar{ա}}$ համարել:

Եթէ զո՞րն ի չորից կարգաց աստի պարտ իցէ ի դէպս իւրաքանչիւր ի կիր արկանել, ճարտարութիւն մտաց եւեթ ուսուցանիցէ:

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. Խնդիր: Գտանել երկուս թիւս, որոց բովանդակութիւնն $=\bar{բ}$ իցէ, եւ այլակերպութիւնն $=\bar{ա}$:

Կազ. հաւ. եւ Պատասխանի: Մեծագոյն թիւն $=է$ իցէ, եւ փոքրագոյնն $=ը$. ուրեմն

Ա. $\ddagger+\dagger=\text{ք}$,
Բ. $\ddagger-\dagger=\text{ա}$. Իբրեւ զԱ. եւ զԲ ի միմեանս յաւելուցուս.
Ա+Բ. $2\ddagger=\text{ք}+\text{ա}$, ուստի եւ

$$\ddagger=\frac{\text{ք}+\text{ա}}{2}=\frac{\text{ք}}{2}+\frac{\text{ա}}{2}$$

Իսկ զԱ. եւ զԲ ի միմեանց հանեալ, լինիցի

$$2\dagger=\text{ք}-\text{ա}, \text{ ուստի եւ}$$

$$\dagger=\frac{\text{ք}-\text{ա}}{2}=\frac{\text{ք}}{2}-\frac{\text{ա}}{2}$$

Այս ինքն Մեծագոյն թիւն հաւասար է կիսոյ բովանդակութեանն յաւելեալ յայն եւ զկէս այլակերպութեան. իսկ փոքրագոյնն հաւասար է կէս բովանդակութեան, հանեալ ի նմանէ եւ զկէս այլակերպութեանն։

Բ. Խնդիր։ Գտանել երկուս թիւս, որպէս զի այլակերպութիւն երկրորդ կարողութեանց նոցա իցէ$=24$. իսկ այլակերպութիւն արմատոցն իցէ$=2$։

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի։ Զերկոսին թիւսն նշանակեսցուք $\ddagger$ եւ $\dagger$ նշանագրովք, ուստի եւ

Ա. $\ddagger^2-\dagger^2=24$
Բ. $\ddagger-\dagger=2$. արդ Ա. ընդ Բ բաժանեալ, ծագէ
Գ. $\ddagger+\dagger=12$, ուստի եւ

$$\ddagger=\frac{12+2}{2}=7, \text{ եւ}$$

$$\dagger=\frac{12-2}{2}=5։$$

Գ. Խնդիր։ Թիւ մի ի թուոցն, յորում երկու նշանակք թուոց գտանիցին, ունի այսպիսի ինչ հանգամանս։ Իբրեւ բաժանիցի ընդ 7, քանորդն ելանէ հաւասար բովանդակութեան նշանակաց թուոցն։ Ապա եթէ զկարգս նշանակացն շրջիցես, եւ ընդ 7 բաժանիցես, ելանիցէ քանորդ կէսն բովանգակութեան նշանակաց թուոցն, եւ մնայցէ մնացորդ 3։ Արդ ո՞ր իցէ թիւս այս։

Վարժ. Հաւ. եւ Պատասխանի։ Յառաջին դէպն զտասնաւոր տեղին նշանակեսցուք $\ddagger$, եւ զմիաւորն $\dagger$ նշանագրովք. արդ ըստ յայտ առնելոյ խնդրոյն է

Ա. $\frac{10\ddagger+\dagger}{7}=\ddagger+\dagger$, կամ $10\ddagger+\dagger=7\ddagger+7\dagger$,

Բ. $\frac{\ddagger+10\cdot\dagger}{7}=\frac{\ddagger+\dagger}{2}+\frac{3}{7}$, կամ $2\ddagger+20\dagger=7\ddagger+7\dagger+6$

Ի Ա. հաւասարութեան զհետ գայ,

$$3\ddagger=6\dagger,\ \text{կամ}\ \ddagger=2\dagger$$

իսկ զԲ. հաւասարութեան

$$13\dagger-5\ddagger=6$$

ուստի եւ փոխանակելով

$$13\dagger-5\cdot2\dagger=6.$$

ուստի եւ $\dagger=2$, եւ

$$\ddagger=2\cdot\dagger=2\cdot2=4,$$

Արդ խնդրեալ թիւն է $10\cdot4+2=42$։

Գ. Խնդիր։ Երկու ազգք նիւթոյ են Ա. եւ Բ., որոց այլեւայլ տեսակական ծանրութիւն է. 1 խորանարդ մատն յԱ. նիւթոյ կշռէ ա ունկի. եւ մի խորանարդ մատն ի Բ. նիւթոյ բ ունկի։ Արդ կամեցեալ ուրուք յերկուց նիւթոցն մի խառնուած յօրինել, որոյ զանգուածն = մ խորանարդ մատն իցէ, եւ տեսակական ծանրութիւնն ն ունկի, ո՞րչափ ինչ յերկոցունց նիւթոցն պարտ իցէ առնուլ։

Վարժ. Հաւ. եւ Պատասխանի։ Համարեսցուք եթէ $\ddagger$ խորանարդ մատն յԱ. նիւթոյ, եւ $\dagger$ խորանարդ մատն ի Բ. նիւթոյ հարկ իցէ առնուլ. ի հանգամանաց խնդրոյն ծագեն մտաւոր հաւասարութիւնքս,

Ա. $\ddagger+\dagger=$ մ խոր. մատն

Բ. ա$\ddagger+$բ$\dagger=$ ն ունկի։

Յ Ա. հաւասարութենէ ծագէ $ղ=մ-ք$, զոր իբրեւ ի Բ. դնիցեմք, ելանիցէ հաւասարութիւնս $աք+բ(մ-ք)=ն$, ուստի եւ

$$ք=\frac{ն-մբ}{ա-բ}=\frac{բմ-ն}{բ-ա}$$

ուստի եւ

$$ղ=մ-\frac{բմ-ն}{բ-ա}=\frac{բմ-ամ-բմ+ն}{բ-ա}$$

$$ղ=\frac{ն-ամ}{բ-ա}=\frac{ամ-ն}{ա-բ}:$$

Զխնդրելիս գտանիցեն $ք$ եւ $ղ$ ըստ հասարակաց օրինակացն զորոց ի ∸. 375 տեսցուք:

Օրինակ: Կամեցեալ ուրուք զոսկի եւ զարծաթ ընդ միմեանս խառնել, որպէս զի բովանդակ խառնուածն 15 խորանարդ մատն իցէ, եւ ծանրութիւնն 110,5 ունկի: Արդ եթէ 1 խորանարդ մատն ոսկւոյ $10\frac{1}{12}$ ունկի եւ 1 խորանարդ մատն արծաթոյն $5\frac{5}{9}$ ունկի կշռիցէ. որչափ ինչ ոսկի եւ արծաթ վասն խառնուածոյն առնուցու:

Պատասխանի: Յօրինակին $ա=10\frac{1}{12}$, $բ=\frac{50}{9}$, $մ=15$, եւ $ն=110,5$ ուստի եւ

$$ք=\frac{110,5-\frac{50}{9}\cdot 15}{\frac{121}{12}-\frac{50}{9}}=6, \text{ եւ}$$

$$ղ=մ-6=15-6=9$$

Արդ ուրեմն պարտ է 6 խորանարդ մատն ոսկւոյ, եւ 9 խորանարդ մատն արծաթոյ ի խառնուած անդր ի կիր արկանել:

Ե. Խնդիր: Երկու խողովակք ջրոյ Ա. եւ Բ., զկարաս մի որ $ք$ մարս ջրոյ տանէր լցին ջրով. Ա.

խողովակէ հոսեաց ջուրն ա′ ժամու, եւ ի Բ խողովակէ ժամն բ′ : Յայլում նուագի երկու խողովակքս զկարասս մի որ գ մարս տանէր, լցին ջրով. Ա. խողովակէ հոսեաց ջուրն ա ժամու, եւ ի Բ խողովակէ ժամն բ : Արդ ի միում ժամու, յիւրաքանչիւր խողովակէ, որչափ ինչ ջուր հոսիցի :

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք եթէ չափ ջրոյն որ Ա. խողովակէ անտի ի միում ժամու հոսիցի իցէ = ք մարաց. զորին զհետ գայ եթէ յա′ ժամու ա′ք մարք ջրոյ հոսիցին, եւ յա ժամու աք մարք: Իսկ չափ ջրոյն, որ ի միում ժամու ի Բ խողովակէ հոսիցի, իցէ = ֆ մարաց, ապա ուրեմն ի բ′ ժամու բ′ֆ մարք, եւ ի բ ժամու բֆ մարք ջրոյ հոսիցին: Արդ ըստ հանգամանաց խնդրոյս,

$$\text{Ա.}\quad \text{ա}'\text{ք}+\text{բ}'\text{ֆ}=\text{գ}',$$
$$\text{Բ.}\quad \text{աք}+\text{բֆ}=\text{գ},$$

ուստի եւ

$$\text{ք}=\frac{\text{բգ}'-\text{բ}'\text{գ}}{\text{ա}'\text{բ}-\text{աբ}'},\ \text{եւ}\ \text{ֆ}=\frac{\text{ա}'\text{գ}-\text{ագ}'}{\text{ա}'\text{բ}-\text{աբ}'}$$

Զոր օրինակ թէ հարցանիցէ ոք, եթէ ի քանի՞ ինչ ժամս երկու խողովակքն այնուքիկ, զմի օրինակ հոսելով, զկարասս մի, որ Տ մարս տանիցի, լնուլ կարիցեն, դիւրագոյնս գտանիցի պատասխանին, քանզի երկոքին խողովակքն տան ի միում ժամու

$$\text{ք}+\text{ֆ}=\frac{\text{բգ}'-\text{բ}'\text{գ}+\text{ա}'\text{գ}-\text{ագ}'}{\text{ա}'\text{բ}-\text{աբ}'}=\frac{(\text{բ}-\text{ա})\text{գ}'-(\text{բ}'-\text{ա}')\text{գ}}{\text{ա}'\text{բ}-\text{աբ}'}\ \text{մարս}$$

զոր եթէ համառօտիւք = Բ դնիցեմք, տան զՏ մարս ի $\frac{\text{Տ}}{\text{Բ}}$ ժամու:

Զ. Խնդիր: Երիւարք 8 յ7 եւթներորդս ի դաշտի ուրեք, որոյ 400 չորեքկուսի ձող երեւք էին այնպէս արածեցան, որպէս զի ոչ միայն զխոտն որ ի դաշտին էր, այլ եւ զայն, որ յետոյն բուսաւ, սպառեցին: Նովին օրինակաւ 9 երիւարք, յ8 եւթներորդս տրածեցան ի դաշտի ուրեք, որոյ 500 չորեքկուսի ձող երեսք էին: Արդ քանի՞ երիւարք կարիցեն նոյն օրինակ ընդ 12 եւթնեորդս ճարակել ի դաշտի, որոյ 600 չորեքկուսի ձող երեսք իցեն:

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք, եթէ ի միում միում շաբաթու յիւրաքանչիւր չորեքկուսի ձողս ֆ մաս խոտոյ, որպիսի ինչ լինի, բուսանիցի եւ աճիցէ. արդ յայտ է եթէ յառաջին դէպն 8 երիւարք յ7 եւթնեորդս $(400+7\cdot400\text{ֆ})$, եւ ի միում շաբաթու $\frac{400+7\cdot400\text{ֆ}}{7}$, ուստի եւ 1 երիւար ի 1 շաբաթու $\frac{400+7\cdot400\text{ֆ}}{7\cdot8}$ մաս ճարակիցի: Ըստ սմին օրինակի յերկրորդ դէպն. 1 երիւար ի 1 շաբաթու $\frac{500+8\cdot500\text{ֆ}}{8\cdot9}$, եւ ի վերջին դէպն $\frac{600+12\cdot600\text{ֆ}}{12\cdot+}$ մաս կերիցէ: Արդ քանզի համարեցաք եթէ ամենայն երիւարքն հաւասար չափով ճարակիցեն. զորին զհետ գայ, եթէ երեք քանիօնութիւնքն միմեանց հաւասարք իցեն, ուստի եւ

$$\text{Ա.}\quad \frac{400+7\cdot400\text{ֆ}}{7\cdot8}=\frac{500+8\cdot500\text{ֆ}}{8\cdot9}$$

$$\text{Բ.}\quad \frac{400+7\cdot400\text{ֆ}}{7\cdot8}=\frac{600+12\cdot600\text{ֆ}}{12\cdot+}:$$

Յ Ա. հաւասարութենէ ծագէ

$$9\cdot400+9\cdot7\cdot400\text{ֆ}=7\cdot500+7\cdot8\cdot500\text{ֆ},$$

$$36+252\text{ֆ}=35+280\text{ֆ},$$

$$1=(280-252)\text{ֆ}=28\text{ֆ}$$

$$\text{ֆ}=\frac{1}{28}$$

Ի Բ. հաւասարութենէ ծագէ,

$$\frac{2+7\cdot2ֆ}{7}=\frac{2+12\cdot2ֆ}{ք}$$

$$\frac{1+7ֆ}{7}=\frac{1+12ֆ}{ք}$$

$$ք=\frac{7(1+12ֆ)}{1+7ֆ}$$ ուստի եւ փոխանակելով,

$$ք=\frac{7\left(1+12\cdot\frac{1}{28}\right)}{1+7\cdot\frac{1}{28}}=\frac{7\left(1+\frac{3}{7}\right)}{1+\frac{1}{4}}=\frac{10\cdot4}{5}$$

$$ք=\frac{40}{5}=8:$$

Է. Խնդիր։ Վարձկան ոմն ա աւուրս աշխատ եղեւ, եւ ընդ նմա աշխատ եղեն բ աւուրս կինն եւ որդի իւր. եւ առին միանգամայն վարձս մ դահեկան։ Յետ այնորիկ նոյն ռոճկաւ գործեաց այրն գ աւուրս, եւ ընդ նմա կինն եւ որդին դ աւուրս, եւ առին վարձս ն դահեկան։ Արդ որչափ ինչ ռոճիկ յաւուրն առեալ իցէ այրն, եւ որչափ կինն եւ որդին։

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի։ Համարեսցուք եթէ ռոճիկ առնն ֆ իցէ, եւ ք ռոճիկ կնոջն եւ որդւոյն։ Արդ յառաջնում նուագի առ այրն աֆ դահեկանս, իսկ կինն եւ որդին բք դահեկանս. յերկրորդում նուագի առ այրն գֆ դահեկան, եւ կինն եւ որդին դք դահեկանս։ Որով

Ա. $աֆ+բք=մ$,
Բ. $գֆ+դք=ն$,

ՅԱ. հաւասարութենէ ծագէ $ք=\frac{մ-աֆ}{բ}$, կամ $=\frac{մ}{բ}-\frac{ա}{բ}\cdot ֆ$. արդ իբրեւ զզօրութիւնս զայս յերկրորդ հաւասարութեան հաստատիցեմք, լինիցի

$$\text{գ}\text{ժ}+\text{դ}\cdot\frac{\text{մ}-\text{ա}\text{ժ}}{\text{բ}}=\text{ն},\ \textit{ուստի եւ}$$

$$\text{բ}\text{գ}\text{ժ}+\text{դ}\text{մ}-\text{ա}\text{դ}\text{ժ}=\text{բ}\text{ն},\ \textit{կամ},$$

$$(\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ})\text{ժ}=\text{բ}\text{ն}-\text{դ}\text{մ},\ \textit{եւ}$$

$$\text{ժ}=\frac{\text{բ}\text{ն}-\text{դ}\text{մ}}{\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ}}:$$

Արդ իբրեւ զայս փոխանակ ժ *չափոյն յայս հաւասարութեան*

$$\text{է}=\frac{\text{մ}-\text{ա}\text{ժ}}{\text{բ}}=\frac{\text{մ}}{\text{բ}}-\frac{\text{ա}}{\text{բ}}\cdot\text{ժ},$$

հաստատիցեմք, ծագէ նոր հաւասարութիւնս

$$\text{է}=\frac{\text{մ}}{\text{բ}}-\frac{\text{ա}}{\text{բ}}\cdot\frac{\text{բ}\text{ն}-\text{դ}\text{մ}}{\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ}},\ \textit{կամ}$$

$$\text{է}=\frac{\text{մ}\text{բ}\text{գ}-\text{մ}\text{ա}\text{դ}-\text{ա}\text{բ}\text{ն}+\text{ա}\text{դ}\text{մ}}{\text{բ}(\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ})}$$

$$\text{է}=\frac{\text{մ}\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{բ}\text{ն}}{\text{բ}(\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ})}$$

$$\text{է}=\frac{\text{գ}\text{մ}-\text{ա}\text{ն}}{\text{բ}\text{գ}-\text{ա}\text{դ}}$$

Ա. *Օրինակ: Եթէ դնիցեմք* ա$=12$, բ$=9$, մ$=42$, *եւ* գ$=14$, դ$=10$, ն$=48$, *ելանիցէ*

$$\text{ժ}=\frac{9\cdot48-10\cdot42}{9\cdot14-12\cdot10}=\frac{9\cdot8-10\cdot7}{3\cdot7-2\cdot10}=\frac{2}{1}=2,\ \textit{եւ}$$

$$\text{է}=\frac{14\cdot42-12\cdot48}{9\cdot14-12\cdot10}=\frac{14\cdot7-2\cdot48}{3\cdot7-2\cdot10}=\frac{98-96}{1}=2.$$

Ուստի եւ առնու այրն յաւուրն 2 *դահեկանս, նոյնպէս եւ կինն եւ որդին միանգամայն* 2:

Բ. *Օրինակ: Դնիցուք գրեցուք, եթէ* ա$=12$ բ$=8$, մ$=48$, *եւ* գ$=15$, դ$=10$, ն$=60$ *իցեն. լինիցի*

$$\text{ժ}=\frac{8\cdot60-10\cdot48}{8\cdot15-12\cdot10}=\frac{480-480}{120-120}=\frac{0}{0},\ \textit{եւ}$$

$$\text{է}=\frac{15\cdot48-12\cdot60}{8\cdot15-12\cdot10}=\frac{720-720}{120-120}=\frac{0}{0}.$$

Վերագոյն (Թ· 331·) տեսաք, եթէ չափս $\frac{0}{0}$ է նշանակ անյայտ լինելոյ խնդրոյն. քանզի անդէն $\frac{0}{0}$ էր վերջին կատարած հաշուին, զոր եւ աստէն տեսանեմք: Այլ եթէ զի՛նչ ինչ արդեւք պատճառք իցեն անյայտ լինելոյ խնդրոյն, յորժամ ըստ չափու անյայտ չափուցն, նոյնչափ եւ հաւասարութիւնք կազմեալ իցեն: Այս ինչ է պատճառն, զի երկրորդ հանգամանք խնդրոյն փակեալ բովանդակին յառաջին հանգամանսն, յորմէ ելանէ մի եւեթ հաւասարութիւն: Այլ զի դիւրագոյնս կարիցես ի միտ առնուլ, դիցուք զերկուս հաւասարութիւնսն

$$12ք+8ւ=48$$
$$15ք+10ւ=60$$

Իբրեւ զառաջին հաւասարութիւնն ընդ 4, եւ զերկրորդն ընդ 5 բաժանեալ կարճ ի կարճոյ դրոշմիցես, երկոքին եւս շրջիցին ի հաւասարութիւն $3ք+2ւ=12$, որով եւ անյայտ է խնդիրն:

Գ· Օրինակ: Իցէ $ա=5$, $բ=3$, $գ=31$, եւ $դ=7$, $ե=3$, $զ=47$. արդ լինիցի

$$ք=\frac{3\cdot47-3\cdot31}{3\cdot7-5\cdot3}=\frac{141-93}{21-15}=\frac{48}{6}=8, \text{ եւ}$$
$$ւ=\frac{7\cdot31-5\cdot47}{3\cdot7-5\cdot3}=\frac{217-235}{21-15}=\frac{-18}{6}=-3:$$

Ուրացական զօրութիւնն ւ չափոյն, յայտ առնէ. եթէ կինն եւ որդին ոչ միայն զուճիկս առնն չյաւելուն, այլ եւ 3 դահեկանաւ չափ նուազեցուցանեն, եւ վնասուց լինին պատճառք: Արդ յայս դէպս, հարկ է զչափս ւ ուրացական նշանաւ ի հաւասարութեան անդ դնել. եթէ այլ հանգամանք խնդրոյն հնարաւորք իցեն: Աստի եւ պարտ է

$$5ք-3ւ=31, \text{ եւ } 7ք-3ւ=47 \text{ դնել:}$$

Խորհուրդ տամք ուսանելեաց, լուծանել եւ զբազում խնդիրս ըստ չորից կարգաց զոր եդաք, քանզի ընդելանելով եւեթ գայ հնար զդէպս եւ զխնդիրս արագ արագ լուծանել, եւ ի վերայ հասանել, եթէ զո՞ր ի չորից կարգաց առաւ պարտ իցէ ի կիր արկանել։

Բ. ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ, ՅՈՐՍ ԵՐԵՔ ԱՆԾԱՆՕԹ ՉԱՓՔ ԳՏԱՆԻՑԻՆ

376. Եթէ այնպէս իմն դէպք լինիցին, զի խնդրոյ իւրք երեք անծանօթ չափք իցեն, այնպէս իմն հանգամանք խնդրոյն պահանջեն կարգել, որպէս զի երեք ազգի ազգի հաւասարութիւնք լինիցին. քանզի եթէ պակասիցեն հաւասարութիւնքն, Անյայտ է խնդիրն։ Որպիսի ինչ է խնդիրս երկուք հաւասարութեամբք,

$$\text{ա}).\ ջ+\dagger=7$$
$$\text{բ}).\ 3ջ+2\ddagger=23$$

Յառաջնոյն (ա) յառաջ գայ, եթէ $ջ=7-\dagger$, իսկ յերկրորդէն

$$\ddagger=\frac{23-3ջ}{2}, \text{ եւ փոխանակելով},$$

$$\ddagger=\frac{23-3(7-\dagger)}{2},$$

$$\ddagger=\frac{2+3\dagger}{2}=\ 1+\frac{3}{2}\dagger$$

յորում յայտ յանդիման տեսանես, եթէ զօրութիւն ջ եւ $\ddagger$ չափուցն զ$\dagger$ չափոյն կախեալ կայ, վասն որոյ եւ անյայտ։

Արդ իբրեւ երեք հաւասարութիւնք երիւք անծանօթ չափովք գտանիցին, մարթ է նոյա ազգի ազգի եւ այլեւայլ օրինակօք, որպէս վերադոյնդ (∸. 375.) տացաք. ի վերայ հասանել, զոր եւ ուսուցանիցեն մօտաւոր կանոնքս։

377. Առաջին կարգ։ Պարտ եւ պատշաճ է յերից հաւասարութեանց եւս ուրոյն ուրոյն զզօրութիւն միոյ յանծանօթ չափուցն խնդրել. եւ այս լինիցի, յորժամ զերկուս այլ անծանօթսն իբրեւ ծանուցեալս իմն համարիցիս: Յետ այնորիկ հարկ է զառաջինն եւ զերկրորդն, ապա զառաջինն եւ զերրորդն, կամ զերկրորդն եւ զերրորդն անդստին ի զօրութեանցն զտանելոց միմեանց հաւասարս դնել, յորմէ լինիցի երկուս հաւասարութիւնս երկուք անծանօթ չափովք ունել, եւ ապա զերան վճարել ըստ 375 համարոյ: Զոր օրինակ եթէ կամք իցեն մեզ զզօրութիւնս ց, փ եւ ք չափուց, ի մտաւոր հաւասարութենէս գտանել,

$$\text{Ա}'.\ \text{ա}ց+\text{բ}փ+\text{գ}ք=\text{դ}$$
$$\text{Բ}'.\ \textit{ա}ց+\textit{բ}փ+\textit{գ}ք=\textit{դ}$$
$$\text{Գ}'.\ \text{Ա}ց+\text{Բ}փ+\text{Գ}ք=\text{Դ}$$

Յ Ա' հաւասարութենէ ծագէ $ց=\frac{\text{դ}-\text{բ}փ-\text{գ}ք}{\text{ա}}$

Ի Բ' " " $ց=\frac{\textit{դ}-\textit{բ}փ-\textit{գ}ք}{\textit{ա}}$

" Գ' " " $ց=\frac{\text{Դ}-\text{Բ}փ-\text{Գ}ք}{\text{Ա}}$, ուստի եւ

$$\frac{\text{դ}-\text{բ}փ-\text{գ}ք}{\text{ա}}=\frac{\textit{դ}-\textit{բ}փ-\textit{գ}ք}{\textit{ա}}=\frac{\text{Դ}-\text{Բ}փ-\text{Գ}ք}{\text{Ա}}$$

յորոց կազմին երկու հաւասարութիւնք,

$$\text{Դ}'.\ \frac{\text{դ}-\text{բ}փ-\text{գ}ք}{\text{ա}}=\frac{\textit{դ}-\textit{բ}փ-\textit{գ}ք}{\textit{ա}}$$

$$\text{Ե}.\ \frac{\text{դ}-\text{բ}փ-\text{գ}ք}{\text{ա}}=\frac{\text{Դ}-\text{Բ}փ-\text{Գ}ք}{\text{Ա}}$$

Ի Դ' հաւասարութենէ յառաջ գայ

$$\textit{ա}\text{դ}-\textit{ա}\text{բ}փ-\textit{ա}\text{գ}ք=\text{ա}\textit{դ}-\text{ա}\textit{բ}փ-\text{ա}\textit{գ}ք \text{ կամ}$$
$$\text{Զ}.\ (\text{ա}\textit{բ}-\textit{ա}\text{բ})փ+(\text{ա}\textit{գ}-\textit{ա}\text{գ})ք=\text{ա}\textit{դ}-\textit{ա}\text{դ}:$$

Իսկ յԵ հաւասարութենէ յառաջ գայ

$$\text{Ա}\text{դ}-\text{Ա}\text{բ}փ-\text{Ա}\text{գ}ք=\text{ա}\text{Դ}-\text{ա}\text{Բ}փ-\text{ա}\text{Գ}ք,\text{ կամ}$$
$$\text{Է}.\ (\text{ա}\text{Բ}-\text{Ա}\text{բ})փ+(\text{ա}\text{Գ}-\text{Ա}\text{գ})ք=\text{ա}\text{Դ}-\text{Ա}\text{դ}:$$

Ի Զ եւ եւ Է հաւասարութեանց գտանի ըստ Հ. 375,

$$ֆ=\frac{(\bar{ա}դ-ա\bar{դ})(\bar{ա}Գ-Ա\bar{գ})-(\bar{ա}Դ-Ա\bar{դ})(\bar{ա}գ-ա\bar{գ})}{(\bar{ա}բ-ա\bar{բ})(\bar{ա}Գ-Ա\bar{գ})-(\bar{ա}Բ-Ա\bar{բ})(\bar{ա}գ-ա\bar{գ})}\ \text{կամ}$$

$$ֆ=\frac{\bar{ա}դԳ-\bar{ա}գԴ+\bar{գ}աԴ-\bar{դ}աԳ+\bar{դ}գԱ-\bar{գ}դԱ}{\bar{ա}բԳ-\bar{ա}գԲ+\bar{գ}աԲ-\bar{բ}աԳ+\bar{բ}գԱ-\bar{գ}բԱ},\ \text{եւ}$$

$$ք=\frac{(\bar{ա}բ-ա\bar{բ})(\bar{ա}Դ-Ա\bar{դ})-(\bar{ա}Բ-Ա\bar{բ})(\bar{ա}դ-ա\bar{դ})}{(\bar{ա}բ-ա\bar{բ})(\bar{ա}Գ-Ա\bar{գ})-(\bar{ա}Բ-Ա\bar{բ})(\bar{ա}գ-ա\bar{գ})},\ \text{կամ}$$

$$ք=\frac{\bar{ա}բԴ-\bar{ա}դԲ+\bar{դ}աԲ-\bar{բ}աԴ+\bar{բ}դԱ-\bar{դ}բԱ}{\bar{ա}բԳ-\bar{ա}գԲ+\bar{գ}աԲ-\bar{բ}աԳ+\bar{բ}գԱ-\bar{գ}բԱ}$$

Եթէ զզօրութիւնս $ֆ$ եւ $ք$ չափուց ի միում ի հաւասարութեանցն, զոր վերագոյն յիշատակեցաք, հաստատիցեմք, զոր օրինակ ի $յ=\frac{\bar{դ}-\bar{բ}ֆ-\bar{գ}ք}{\bar{ա}}$ հաւասարութեան, գտանիցի հաւասարութիւնս

$$յ=\frac{\bar{դ}բԳ-\bar{դ}գԲ+\bar{գ}դԲ-\bar{բ}դԳ+\bar{բ}գԴ-\bar{գ}բԴ}{\bar{ա}բԳ-\bar{ա}գԲ+\bar{գ}աԲ-\bar{բ}աԳ+\bar{բ}գԱ-\bar{գ}բԱ}:$$

Երկրորդ կարգ: Յետ գտանելոյ զզօրութիւն միոյ յանծանօթ չափուցն ի միում ի հաւասարութեանց, դրոշմեա զզօրութիւնն փոխանակ այնր անծանօթ չափոյ յայլ եւս երկուս հաւասարութիւնս, եւ լինիցի բովանդակ հաւասարութիւնն երկուք անծանօթ չափովք, եւ յետ այնորիկ զերան վճարեա ըստ ∸. 375: Դիցուք գրեսցուք եթէ իցեն հաւասարութիւնքս

$$\begin{array}{l} Ա'.\ \bar{ա}յ+\bar{բ}ֆ+\bar{գ}ք=\bar{դ} \\ Բ'.\ այ+բֆ+գք=դ \\ Գ'.\ Այ+Բֆ+Գք=Դ \end{array}$$

Յ Ա՛ հաւասարութենէ յառաջ գայ $ք=\frac{\bar{դ}-\bar{ա}յ-\bar{բ}ֆ}{\bar{գ}}$, զորոյ զզօրութիւնն, եթէ ի Բ՛ եւ ի Գ՛ հաստատիցեմք, ելանիցէ,

$$այ+բֆ+գ\cdot\frac{\bar{դ}-\bar{ա}յ-\bar{բ}ֆ}{\bar{գ}}=դ$$

$$\text{Ա.ջ}+\text{Բ.ֆ}+\text{Գ.}\,\frac{\text{է}-\text{տջ}-\text{բֆ}}{\text{ե}}=\text{Դ. կամ}$$

$$\text{Դ´. եաջ}+\text{երֆ}+\text{էդ}-\text{տդջ}-\text{բդֆ}=\text{եդ, այս ինքն}$$
$$(\text{եա}-\text{տդ})\text{ջ}+(\text{եր}-\text{բդ})\text{ֆ}=\text{եդ}-\text{էդ, եւ}$$

$$\text{Ե. եԱջ}+\text{եԲֆ}+\text{էԳ}-\text{տԳջ}-\text{բԳֆ}=\text{եԴ, այս ինքն}$$
$$(\text{եԱ}-\text{տԳ})\text{ջ}+(\text{եԲ}-\text{բԳ})\text{ֆ}=\text{եԴ}-\text{էԳ։}$$

Եւ եթէ ըստ **375** *համարոյ ընդ Դ´ եւ Ե վճարիցեմք, գտանեմք եթէ*

$$\text{ջ}=\frac{(\text{եդ}-\text{էդ})\,(\text{եԲ}-\text{բԳ})-(\text{եԴ}-\text{էԳ})\,(\text{եր}-\text{բդ})}{(\text{եա}-\text{տդ})\,(\text{եԲ}-\text{բԳ})-(\text{եԱ}-\text{տԳ})\,(\text{եր}-\text{բդ})}$$

$$\text{ջ}=\frac{\text{էրԳ}-\text{էդԲ}+\text{եդԲ}-\text{բդԳ}+\text{բդԴ}-\text{երԴ}}{\text{տրԳ}-\text{տդԲ}+\text{եաԲ}-\text{բաԳ}+\text{բդԱ}-\text{երԱ}},$$

որ նման իսկ է վերնոյն։ Ըստ այնմ օրինակի մարթ է գտանել եւ զզօրութիւնս ֆ եւ ւ չափուց։

Երրորդ կարգ։ Պարտ է յաւելուլ կամ հանել զԱ´ ի Բ´ հաւասարութենէ, եւ զԲ´ ի Գ´ հաւասարութենէ (ըստ Գ. կարգին. ∸. **375**), *որով շրջիցին երեք հաւասարութիւնքն յերկուս հաւասարութիւնս երկուքումբք անծանօթ չափովք, զորոց զզօրութիւնն մարթ է գտանել ըստ ∸.* **375**։ *Արդ իցեն երեք հաւասարութիւնք,*

$$\text{Ա´. տջ}+\text{բֆ}+\text{եւ}=\text{է}$$
$$\text{Բ´. աջ}+\text{րֆ}+\text{դւ}=\text{դ}$$
$$\text{Գ´. Աջ}+\text{Բֆ}+\text{Գւ}=\text{Դ.}$$

եթէ զԱ´ ա չափով բազմապատկեսցես եւ զԲ´ տ չափով, լինիցի

$$\text{Դ´. տաջ}+\text{բաֆ}+\text{եաւ}=\text{էա}$$
$$\text{Ե. տաջ}+\text{տրֆ}+\text{տդւ}=\text{տդ}$$
$$-\quad-\quad-\quad-$$

$$\text{Դ´}-\text{Ե}=\text{Զ.}\;(\text{բա}-\text{տր})\text{ֆ}+(\text{եա}-\text{տդ})\text{ւ}=\text{էա}-\text{տդ},$$

Դարձեալ, եթէ զԲ´ բազմապատկեսցեմք Ա. չափով, եւ զԳ´ ա չափով, ելանիցեն

Ե. աԱջ + բԱֆ + գԱք = դԱ,
Բ. աԱջ + աԲֆ + աԳք = աԴ
— — — —

Ե — Բ = Թ. (բԱ — աԲ) ֆ + (գԱ — աԳ) ք = դԱ — աԴ

Ի Զ. եւ ի Թ. հաւասարութեանց, կարիցես ըստ Հ. 375, զգործութիւնս ֆ եւ ք չափուց դիւրաւ իմանալ, զորս իբրեւ յԱ', Բ' կամ Գ' դնիցես, հասանիցես եւ ի վերայ գործութեան ջ չափոյն:

Չորրորդ կարգ: Բազմացո զմին ի հաւասարութեանց անտի, զոր օրինակ զԱ' անյայտ մ թուով, եւ զԲ' ն թուով, որով գտանիցես զԴ' եւ Ե հաւասարութիւնս, եւ զերկուս հաւասարութիւնս զայսոսիկ յօդեա ընդ Գ' հաւասարութեան ի ձեռն յաւելման: Այսու օրինակաւ ծագիցէ մեւս եւս հաւասարութիւն Զ., յորմէ կարիցես զգործութիւնս միոյ միոյ յանծանօթիցն գտանել, յորժամ զգործակիցս այլոց երկուց հաւասարութեանց = 0 դիցես, եւ ապա յինուհետեւ փոխանակ մ եւ ն չափուցն զգործութիւնսն ըստ Հ. 375, հաստատիցես:

Դիցուք գրեսցուք, եթէ

Ա'. ա̄ջ + բ̄ֆ + գ̄ք = դ̄
Բ'. աջ + բֆ + գք = դ
Գ'. Աջ + Բֆ + Գք = Դ, արդ
Ա'. մ = Դ'. ա̄մջ + բ̄մֆ + գ̄մք = դ̄մ,
Բ'. ն = Ե. անջ + բնֆ + գնք = դն, ուստի եւ
Գ' + Դ' + Ե' = Զ. (Ա + ան + ա̄մ) ջ + (Բ + բն + բ̄մ) ֆ + (Գ + գն + գ̄մ) ք = Դ + դն + դ̄մ:

Արդ եթէ կամիցիս զգործութիւն ջ չափոյն գտանել, պարտ է քեզ Բ + բն + բ̄մ = 0, եւ Գ + գն + գ̄մ = 0 դնել, յորմէ ծագիցէ ջ = (Դ + դն + դ̄մ) / (Ա + ան + ա̄մ): Նաեւ քանզի է

բ̄մ + բն = — Բ
գ̄մ + գն = — Գ. են, աստանօր յառաջ գայ, եթէ

$$ս=\frac{բԳ-դԲ}{եդ-զբ}$$

$$ն=\frac{զԲ-եԳ}{եդ-զբ}$$

Իբրեւ զգործութիւնս զայսոսիկ դրոշմիցես ի չափն որ հաւասար իցէ յ չափոյն,
$յ=(Դ+դն+տս):(Ա+ան+ոս)$, գտանիցես,

$$յ=\left(Դ+դ\cdot\frac{զԲ-եԳ}{եդ-զբ}+տ\cdot\frac{բԳ-դԲ}{եդ-զբ}\right):$$

$$\left(Ա+ա\cdot\frac{զԲ-եԳ}{եդ-զբ}+ո\cdot\frac{բԳ-դԲ}{եդ-զբ}\right),$$ ուստի եւ

$$յ=\frac{Դ(եդ-զբ)+դ(զԲ-եԳ)+տ(բԳ-դԲ)}{եդ-զբ}:$$

$$\frac{Ա(եդ-զբ)+ա(զԲ-եԳ)+ո(բԳ-դԲ)}{եդ-զբ},$$

$$յ=\frac{Դ(եդ-զբ)+դ(զԲ-եԳ)+տ(բԳ-դԲ)}{Ա(եդ-զբ)+ա(զԲ-եԳ)+ո(բԳ-դԲ)},$$

$$յ=\frac{տբԳ-տդԲ+զդԲ-եդԳ+եդԴ-զբԴ}{ոբԳ-ոդԲ+զաԲ-եաԳ+եդԱ-զբԱ},$$

յորժամ զանդամն համարչին եւ անուանչին յետս ընդդէմ դրոշմիցեմք։ Ըստ սմին օրինակի գտանի եւ զօրութիւնն ‡ չափոյն, յորժամ զգործակիցս յ եւ + չափուց $=0$ դնիցեմք, նոյնպէս եւ զօրութիւն + չափոյն։

Եթէ զո՞ր ի չորից կարգաց առաւել պարտ իցէ ի դիպել դիպաց ի կիր արկանել, ճարտարութիւն մտաց խորաքննչիր մարդոյ ցուցանիցէ. այլ սակայն ընդելանելով մարթ է վաղվաղակի, եւ արագ արագ զհաւասարութիւնն գտանել, եւ այնու եւս գոյ հնար ուսանել. եթէ ո՛ր կարգ, յորպիսի՛ դէպս վարիցի։ Վասն ընդելանելոյ ուսանելեացն դնեմք զմօտաւոր օրինակս, զոր եւ չորիւք կարգօք, զորոց ցայս վայր ճառ արկեալ խօսեցաք, յանձն առնումք լուծանել։

Օրինակ։ Գտցուք գրեցուք, եթէ իցէ

Ա. $\text{ց}+\text{ֆ}+\text{ք}=9$

Բ. $3\text{ց}+2\text{ֆ}+\text{ք}=16$

Գ. $4\text{ց}+3\text{ֆ}+5\text{ք}=37$

Ըստ առաջին կարգի

Յ Ա. Հաւաս. $\text{ք}=9-\text{ց}-\text{ֆ}$,

Ի Բ. » $\text{ք}=16-3\text{ց}-2\text{ֆ}$,

» Գ. » $\text{ք}=\frac{37-4\text{ց}-3\text{ֆ}}{5}$, ուստի եւ

Դ. $9-\text{ց}-\text{ֆ}=16-3\text{ց}-2\text{ֆ}$,

Ե. $9-\text{ց}-\text{ֆ}=\frac{37-4\text{ց}-3\text{ֆ}}{5}$

Ի Դ. Հաւաս. $2\text{ց}+\text{ֆ}=7$

Յ Ե. » $\text{ց}+2\text{ֆ}=8$

Եթէ զԵ 2 թուով բազմացուցանիցես, լինիցի

$$2\text{ց}+4\text{ֆ}=16,$$ յորմէ հանեալ զԴ,

$$\begin{array}{r} 2\text{ց}+4\text{ֆ}=16 \\ -\;2\text{ց}+\;\text{ֆ}=\;7 \\ \hline 3\text{ֆ}=9 \end{array}$$

$3\text{ֆ}=9$, ուստի եւ $\text{ֆ}=3$,

Յ Ե հաւասարութենէ

$\text{ց}=8-2\text{ֆ}$, եւ փոխանակելով

$\text{ց}=8-2\cdot3=8-6=2$

Իբրեւ զզօրութիւնս ց եւ ֆ չափուց փոխանակիցեմք ի հաւասարութեան

$\text{ք}=9-\text{ց}-\text{ֆ}$

$\text{ք}=9-2-3$

$\text{ք}=4$։

Ըստ երկրորդ կարգի

Յ Ա. հաւասարութենէ ծագէ $\text{ք}=9-\text{ց}-\text{ֆ}$, զոր իբրեւ ի Բ. եւ ի Գ. դնիցեմք, առնիցի

Դ. $3\text{ց}+2\text{ֆ}+9-\text{ց}-\text{ֆ}=16$, կամ

$2\text{ց}+\text{ֆ}=7$, եւ

$$\text{Ն}\cdot\ 4\text{յ}+3\text{ֆ}+45-5\text{յ}-5\text{ֆ}=37,\ \text{կամ}$$
$$-\text{յ}-2\text{ֆ}=-8$$

Որով եւ գտանի եթէ $\text{յ}=2$, $\text{ֆ}=3$, $\text{ք}=4$:

Ըստ երրորդ կարգի

Հան զՄ. ի Բ. հաւասարութենէ անտի, ապա բազմացո զՄ. 5իւ, եւ յարդեանցն հան զԳ. որով

$$\text{Գ}\cdot\ 2\text{յ}+\text{ֆ}=7,$$
$$\text{Ն}\cdot\ \text{յ}+2\text{ֆ}=8,\ \text{որպէս յառաջն:}$$

Ըստ չորրորդ կարգի

Եթէ բազմացուցանիցես զՄ. մ չափով, եւ զՆ. ն չափով, եղանիցէ

$$\text{Գ}\cdot\ \text{մ}\text{յ}+\text{մ}\text{ֆ}+\text{մ}\text{ք}=9\text{մ}$$
$$\text{Ն}\cdot\ 3\text{ն}\text{յ}+2\text{ն}\text{ֆ}+\text{ն}\text{ք}=16\text{ն}$$

Իսկ յաւելուցուս ի միմեանս զԳ., եւ զՆ., եւ զԿ., ծագիցէ

$$\text{Զ}\cdot\ (\text{մ}+3\text{ն}+4)\text{յ}+(\text{մ}+2\text{ն}+3)\text{ֆ}+(\text{մ}+\text{ն}+5)\text{ք}=9\text{մ}+16\text{ն}+37$$

Արդ զի կարիցես զ յ գտանել, համարեաց

$$\text{մ}+2\text{ն}+3=0,$$
$$\text{մ}+\text{ն}+5=0\ \text{զորս հանեալ ի միմեանց,}$$
$$-\quad-\quad-$$
$$\overline{\text{ն}-2=0,\ \text{ուստի եւ ն}=2,\ \text{եւ}}$$
$$\text{մ}=-\text{ն}-5=-7,$$

Իսկ զզօրութիւնս զայս դիցես ի հաւասարութեան,

$$\text{յ}=\frac{9\text{մ}+16\text{ն}+37}{\text{մ}+3\text{ն}+4},\ \text{լինիցի}$$
$$\text{յ}=\frac{-9\cdot7+16\cdot2+37}{-7+3\cdot2+4}$$
$$\text{յ}=\frac{-63+69}{3}=\frac{6}{3}=2$$

Եթէ կամիցիս գտանել զ ֆ, համարեաց

$$ր+3ն+4=0$$
$$ր+ն+5=0$$, զորս հանեալ ի միմեանց,

$$-\quad-\quad-$$

$$2ն-1=0$$, ուստի եւ $ն=\frac{1}{2}$, եւ

$$ր=-ն-5=-\frac{1}{2}-5=-\frac{11}{2}:$$

Իբրեւ զզօրութիւնս զայս դիցես ի հաւասարութեան,

$$ք=\frac{9ր+16ն+37}{ր+2ն+3}$$, լինիցի

$$ք=\frac{9\cdot-\frac{11}{2}+16\cdot\frac{1}{2}+37}{-\frac{11}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3}$$

$$ք=\frac{-9}{2}:\frac{-3}{2}=3$$

Եթէ կամիցիս գտանել զք, դիցուք

$$ր+3ն+4=0$$
$$ր+2ն+3=0$$, զորս հանեալ ի միմեանց,

$$-\quad-\quad-$$

$$ն+1=0$$, ուստի եւ $ն=-1$, եւ

$$ր=-2ն-3=2-3=-1.$$

Իբրեւ զզօրութիւնս զայս դիցես ի հաւասարութեանս,

$$ք=\frac{9ր+16ն+37}{ր+ն+5}$$, լինիցի

$$ք=\frac{-9-16+37}{-1-1+5}=\frac{12}{3}=4:$$

Առաւել եւս դիւրագոյն եւ արագ կատարէին իւքն, եթէ զլուծանողականութիւն Ա. եւ Բ. հաւասարութեանց ի Գ. հաւասարութենէ հանեալ էաք: Քանզի

Գ.. 4յ+3ֆ+5ւ=37, եւ
Ա.+Բ.. 4յ+3ֆ+2ւ=25,
— — — —

3ւ=12, ուստի եւ ւ=4,

Իբրեւ զզօրութիւն ւ չափոյն յԱ. եւ ի Բ. հաստատիցեմք, կարիցեմք այնուհետեւ ըստ Հ. 375 գիւտն վճարել:

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր: Արք երեք խաղացին ընդ միմեանս: Յառաջնում մասին խաղուցն կորոյս Ա., իսկ Բ. եւ Գ. շահեցան այնչափ ինչ, որչափ յառաջագոյն քան զխաղն ունէին: Յերկրորդում մասին խաղուցն կորոյս Բ., իսկ Ա. եւ Գ. շահեցան այնչափ ինչ, որչափ ինչ միանգամ ի սկսանել երկրորդ խաղուն ունէին: Յերրորդում մասին կորոյս Գ., եւ տուժեցաւ Ա. եւ Բ. արանցն այնչափ ինչ, որչափ ինչ միանգամ մի մի յերկոցունցն ի սկսանել երրորդ խաղուն ունէին: Ի կատարած խաղուցն, ունէին ամենեքին 2 դահեկանս գերմանացւոց: Արդ կամիմք ի վերայ հասանել, եթէ որչափ ինչ դրամովք մի մի ի նոցանէ ի խաղուն վարեցան:

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք եթէ արծաթն, զոր ի սկզբան անդ ունէր Ա., իցէ=յ, իսկ արծաթն Բ. առնն=ֆ, եւ Գ. առնն=ւ, արդ յետ առաջնոյ մասին խաղուցն ունէր դեռեւս

Ա. յ−ֆ−ւ,
Բ. 2ֆ
Գ.. 2ւ:

Յետ երկրորդ մասին խաղուցն ունէր

Ա. 2յ−2ֆ−2ւ,
Բ.. 2ֆ−(յ−ֆ−ւ)−2ւ=3ֆ−յ−ւ
Գ.. 4ւ:

Յետ երրորդ մասին ունէր

Ա․ $4ց-4ֆ-4ք$
Բ․ $6ֆ-2ց-2ք$,
Գ․ $4ք-(2ց-2ֆ-2ք)-(3ֆ-ց-ք)$
կամ $7ք-ց-ֆ$։

Իսկ քանզի մի մի իւրաքանչիւր ի նոցանէ ի կատարած խաղուցն ունէր 2 դահեկանս գերմանացւոց, որ է=120 նպք․ ապա ուրեմն հարկ է

1) $4ց-4ֆ-4ք=120$ նպք,
2) $-2ց+6ֆ-2ք=120$ „
3) $-ց-ֆ-7ք=120$ „ լինել

Բաժանեա զ1 հաւասարութիւնն ընդ 4, եւ զ2 հաւասարութիւնն ընդ 2, ելանիցէ

ա) $ց-ֆ-ք=30$
բ) $-ց+3ֆ-ք=60$
գ) $-ց-ֆ+7ք=120$,

Յաւել ի միմեանս զա եւ զբ, լինիցի

դ) $2ֆ-2ք=90$

եւ հան զբ ի գ հաւասարութենէ, ելանիցէ

ե) $-4ֆ+8ք=60$

Իբրեւ զդ բաժանիցես ընդ 2 եւ զե ընդ 4, ելանէ

զ) $ֆ-ք=45$, եւ
է) $-ֆ+2ք=15$։

Արդ յաւել ի միմեանս զզ եւ զէ, ելանէ

ը) $ք=60$,

Օ․ զ հաւասարութեան զհետ գայ, եթէ $ֆ=45+ք$, եւ փոխանակելով

$$ֆ=45+60=105։$$

Յա հաւասարութենէ գտանի

$$ց=30+ֆ+ք,$$ ուստի եւ
$$ց=30+105+60=195։$$

Ապա ուրեմն Ա․ ունէր 195 նպք․=3 դահ․, 15 նպք․ իսկ Բ․ 105 նպք․=1 դահ․, 45 նպք․ եւ Գ․ 60 նպք․=1 դահ․։

Քննեա եւ տես եթէ զօրութիւնք համդամանաց խնդրոյն պատշաճիցին։

Բ. Խնդիր: Երեք եղբարք գնոց առին պարտէզ մի 2400 դահեկանաց: Որ մանկագոյնն էր ի նոցանէ ասէր, Եթէ տուեալ էր ինձ երէց եղբօրս զկէս ընչից իւրոց, կարէի ես առանձինն զգրախտն զայն գնոց առնուլ: Ընդ որ պատասխանի տուեալ եղբօրն ասէ. Եթէ երիցագոյն եղբօրս տուեալ էր ինձ զ $\frac{1}{3}$ մասն դրամոցն իւրոց կարէի միայն զայն գնոց առնուլ: Իսկ երիցագոյնն ասէ ցմանկագոյնն. Տուր ինձ զ $\frac{1}{4}$ մասն դրամոց քոց, եւ ես առանձինն զգինն հատուցից: Արդ ուրչա՞փ ինչ մի մի ի նոցանէ ունիցի դրամս:

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Արծաթն մանկագունին իցէ ʒ, իսկ երիցուն $\ddagger$, եւ երիցագունին $\dagger$, արդ ըստ հանգամանաց խնդրոյն է

$$\text{Ա.}\quad \text{ʒ}+\frac{1}{2}\ddagger=2400 \text{ կամ } 2\text{ʒ}+\ddagger=4800$$

$$\text{Բ.}\quad \ddagger+\frac{1}{3}\dagger=2400 \quad „ \quad 3\ddagger+\dagger=7200$$

$$\text{Գ.}\quad \dagger+\frac{1}{4}\text{ʒ}=2400 \quad „ \quad 4\dagger+\text{ʒ}=9600$$

Ի Ա. հաւասարութեան գտեալ զայ $\ddagger=4800-2\text{ʒ}$, զոր իբրեւ ի Բ. հաւասարութեանն դնիցեմք, ելանէ,

$$3(4800-2\text{ʒ})+\dagger=7200, \text{ կամ}$$
$$14400-6\text{ʒ}+\dagger=7200$$
$$-6\text{ʒ}+\dagger=7200-14400=-7200 \text{ կամ}$$

Դ. $6\text{ʒ}-\dagger=7200$, զոր իբրեւ բազմապատկեսցուք 4իւք $24\text{ʒ}-4\dagger=28800$, յաւելեալ յայն զհաւասարութիւնս Գ. $4\dagger+\text{ʒ}=9600$, ելանէ

$$25\text{ʒ}=38400, \text{ ուստի եւ}$$

$\text{ʒ}=1536$, եւ փոխանակելով ի հաւասարութեան

$$\dagger=\frac{9600-\text{ʒ}}{4}, \text{ ելանիցէ}$$

$$\dagger=\frac{9600-1536}{4}=\frac{8064}{4}=2016$$

եւ իբրեւ զզօրութիւն ȝ չափոյն դրոշմիցես ի հաւասարութեանս

$$\ddagger=4800-2\text{ȝ},\ \text{լինիցի}$$
$$\ddagger=4800-2\cdot1536,$$
$$\ddagger=4800-3072=1728:$$

գ. **Խնդիր**: Երեք մանկունք ածին խնձոր ի քաղաքէն: Բովանդակ խնձորքն երեքպատիկ առաւել են քան զխնձորս առաջնոյն: Թիւ խնձորոց առաջնոյն, եւ երկպատիկն խնձորոց երկրորդին միանգամայն, 20իւ չափ առաւելուն քան զերկպատիկ թիւ խնձորոց երրորդին: Ապա եթէ ոք ի խնձորոց երրորդին ի բաց հանցէ այնչափ ինչ, որչափ ինչ միանգամ երկրորդն ունիցի. յայնժամ առաջինն ունիցի երիցս աւելի քան զայն, զոր դեռ ունիցի երրորդն: Արդ որչա՞փ ինչ խնձոր եբեր մի մի ի մանկանցն:

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի: Զթիւ խնձորոց առաջնոյն նշանակեսցուք ȝ չափով, զերկրորդին ‡, եւ զերրորդին † չափովք. արդ գտանին ըստ հանգամանաց խնդրոյն հաւասարութիւնքս,

$$\text{Ա.}\ \text{ȝ}+\ddagger+\dagger=3\text{ȝ}$$
$$\text{Բ.}\ \text{ȝ}+2\ddagger=2\dagger+20$$
$$\text{Գ.}\ \dagger-\ddagger=\frac{\text{ȝ}}{3}$$

Եթէ կարգեալ յարդարիցեմք զհաւասարութիւնս զայսոսիկ, գտանեմք

ա) $-2\text{ȝ}+\ddagger+\dagger=0$

բ) $\text{ȝ}+2\ddagger-2\dagger=20$, կամ $\text{ȝ}+2(\ddagger-\dagger)=20$

գ) $-\text{ȝ}-3\ddagger+3\dagger=0$: Արդ $\ddagger+\dagger=$

դ) $-\ddagger+\dagger=20$, կամ $\ddagger-\dagger=-20$,

Իբրեւ զզօրութիւնս ի բ հաստատիցեմք, ելանէ,

$$\text{ȝ}+2\times-20=20$$
$$\text{ȝ}=20+40=60$$

Զոր իբրեւ փոխանակիցեմք ի հաւասարութեան

$փ+ք=2ց$ (որ գտանի յա հաւաս.), ելանէ

$փ+ք=2\cdot 60=120$, եւ քանզի

$-փ+ք=20$, ուստի եւ

$$փ=\frac{120-20}{2}=50,$$ եւ

$$ք=\frac{120+20}{2}=70$$ (Տ. 375. խնդ. Ա.)

Դ. Խնդիր։ Պարտ է զթիւս 47 յերիս մասունս կտորել, որպէս զի իբրեւ զերկրորդ մասն ընդ առաջինն բաժանիցէ ոք՝ ելանիցէ 1 միացորդ եւ 1 քանորդ. իսկ իբրեւ երրորդն ընդ երկրորդն բաժանիցի, առնիցէ 1 քանորդ եւ 3 միացորդ։

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի։ Երեք մասունքն իցեն ց, փ, ք. ուստի եւ ըստ հանգամանաց խնդրոյն

1). $\frac{փ}{ց}=1+\frac{1}{ց}$ կամ $փ=ց+1$

2). $\frac{ք}{փ}=1+\frac{3}{փ}$,, $ք=փ+3$

ուստի ելանեն երեք հաւասարութիւնք

Ա. $ց+փ+ք=47$,

Բ. $-ց+փ=1$, (յ1 հաւ.)

Գ. $-փ+ք=3$, (յ2 հաւ.) Յորմէ եւ Ա.+Բ.=

Դ. $2փ+ք=48$, եւ Գ. 2 թուով բազմացուցեալ առնէ

$-2փ+2ք=6$, ուստի յաւելլով

$3ք=54$, եւ

$ք=18$։

Արդ զԳ. հաւասարութեան զհետ գայ

$փ=ք-3$, եւ փոխանակելով

$փ=18-3=15$։ Իբրեւ զգործութիւնս դնիցեմք ի $ց=փ-1$ (ի Բ. հաւ.) հաւասարութեան, ելանէ $ց=15-1=14$.

Ե. Խնդիր։ Գտանել թիւ ինչ երիւք նշանակօք, որոյ այսպիսի ինչ հանգամանք իցեն։ 1) Ի-

բրեւ բաժանիցի թիւն այն ընդ բովանդակութիւն նշանակաց թուոյն, ելանիցէ քանորդ $=41$:
2) Յորժամ բովանդակութիւն առաջին եւ երրորդ նշանակացն ընդ միջին նշանակն բաժանիցի, ելանիցէ քանորդ նման այնմ, որ ծագէ, եթէ զերկպատիկն առաջին նշանակին որ ընդ ձախմէ 1ով աճեցուցեալ ընդ միջին նշանակն բաժանիցէ ոք: 3) Իբրեւ կարգ նշանակաց թուոյն շրջիցի, եւ հանցի ի նմանէ խնդրեալ թիւն, ելանիցէ այլակերպութիւն՝ իննպատիկ բովանդակութիւն երկուց վերջին աջակողմեան նշանակացն խնդրեալ թուոյն:

Լուծ. հաւ. եւ Պատասխանի: Համարեսցուք եթէ տեղի հարիւրաւորին իցէ $=$ յ, տեղի տասնաւորին $=$ ֆ, եւ նշանակն միութեանց $=$ ք, արդ խնդրեալ թուոյն հասարակաց օրինակն է $100յ+10ֆ+ք$. եւ ի հանգամանաց խնդրոյն, ծագեն մօտաւոր երեք հաւասարութիւնք,

$$\text{Ա.}\quad \frac{100յ+10ֆ+ք}{յ+ֆ+ք}=41$$

$$\text{Բ.}\quad \frac{յ+ք}{ֆ}=\frac{2յ+1}{ֆ}$$

$$\text{Գ.}\quad 100ք+10ֆ+յ-(100յ+10ֆ+ք)=9(ֆ+ք)$$

Ց Ա. հաւասարութեան զհետ գայ.

$$\text{ա).}\quad 59յ-31ֆ-40ք=0,$$

Ց Բ. հաւասարութեան զհետ գայ,

$$\text{բ).}\quad -յ+ք=1,\ \text{եւ}$$

Ց Գ. հաւասարութեան զհետ գայ,

$$\text{գ).}\quad -11յ-ֆ+10ք=0,$$

Ի Բ հաւասարութենէ գտանի $ք=յ+1$, զոր իբրեւ յա եւ ի գ հաստատիցեմք, ելանեն

$$\text{ա).}\quad 19յ-31ֆ=40$$

$$\text{բ).}\quad յ+ֆ=10,$$ որ 31ով բազմացուցեալ

$$\text{գ).}\quad 31յ+31ֆ=310,$$ զոր յաւելեալ յա

$$\text{ա+գ)}\quad 50յ=350$$

ջ=7, եւ փոխանակելով ի
ֆ=10—ջ, որ ծագէ ի բ հաւ.
ֆ=10—7=3, եւ
փ=ջ+1=7+1=8.

Արդ խնդրեալ թիւն է 738:

Զ. Խնդիր: Առն ուրումն են երեք ազգք նիւթոց, Ա՛, Բ՛, եւ Գ՛, որք ի նոյն մասանց նիւթոց կազմեալ են. զոր օրինակ յոսկւոյ, յարծաթոյ եւ ի պղնձոյ: Յառաջին նիւթն Ա՛, են միութեամբ կշռոյ իւրք ա մասն ոսկի, ա մասն արծաթ, եւ Ա. մասն պղինձ: Իսկ յերկրորդումն Բ՛. նոյն օրինակ միութեամբ կշռոյ իւրք բ մասն ոսկի, բ մասն արծաթ եւ Բ՛ մասն պղինձ: Եւ ի Գ՛ գտանին նոյնպէս գ մասն ոսկի, գ մասն արծաթ, եւ Գ. մասն պղինձ: Արդ կամք են առնս յերից Ա՛, Բ՛ եւ Գ՛ նիւթոց այնպիսի ինչ Խ խառնուած յօրինել, զի ի նմա միութեամբ նորին կշռոյ ա՛ մասն ոսկի, բ՛ մասն արծաթ եւ գ՛ մասն պղինձ գտանիցի: Արդ որչափ ինչ մասն յերից Ա՛, Բ՛, Գ՛ խառնուածոց նիւթոյն պարտ իցէ ի նոր խառնուած անդր առնուլ:

Կազմ. հաւ. եւ Պատասխանի: Դիցուք գրեացուք եթէ ի խառնուածոյն

Ա՛. յորում է ա Մ. Ոս. ա Մ. Ար. Ա. Մ. Պղ. առնու ջ չափ
Բ՛ " " բ " " բ " Բ " " ֆ "
Գ՛ " " գ " " գ " Գ " " փ "

ուստի եւ վասն խառնուածոյն

Խ " " ա՛ " " բ՛ " գ՛ " " ջ+ֆ+փ:

Ապա ուրեմն ի խնդրեալ Խ խառնուածն գտանիցեն

1). աջ+բֆ+գփ=ա՛ մասն Ոսկի,
2). աջ+բֆ+գփ=բ՛ մասն Արծաթ, եւ
3). Աջ+Բֆ+Գփ=գ՛ մասն Պղինձ:

Զորոց զհետ գան մերձաւոր զօրութիւնքս

$$յ=\frac{\dot{ա}'(բԳ-գԲ)+բ'(\dot{գ}Բ-\dot{բ}Գ)+գ'(\dot{բ}գ-\dot{գ}բ)}{\dot{ա}(բԳ-գԲ)+ա(\dot{գ}Բ-\dot{բ}Գ)+Ա(\dot{բ}գ-\dot{գ}բ)}$$

$$ֆ=\frac{\dot{ա}'(գԱ-աԳ)+բ'(\dot{ա}Գ-\dot{գ}Ա)+գ'(\dot{գ}ա-\dot{ա}գ)}{\dot{ա}(բԳ-գԲ)+ա(\dot{գ}Բ-\dot{բ}Գ)+Ա(\dot{բ}գ-\dot{գ}բ)},\ եւ$$

$$ք=\frac{\dot{ա}'(աԲ-բԱ)+բ'(\dot{բ}Ա-\dot{ա}Բ)+գ'(\dot{ա}բ-\dot{բ}ա)}{\dot{ա}(բԳ-գԲ)+ա(\dot{գ}Բ-\dot{բ}Գ)+Ա(\dot{բ}գ-\dot{գ}բ)}$$

Օրինակ: Ոսկերիչ մի ունի երիս ձողս ձուլածոյս, կազմեալ ի խառնուածոյ ազգիազգի քրէականնութեոց, յորս քրէականնութիւնքն գտանին այսչափ ինչ չափով,

յԱ. ձողն գտանի ի 1 լ.	ի. 24 կ. Ո. ոս.	6 կ. Ո. արծ.	2 Ո. Պղ.				
ի Բ'	„	2	„	6	„	24	„
ի Գ'	„	0	„	4	„	28	„

Արդ եթէ կամիցի ոսկերիչն յերից ձողոյն խառնուած մի յօրինել, որպէս զի ի 1 լիտր խառնուածն 8 կ. ուն. Ոսկի, 6 կէս ուն. Արծաթ, եւ 18 կ. ուն. Պղինձ գտանիցի. որչափ ինչ մասունս լուեր յիւրաքանչիւր ձողոյն պարտ իցէ նմա առնուլ:

Յօրինակիս է

$$\dot{ա}=24 \qquad \dot{բ}=2 \qquad \dot{գ}=0 \qquad \dot{ա}'=8$$
$$ա=6 \qquad բ=6 \qquad գ=4 \qquad բ'=6$$
$$Ա=2 \qquad Բ=24 \qquad Գ=28 \qquad գ'=18$$

ուստի եւ

$$Ա''.\ 24յ+2ֆ=8 \quad կամ \quad 12յ+ֆ=4$$
$$Բ''.\ 6յ+6ֆ+4ք=6 \quad „ \quad 3յ+3ֆ+2ք=3$$
$$Գ''.\ 2յ+24ֆ+28ք=18 \quad „ \quad յ+12ֆ+14ք=9$$

Իբրեւ բազմացուցանիցի Բ. 7 թուով, եղանէ

$21յ+21ֆ+14ք=21$, յորմէ հանեալ

$յ+12ֆ+14ք=9$,

— — — —ծագէ

Դ. $20յ+9ֆ=12$. արդ Ա. բազմացուցեալ 9 իւք, եղանէ

Ե. $108յ+9ֆ=36$, եւ Դ. յԵ: չափոյ հանեալ,

$88յ=24$. ուստի եւ

$$ȝ=\frac{24}{88}=\frac{3}{11}\text{ լիտր. եւ}$$

$$ǂ=4-12\cdot ȝ=4-\frac{36}{11}=\frac{44-36}{11}=\frac{8}{11}\text{, եւ}$$

$$†=\frac{3-3ȝ-3ǂ}{2}=\frac{3-\frac{9}{11}-\frac{24}{11}}{2}=\frac{33-33}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Գ. ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ, ՅՈՐՍ ԱՒԵԼԻ ՔԱՆ ԶԵՐԿՍ ԱՆԾԱՆՕԹ ՉԱՓՔ ԳՏԱՆԻՑԻՆ

378. *Յայնցանէ, զորոց ցայս վայր ճառ արկեալ խօսեցաք, կարիցես ինքնին իմանալ, եթէ յորժամ բազում անծանօթ չափք, եւ նովին թուով հաւասարութիւնք գտանիցին, պարտ եւ պատշաճ է զանծանօթ չափսն մի ըստ միոջէ ի բաց բառնալով, ի հաւասարութիւն ինչ ժամանել, որոյ մի անծանօթ չափ իցէ: Եթէ Ն այլեւայլ հաւասարութիւնք իցեն, եւ ի նոսա Ն անծանօթ չափք, խնդրեա ըստ կանոնաց միոյ ի կարգայն վերագոյն ճառելոց, զմին յանծանօթիցն բառնալ ի միջոյ, յորմէ ելանիցեն (Ն—1) հաւասարութիւնք (Ն—1) անծանօթ չափովք: Ապա յետ այնորիկ զ (Ն—1) հաւասարութիւնսն նովին օրինակաւ ի (Ն—2) հաւասարութիւնս շրջեա, եւ կարգ ըստ կարգէ յառաջ խաղա, մինչեւ ապա յետ ամենեւին յարդարելոյ, մի հաւասարութիւն յօրինիցի միով եւեթ անծանօթ չափով, զորոյ զզօրութիւնն դիւրաւ կարիցես գտանել: Իբրեւ զզօրութիւն գտեալ չափոյն ի հաւասարութեան որ յառաջ քան զվերջին հաւասարութիւնն է, յորում մեւս եւս անծանօթ չափ գտանի, հաստատիցես, հասանիցես ի վերայ զօրութեան երկրորդ անծանօթին: Զայս ձեւ օրինակի փոխանակելով, յառաջ խաղա, մինչեւ ամենայն զօրութիւնք անծանօթիցն գտանիցին:*

Եթէ բազում հաւասարութիւնք գտանիցին․ որք նման իցեն կերպարանաց հաւասարութեանցն որ յ375 եւ յ377 ատացան, յայնժամ զզօրութիւնս անծանօթիցն մարթ է առանց փոխանակելոյ, նովին կարգաւ եւ օրինօք, որ անդն ատացան գտանել։

Հ Ա Տ Ա Ծ Դ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ

379․ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆՆ անուանեալ կոչի Երկրորդ աստիճանի, զոր իբրեւ կարգեալ յարդարիցէ ոք, մեծագոյն կարողութիւն անծանօթ չափոյն երկրորդ կարողութիւն իցէ։ Արդ հաւասարութիւն ինչ երկրորդ աստիճանի ասի կատարեալ կամ խառն, յորում հանդերձ երկրորդ կարողութեամբ եւ առաջին կարողութիւն անծանօթ չափոյն գտանիցի։ Այսպիսի հաւասարութեանց հասարակաց իմն օրինակ է

$$Աք^2+Բք+Գ=0,$$

յորում նշանագիրքն Ա, Բ, Գ մարթեն եթէ հաստատականս եւ եթէ ուրացականս, եւս եւ ծանուցեալ գործակիցս ցուցանել։ Եթէ զբաւանդակ իսկ հաւասարութիւնն ընդ Ա գործակից երկրորդ կարողութեանն բաժանիցեմք, ելանիցէ

$$ք^2+\frac{Բք}{Ա}+\frac{Գ}{Ա}=0$$

կամ եթէ համառօտս իմն դրոշմելով, $\frac{Բ}{Ա}=Պ$ եւ $\frac{Գ}{Ա}=Ո$ դնիցեմք, լինիցի հաւասարութիւնն

$$ք^2+Պք+Ո=0$$

Եւ այս իսկ է օրինակ հասարակաց կատարեալ կամ խառն երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան յոր մարթ է զամենայն խառն հաւասարութիւնս, յորս անծանօթ չափն երկրորդ կարողութեամբ գտանիցի,

դարձուցանել, զոր եւ առաւել յայտ արարեալ ցու-
ցանիցեն մօտաւոր բանքս: Դիցուք գրեսցուք եթէ

$$5\dagger^2-3\dagger+12=2\dagger^2+5\dagger-8,$$

հաւասարութիւն ինչ իցէ: Արդ յայտ իսկ է յառա-
ջագոյն ասացելոցս, եթէ այլակերպութիւն երկոցունց
անդամոց հաւասարութեանս է 0, զայս ձեւ օրինակի

$$5\dagger^2-3\dagger+12-2\dagger^2-5\dagger+8=0$$

Եւ զայս իբրեւ համառօտիւք դրոշմիցեմք, լինիցի

$$\dagger^2(5-2)-\dagger(3+5)+12+8=0$$

յորմէ յառաջ գայ մօտաւոր հաւասարութիւնս,

$$3\dagger^2-8\dagger+20=0,$$

եւ եթէ զբովանդակ հաւասարութիւնն բաժանիցեմք
ընդ 3, լինիցի

$$\dagger^2-\frac{8\dagger}{3}+\frac{20}{3}=0,$$

յորում $\frac{8}{3}=$Պ եւ $\frac{20}{3}=$Ք. են:

380. Երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն պարզ
այն ինչ է, յորում առաջին կարողութիւն անծանօթ
անդամոյն պակասէ: Այնպիսի հաւասարութիւն յեր-
կուց չափուց եւեթ կազմի, այս ինքն յերկրորդ կա-
րողութենէ անծանօթին, եւ յայլ որ ինչ եւ իցէ
ծանուցեալ ինչ չափոյ, որոյ եւ հասարակաց իմն օ-
րինակ է $\dagger^2=$Ք.:

Արթ ի վերայ հասանել զօրութեան պարզ
երկրորդ կարողութեան հաւասարութեան, յորժամ
յերկուց անդամոցն հաւասարութեան զերկրորդ ար-
մատ հանցես: Եւ քանզի (Հ. 261.) երկրորդ արմա-
տոյն մարթ է եւ հաստատական եւ ուրացական լի-
նել, ապաքէն յառաջ գայ, եթէ $\dagger=\pm\sqrt{}$Ք. լինի-
ցի, այս ինքն եթէ անծանօթ անդամոյն պարզ եր-
կրորդ աստիճանի հաւասարութեան երկու զօրու-
թիւնք մարթեն լինել, քանզի հաւասար իսկ է եր-

կրորդ արմատոյ ծանուցեալ չափոյն որ կարէ եւ հաստատական եւ ուրացական լինել: Զոր օրինակ,

Ա․ Դիցուք գրեսցուք եթէ $(58+ք)(58-ք)=$ 1600 իցէ. արդ խնդրեա զզօրութիւն ք չափոյն: Եթէ զայն արդեամբք իսկ բազմացուցանիցես, լինիցի

$3364-ք^2=1600$ կամ $3364-1600=ք^2$, ուստի եւ $ք^2=1764$ եւ $ք=\pm\sqrt{1764}=\pm 42$:

Նոյն համօրէն հասարակաց օրինակաւ, եթէ

$$(ա+ք)(ա-ք)=բ, \text{ ուրեմն}$$

$$ք^2=ա^2-բ \text{ եւ } ք=\pm\sqrt{(ա^2-բ)} \text{ լինիցի:}$$

Բ․ Ի $(ք+ա)(ք-ա)=բ$ հաւասարութենէս ծագէ, $ք^2-ա^2=բ$ կամ $ք^2=ա^2+բ$, եւ $ք=\pm\sqrt{(ա^2+բ)}$: Յորժամ $ա=3$, եւ $բ=9$ դնիցեմք, լինիցի

$$ք=\pm\sqrt{(9+9)}=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}:$$

Գ․ Ի $\dfrac{աք+բ}{գք+դ}+\dfrac{աք-բ}{գք-դ}=ե$ հաւասարութենէ ծագէ

$$(աք+բ)(գք-դ)+(աք-բ)(գք+դ)$$
$$=ե(գք+դ)(գք-դ):$$

Արդ եթէ զայն արդեամբք իսկ բազմացուցանիցես, եւ զամենայն անծանօթ չափս յառաջին անդամ, եւ զծանուցեալսն յերկրորդ անդամ հաւասարութեան կարգիցես, գտանիցես

$$(2ագ-գ^2ե)ք^2=2բդ-դ^2ե,$$

$$ք=\pm\sqrt{\frac{դ(2բ-դե)}{գ(2ա-գե)}}:$$

381․ Եթէ ի պարզ երկրորդ կարգութեան հաւասարութեան զօրութիւն անծանօթին ուրացական թուոյ հաւասար իցէ, յայնժամ, քանզի $ք=\pm\sqrt{-Ա}$․ է, վասն այնորիկ ոչ մի ինչ հաստատուն զօրութիւն ք չափոյն գտանիցի, որով եւ ոչ հանդամանք խնդրոյն լուծումն, այլ զօրութիւն ք չափոյն ցնորական լինիցի, որ եթէ ի հաւասարութեան անդ փոխանակ անծանօթ չափոյն դիցի, պարտ է զի հաւասարութիւն զուգութեան երեւիցի։ Զոր օրինակ հաւասարութիւնս $25-ք^2=26$ հակառակ իսկ է համգամանաց խնդրոյն, քանզի զեա՞րդ հնար ինչ իցէ · զի հաստատական ինչ թիւ, որպիսի ինչ է $ք^2$, յայլ հաստատական ինչ թուոյ հանել, այլակերպութիւնն մեծագոյն քան զնուազելի թիւն դիպիցի։ Ապա ուրեմն յայտ իսկ է, եթէ անհնարին է գտանել զզօրութիւն ք չափոյն, զոր մարթ իցէ ի հաւասարութեան անդ դնել · այլ սակայն իբրեւ զհաւասարութիւնն լուծանիցեմք, գտանեմք եթէ $ք=\pm\sqrt{-1}$, որ է ցնորական չափ, եւ քանզի (տես ∴. 263.)

$$(\pm\sqrt{-1})^2=-1=ք^2$$

աստանին յառաջ գայ, եթէ յորժամ զայն ի հաւասարութեան դնիցեմք

$$25-(-1)=26,\ \text{այս ինքն}\ 25+1=26։$$

382. Որպէս զի կարիցեմք լուծանել զկարգեալ յարդարեալ հաւասարութիւն ինչ երկրորդ կարգութեան, որ խառն իցէ. կամ զի հնար ինչ իցէ զզօրութիւն ք չափոյն գտանել ի հաւասարութեանս $ք^2+Պք+Ռ=0$, համարեսցուք իմն այնպէս, եթէ $ք=յ+զ$ իցէ, ուստի եւ $ք^2=յ^2+2յզ+զ^2$ է, յորմէ եւ յայտ իսկ է եթէ $Պք=Պյ+Պզ$, եւ եթէ ի $ք^2+Պք+Ռ=0$ հաւասարութեան փոխանակ ք չափոյն զիւր զօրութիւնն դնիցեմք, լինիցի

$$յ^2+2յզ+զ^2+Պյ+Պզ+Ռ=0$$

յորում եթէ զհամազգիսն կարճ ի կարճոյ զրոշմիցեմք, ծագիցէ

$$յ^2+(2զ+Պ)յ+զ^2+Պզ+Ռ=0։$$

Եթէ ի բաց ի միջոյ բառնայցեմք ամենեւին ի հաւասարութենէս $զ(2զ+Պ)յ$, խառն հաւասարութիւնս շրջիցի ի պարզ հաւասարութիւն։

Արդ որպէս զի այս լինիցի, հարկ է զի կամ $2զ+Պ$ եւ կամ $յ$ հաւասարք 0 իցեն, քանզի յորժամ մի առնելին 0 իցէ, հարկ է եւ միւս առնելոյն 0 լինել։ Դնիցուք դրեսցուք եթէ $ր=-\frac{Պ}{2}$ իցէ. ուրեմն եւ ր չէ ծանուցեալ, եւ անծանօթն յանծանօթն փ յաւելեալ է, վասն այսորիկ իբրեւ զանծանօթն փոխանակ անծանօթին դնիցեմք, չփոփոխի զօրութիւնն, քանզի ըստ փոփոխելոյ միոյ անծանօթին փոփոխի եւ միւսն։ Արդ ըստ $ր=-\frac{Պ}{2}$ համարելոյ, լինիցի $2ր+Պ=-Պ+Պ$ կամ $=0$։ Աստուստին յաւացելոյս յառաջ գայ, եթէ յորժամ փոխանակ ր չափոյն զեւր զօրութիւնն դնիցեմք, լինիցի

$$փ^2+(-Պ+Պ)փ+\frac{Պ^2}{4}-\frac{Պ^2}{2}+Ռ=0,$$

զոր իբրեւ կարճ ի կարճոյ դրոշմելն կամիցիս, ծագիցէ

$$փ^2-\frac{Պ^2}{4}+Ռ=0, \text{ ուստի եւ } փ^2=\frac{Պ^2}{4}-Ռ,$$

յորմէ եւ $փ=\pm\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)}$ (∸. 480.), եւ

$$ք=-\frac{Պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)}$$

$$\text{կամ } ք=-\frac{1}{2}Պ\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}Պ^2-Ռ\right)}։$$

Այսու օրինակաւ կարիցես զամենայն խառն հաւասարութիւնս երկրորդ կարողութեան լուծանել։

383. Զօրութիւն երկրորդ աստիճանի խառն հաւասարութեան գտանի եւ այլով իմն օրինակաւ։ Որպէս զի դիւրագոյն ի վերայ հասանել կարիցեմք զօրութեան անծանօթ չափոյն որ ի $ք^2+Պք+Ռ=0$ հաւասարութեանս գտանիցի, պարտ եւ պատշաճ է զմասունսն յորս անծանօթ չափն գտանի ի մի անդամ հաւասարութեան կարգել, եւ զծանուցեալն ի միւս անդամ հաւասարութեան, որով եւ $ք^2+Պք=-Ռ$ լինիցի։ Արդ դէտակն կալեալ նայեսցուք ընդ

ձախակողմեան անդամն, եւ վաղվաղակի գտանիցեմք եթէ այն անկատար երկրորդ կարողութիւն է $ք+\frac{պ}{2}$ երկմասնեան չափոյն, եւ թերի է ի նմա երկրորդ կարողութիւն երկրորդ $\frac{պ}{2}$ անդամոյ արմատոյն: Եթէ յերկոսին եւս անդամսն հաւասարութեան յաւելուցուս զ $\frac{պ^2}{4}$ զերկրորդ կարողութիւն երկրորդ անդամոյն, չփոփոխի հաւասարութիւնն, եւ լինիցի

$$ք^2+պք+\frac{պ^2}{4}=\frac{պ^2}{4}-Ռ,$$

յորմէ իբրեւ զերկրորդ արմատ հանցես, ծագիցէ

$$ք+\frac{պ}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)},$$ ուստի եւ

$$ք=-\frac{պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)},$$

որ զոյգ եւ նման է հաւասարութեան որ (∸. 382.)

384. Զօրութիւն ք չափոյն ըստ փոփոխել նշանացն, որով մասունքն ընդ միմեանս յօդեալ իցեն, չորիւք օրինակօք մարթ է փոփոխել: Առաջին. Իբրեւ $ք^2$ հաստատական նշանաւ ընդ այլոց անդամոց յօդեալ իցէ, որպիսի ինչ $ք^2+պք+Ռ=0$, զօրութիւն ք չափոյն լինիցի,

$$-\frac{պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)}$$

որպէս վերագոյն բաղում անգամ տեսաք: Երկրորդ անգամ, յորժամ ընդ երկրորդ մասին ուրացական եւ ընդ երրորդին հաստատական նշանաւ յօդիցի, յայնժամ ք հաւասար իցէ

$$+\frac{պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)}.$$

Երրորդ անգամ, եթէ ընդ երկրորդին հաստատական եւ ընդ երրորդին ուրացական նշանաւ կապիցի, յայնժամ + իցէ հաւասար

$$-\frac{Պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}+Ո.\right)}.$$

Եւ չորրորդ իբրեւ երկաքեանն եւս ուրացական իցեն, յայնժամ + հաւասար իցէ

$$+\frac{Պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}+Ո.\right)}:$$

Ի չորս փոփոխմունս յայսոսիկ, նշանն $\frac{Պ^2}{4}$ չափոյն չփոփոխի, քանզի երկրորդ կարողութիւն է $\frac{Պ}{2}$ չափոյն, որոյ եթէ առաւել, եւ եթէ նուազ իցէ նշանն, ցանգ կարողութեանն նշան հաստատական է: Եւ յայն եւս պարտ է միտ դնել, զի ի հաւասարութեան աստ յայսմիկ, մարթ է

$$կամ\ \frac{Պ^2}{4}>Ո.,\ կամ\ \frac{Պ^2}{4}<Ո.\ կամ\ \frac{Պ^2}{4}=Ո.\ լինել:$$

Եթէ $\frac{Պ^2}{4}=Ո.$ իցէ, յայնժամ + հաւասար է այնպիսի իմն չափոյ, որոյ այսպիսի $\pm$ նշան առընթեր կայցէ, քանզի $\frac{Պ^2}{4}-Ո.=0$, ուստի եւ $\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ո.\right)}=0$, ուստի եւ $+=\pm\frac{Պ}{2}$: Ապա եթէ $\frac{Պ^2}{4}<Ո.$, յայնժամ զօրութիւն + չափոյն ցնորական լինիցի (∸. 262.): Այսոքիկ երկուց դիպացն առաջնոյ միայն պատշաճականք են:

385. Որպէս յ384 համարոյ յայտ արարեալ ցուցաւ, եթէ ի չորեսին դէպսն ի դէպս իւրաքանչիւր երկու զօրութիւնք են + չափոյն վասն արմատոյն $\pm$ նշան ունելոյ, այս ինքն $+=-\frac{Պ}{2}+\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ո.\right)}$ եւ +

$= -\frac{պ}{2} - \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$ ։ Արդ եթէ $\frac{պ^2}{4} > Ո$ իցէ, յայնժամ հարկ է զի $\frac{պ^2}{4} > \frac{պ^2}{4} - Ո$ լինիցի, յորմէ եւ $\frac{պ}{2} > \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$ ։ Աստուստին յայտ է, եթէ $ք$ յառաջին դէպսն, որ է $ք = -\frac{պ}{2} + \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$, եւ $ք = -\frac{պ}{2} - \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$ միշտ ուրացական ինչ չափոյ հաւասար է, իսկ յերկրորդումն, որ է $ք = +\frac{պ}{2} + \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$ եւ $+\frac{պ}{2} - \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$, վասն $\frac{պ}{2} > \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} - Ո\right)}$ լինելոյն, հաւասար է հաստատական չափոյ։ Յերրորդումն անդ, քանզի $ք = -\frac{պ}{2} + \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$ եւ $ք = -\frac{պ}{2} - \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$ եւ զի $\frac{պ^2}{4} < \frac{պ^2}{4} + Ո$, ուստի եւ $\frac{պ}{2} < \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$ ուստի եւ $ք$ յառաջին զօրութեան անդ հաստատական չափոյ, եւ յերկրորդ զօրութեանն ուրացական չափոյ հաւասար է. նմին նման եւ ի չորրորդումն, յորում $ք = +\frac{պ}{2} + \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$ եւ $ք = +\frac{պ}{2} - \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$ եւ քանզի $\frac{պ}{2} < \sqrt{\left(\frac{պ^2}{4} + Ո\right)}$, յառաջին զօրութեանն հաստատական չափոյ, իսկ յերկրորդումն ուրացականին հաւասար լինիցի։

386. Եթէ ի $ք^2 + պք + Ո = 0$, համարիցիմք $պ = 0$, յայնժամ եւ $պք = 0$ լինիցի, որով եւ հաւասարութիւնն շրջիցի ի $ք^2 + Ո = 0$, զոր եթէ լուծանելն կամք իցեն, հարկ է $ք^2 = -Ո$ եւ $ք = \pm\sqrt{-Ո}$ ։

Արդ եթէ ի պարզ երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան անդ Ո. հաստատական չափ իցէ, յայնժամ երկուս զօրութիւնս անհնարինս ունիցի, այս ինքն $ք=+\sqrt{-Ո.}$, եւ $ք=-\sqrt{-Ո.}$: Այլ եթէ Ո. ուրացական իցէ, այսինքն $ք^2-Ո.=0$, յայնժամ ք չափոյն երկու հնարաւոր զօրութիւնք լինիցին,

$$ք=+\sqrt{Ո.} \text{ եւ } ք=-\sqrt{Ո.}:$$

Համարեսցուք եթէ ի հասարակաց օրինակին

$$ք^2+պք+Ո.=0,$$

չիցէ Ո. չափն կամ եթէ $Ո.=0$, յայնժամ

$$ք^2+պք=0,$$

կամ եթէ զառաջին անդամն յառնելին լուծանիցեմք

$$ք(ք+պ)=0:$$

Եւ քանզի յորժամ արդիւնք ինչ $=0$ իցէ, հարկ է զի մին յառնելեացն $=0$ լինիցի, աստանին յառաջ գայ, եթէ կամ $ք=0$ եւ կամ $ք+պ=0$ եւ $ք=-պ$: Յորմէ յառաջ գայ, եթէ յայս դէպս անծանօթ չափն հաւասարութեանս երկուս զօրութիւնս ունիցի կամ $ք=0$ եւ կամ $ք=-պ$:

387. Որպէս բազում անգամ ասացաք ի հաւասարութեանս

$$ք^2+պք+Ո.=0$$

երկու զօրութիւնք են ք չափոյն որ եւ անուանեալ կոչին Արմատք հաւասարութեան: Արդ դիցուք եթէ առաջին զօրութիւնն իցէ ա եւ երկրորդն բ գայս ձեւ օրինակի $ք=ա$, $ք=բ$: Աստանին յառաջ գայ եթէ $ք-ա=0$, եւ $ք-բ=0$, եւ եթէ զհաւասարս միմեանց բազմացուցանիցեմք, չփոփոխի հաւասարութիւնն որպէս զի լինել $(ք-ա)(ք-բ)=0$, զոր եթէ արդեամբք իսկ բազմացուցանիցես լինիցի

$$ք^2-աք-բք+աբ=0$$

որ կարճ ի կարճոյ գրոշմեալ,

$$ք^2-(ա+բ)ք+աբ=0$$

եւ այս իսկ է խառն երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն, յորում գործակիցն երկրորդ անդամոյն հաւասար է բովանդակութեան երկուց զօրութեանց x չափոյն այլ հակառակ նշանօք, այս ինքն $Պ=-ա-բ$, իսկ երրորդ անդամն հաւասար է արդեանց անծանօթ զօրութեանցն, այս ինքն $Ռ=աբ$: Յառաջելոյս առի բղխէ հասարակաց կանոնս, եթէ Գործակից երկրորդ անդամոյ խառն երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան հաւասար է բովանդակութեան երկուց զօրութեանց անծանօթ չափոյն որ ի նմին հաւասարութեանն գտանիցին, այլ հակառակ նշանօք. իսկ երրորդ անդամն՝ արդեանց երկուց զօրութեանց անծանօթ չափոյն: Արդ որպէս զի առաւել եւս իրայն ճշմարտութիւն յայտ յանդիման երեւիցի. ցուցանիցեմք զայն եւ զայս օրինակ եւս: Քանզի ի հաւասարութեան անդ $x=-\frac{Պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)}$ է. արդ համարեսցուք եթէ մի ի զօրութեանց անտի ա եւ միւսն բ իցեն, ուստի եւ $ա=-\frac{Պ}{2}+\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)}$ եւ $բ=-\frac{Պ}{2}-\sqrt{\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)}$, զորս եթէ ի միմեանս յաւելուցուս $ա+բ=-Պ$ եւ $+Պ=-ա-բ$ եւ զարձեալ $աբ=\frac{Պ^2}{4}-\left(\frac{Պ^2}{4}-Ռ\right)=Ռ$:

388. Համարեսցուք, եթէ երկոցունց արմատոյն երկրորդ կարողութեան հաւասարութեան,

Ա. Իցեն հաւասար նշանք, որպէս զի $+ա$ եւ $+բ$ կամ $-ա$ եւ $-բ$ լինել, յայնժամ յառաջին դէպն եղանէ,

$$(x+ա)(x+բ)=x^2+(ա+բ)x+աբ=0,$$

յերկրորդումն

$$(x-ա)(x-բ)=x^2-(ա+բ)x+աբ=0,$$

Արդ ուրեմն յերկոսին դէպս եւս աբ հաստատական է. իսկ երկրորդ մասն հաստատական կամ ուրացական բատ երկոցունց արմատոյն հաստատական կամ ուրացական լինելոյ: Իսկ եթէ երկուքին արմատքն ի գլխովին միմեանց հաւասարք իցեն, յայնժամ յառաջին դէպն ելանէ

$$(x+ա)(x+բ)=(x+ա)^2=x^2+2աx+ա^2=0$$

եւ յերկրորդումն

$$(x-ա)(x-բ)=(x-ա)^2=x^2-2աx+ա^2=0,$$

բ. Ապա եթէ արմատքն չհաւասար նշանս ունիցին, եւ իցեն $+ա$ եւ $-բ$, յայնժամ

$$(x-ա)(x+բ)=x^2-(ա-բ)x-աբ=0,\ կամ$$

$$(x-ա)(x+բ)=x^2+(բ-ա)x-աբ=0,$$

Ապա ուրեմն յերկոսին դէպս եւս երրորդ աբ միան ուրացական է. իսկ երկրորդն ուրացական, եթէ հաստատական արմատն ա մեծագոյն քան զուրացականն բ իցէ. իսկ իբրեւ ամէն հակառակ դիպիցի, երկրորդ չափն յառաջին անդամ գործակցի երկրորդ անդամոյն հաւասարութեան հաստատական է:

Այլ եթէ արմատքն նշանս այլեւայլս ունիցին, այլ միմեանց հաւասար թիւք իցեն, յայնժամ բովանդակութիւն նոցա, որով եւ գործակից երկրորդ մասին $=0$ լինիցի. յորմէ եւ պակասէ ի հաւասարութեան երկրորդ մասն կամ առաջին կարգութիւն անծանօթ քանիութեան, որպէս,

$$(x-ա)(x+ա)=x^2-ա^2=0:$$

389. Եթէ առընթեր անծանօթ չափոյ, որ ի հաւասարութեան անդ գտանիցի, արմատոյ նշան կայցէ, պարտ է զառաջինն զհաւասարութիւնն ի հաստատուն շրջել, եւ եթէ նոր հաւասարութիւնն երկրորդ աստիճանի իցէ, յայնժամ լուծանելով իմն հաւասարութեանն գտանին երկու զօրութիւնք անծանօթ չափոյն: Այլ եթէ արմատն որ յանծանօթ չափոյ ելանելոյն իցէ հաստատական արդեւք թէ ուրացական լինիցի, պարտ է յառաջագոյն զայն գտանել, եթէ որ կամ զի՞նչ ինչ արմատ զհանդամանս

խնդրոյն լուծու, կամ որ այնմ հաւասարութեան կշռիցի:

Ա. Խնդրեա ի հաւասարութենէս $5ք=16+2\sqrt{ք}$, զզօրութիւն ք չափոյն: Իբրեւ հաւասարութիւնս ի հաստատուն փոփոխիցի ըստ Հ. 369, ելանէ

$$ք^2-\frac{164}{25}ք+\frac{256}{25}=0$$

յորմէ գտանի $ք=\frac{82\pm18}{25}$, ուստի եւ $ք=4$, կամ $ք=\frac{64}{25}$: Արդ զարին զհետ գայ, եթէ մարթի $\sqrt{ք}=\pm2$ կամ $\sqrt{ք}=\pm\frac{8}{5}$ լինել. եւ եթէ հետազօտիցէ ոք, եթէ որ զօրութիւնն արդեւք հնարաւոր իցէ ի հաւասարութեան անդ, գտանէ եթէ յառաջին դէպսն է $ք=4$, ուստի եւ $\sqrt{ք}=2$, եւ յերկրորդումն $ք=\frac{64}{25}$, ուստի եւ $\sqrt{ք}=-\frac{8}{5}$:

Բ. Իսկ եթէ հաւասարութիւնս $5ք=16-2\sqrt{ք}$ ի հաստատուն շրջիցի, եւ կարգեալ յարդարիցի, ծագէ նոյն հաւասարութիւն, զոր յառաջին օրինակին գտաք, ուստի եւ նոյն զօրութիւն ք չափոյն. այլ իբրեւ զհնարաւոր զօրութիւնսն խնդրիցեմք, գտանեմք եթէ յառաջին դէպսն է $ք=4$ եւ $\sqrt{ք}=-2$, իսկ յերկրորդումն $ք=\frac{64}{25}$ եւ $\sqrt{ք}=\frac{8}{5}$:

Գ. Համարական օրինակաւ ծագէ ի հաւասարութենէս $աք=բ\pm գ\sqrt{ք}$, այս

$$ք^2-\left(\frac{2աբ+գ^2}{ա^2}\right)ք+\frac{բ^2}{ա^2}=0\text{: Յորմէ ծագէ}$$

$$ք=\frac{2աբ+գ^2\pm գ\sqrt{(4աբ+գ^2)}}{2ա^2}\text{:}$$

Դ. Զհաւասարութիւնս $\sqrt{(7+\text{խ})}+\sqrt{(2+\text{խ})}=\sqrt{(5-2\text{խ})}$ համբարձ յերկրորդ կարողութիւն, եւ լինիցի $\sqrt{(14+9\text{խ}+\text{խ}^2)}=-2-2\text{խ}$, զոր եթէ ի հաստատուն շրջիցես, ելանէ

$$\text{խ}^2-\frac{\text{խ}}{3}-\frac{10}{3}=0,$$

$$\text{խ}=\frac{1\pm 11}{6}.\ \text{ուստի}$$

$$\text{խ}=2\ \text{կամ}\ \text{խ}=-\frac{5}{3}:$$

Իբրեւ զայսոսիկ զօրութիւնս խ չափոյն ի հաւասարութեանս

$$\sqrt{(7+\text{խ})}+\sqrt{(2+\text{խ})}=\sqrt{(5-2\text{խ})}$$

գնիցեմք, ծագէ 1) $\text{խ}=2$ համարեալ, հաւասարութիւնս

$$\sqrt{9}+\sqrt{4}=1,\ \text{ուստի}$$
$$3-2=1,\ \text{կամ}$$
$$-3+2=-1$$

2) Իսկ $\text{խ}=-\frac{5}{3}$ եղեալ, հաւասարութիւնն

$$\sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{25}{3}},\ \text{որոյ զօրութիւնքն}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}},\ \text{կամ}\ -\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Ե. Եթէ կամք իցեն զզօրութիւն խ չափոյն ի

$$\frac{\sqrt{\text{ա}}+\sqrt{(\text{ա}-\text{բ}\text{խ})}}{\sqrt{\text{ա}}-\sqrt{(\text{ա}-\text{բ}\text{խ})}}-\frac{\sqrt{\text{ա}}-\sqrt{(\text{ա}-\text{բ}\text{խ})}}{\sqrt{\text{ա}}+\sqrt{(\text{ա}-\text{բ}\text{խ})}}=\text{յ}$$

հաւասարութենէս գտանել, զառաջինն զանուանիչս ամենայն կոտորոցն շրջեա ի մի համօրէն հասարակաց անուանիչ, որով ելանէ

$$\frac{4\sqrt{(\text{ա}^2-\text{ա}\text{բ}\text{խ})}}{\text{բ}\text{խ}}=\text{յ}.$$

Արդ իբրև հաւասարութիւնս յերկրորդ կարգութիւն համբառնայցէ, և կարգեալ յարդարիցի, եղանէ

$$ք^2+\frac{16աք}{բր^2}-\frac{16ա^2}{բ^2ր^2}=0,\ \text{ուստի և}$$

$$ք=\frac{4ա}{բր^2}[-2\pm\sqrt{(4+ր^2)}]։$$

390. Եթէ յերկրորդ կարգութեան հաւասարութեան $ք^2+Պք+Ռ=0$, չափքն Պ և Ռ տանից հաստատութեան իցեն, յայս դէպս ևս մարթ է զզօրութիւն անծանօթիցն ըստ 383 համարոյ գտանել։ Համարեսցուք եթէ կամք իցեն մեզ զհաւասարութիւնս $ք^2-2ք\sqrt{3}+2\sqrt{2}=0$ լուծանել. արդ յօրինակիս է

$$Պ=-2\sqrt{3},\ Ռ=2\sqrt{2}.\ \text{զհետ գայ, եթէ}$$

$$ք=\sqrt{3}\pm\sqrt{(3-2\sqrt{2})}\ \text{իցէ}։$$

Իսկ քանզի $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$, ուրեմն հարկ է զի $\sqrt{(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$ լինիցի, ուստի և $ք=\sqrt{3}\pm(\sqrt{2}-1)$։ Արդ ուրեմն ի

$$ք^2-2ք\sqrt{3}+2\sqrt{2}=0$$

հաւասարութենէ, երկու մօտաւոր զօրութիւնք ք չափոյն գտանին, որ են

$$ք=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1,\ \text{կամ}$$
$$ք=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$$

Այլ քանզի ի լուծանել զայլն ազգի հաւասարութիւնս, պէտք են գտանել զարմատն երկմանեան չափոյս որ ունի այսպիսի ինչ կերպարանս $Ա\pm\sqrt{Բ}$, փոխ այսորիկ, պարտ և պատշաճ է մեզ զայն քննել, եթէ զիարդ և որով օրինակաւ այսպիսի արմատք ելանիցեն։

Յաղագս լուծութեան $\sqrt{(Ա\pm\sqrt{Բ})}$ ձևոյ։

391. Համարեսցուք եթէ $\sqrt{ա}\pm\sqrt{բ}$ երկրորդ արմատ իցէ երկմանեան չափոյս $Ա\pm\sqrt{Բ}$, կամ

$\sqrt{(Ա \pm \sqrt{Բ})} = \sqrt{ա} \pm \sqrt{բ}$, հարկ է, զի $(\sqrt{ա} \pm \sqrt{բ})^2 = Ա \pm \sqrt{Բ}$ լինիցի, այս ինքն $ա + բ \pm 2\sqrt{աբ} = Ա \pm \sqrt{Բ}$:

Աստատին ի հաւասարութեանցս յառաջ գայ, եթէ հաստատուն չափքս $ա+բ$ եւ $Ա$, որ յերկոսին անդամն հաւասարութեան գտանին, միմեանց հաւասար իցեն, նոյնպէս եւ առանց հաստատութեան չափքն $2\sqrt{աբ}$ եւ $\sqrt{Բ}$, այս ինքն $ա+բ=Ա$, եւ $2\sqrt{աբ} = \sqrt{Բ}$, քանզի անհնարին է եթէ հաստատուն չափ հաւասար իցէ առանց հաստատութեան չափոյ: Յորժամ զյետին հաւասարութիւնն յերկրորդ կարողութիւն համբառնայցես, լինիցի

$$4աբ = Բ \text{ եւ } բ = \frac{Բ}{4ա}:$$

Արդ եթէ զզօրութիւն $բ$ չափոյն յ$ա+բ=Ա$ հաւասարութեան դնիցես, գտանիցես

$$ա + \frac{Բ}{4ա} = Ա \text{ կամ } ա^2 - Աա + \frac{Բ}{4} = 0, \text{ ուստի եւ ըստ ∴. 383}$$

$$ա = \frac{Ա + \sqrt{(Ա^2 - Բ)}}{2}:$$

Եթէ վասն համառօտիւք դրոշմելոյ $\sqrt{(Ա^2 - Բ)} = Գ$ դնիցես, լինիցի $ա = \frac{Ա+Գ}{2}$: Որովհետեւ $ա+բ = Ա$, ուստի եւ $բ = Ա - ա$. ուրեմն եթէ ի յետին հաւասարութեան առ յայսմիկ փոխանակ $ա$ չափոյն զզօրութիւնն, զոր գտեալ իսկ եմք դրոշմիցեմք, լինիցի

$$բ = Ա - \frac{Ա+Գ}{2} = \frac{Ա-Գ}{2}, \text{ ուստի եւ}$$

$$\sqrt{ա} = \sqrt{\left(\frac{Ա+Գ}{2}\right)} \text{ եւ } \sqrt{բ} = \sqrt{\left(\frac{Ա-Գ}{2}\right)}, \text{ յորմէ եւ}$$

$$\sqrt{(Ա \pm \sqrt{Բ})} = \sqrt{ա} \pm \sqrt{բ} = \sqrt{\left(\frac{Ա+Գ}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{Ա-Գ}{2}\right)}, \text{ յորում } Գ = \sqrt{(Ա^2 - Բ)}: \text{ Զոր օրինակ,}$$

Ա. Հան արմատս յերկմասնեան չափոյ տուի $59-30\sqrt{2}$։ Ըստ հասարակաց օրինակին է $\text{Ա.}=59$, $\sqrt{\text{Բ.}}=30\sqrt{2}$, $\text{Ա.}^2=3481$, $\text{Բ.}=900\times 2=1800$. ուստի եւ $\text{Գ.}=\sqrt{(3481-1800)}=\sqrt{1681}=41$, եւ $\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}+\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{59+41}{2}\right)}=\sqrt{50}=\pm 5\sqrt{2}$. իսկ $\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}-\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{59-41}{2}\right)}=\sqrt{9}=\pm 3$։ Ուրեմն $\sqrt{(59-30\sqrt{2})}=\pm 5\sqrt{2}\mp 3$։

Բ. Խնդրեա ի $\text{ք}=\sqrt{(20\frac{3}{4}+3\sqrt{35})}$ հաւասարութեանէ զզօրութիւն ք չափոյն։ Յօրինակիս է $\text{Ա.}=20\frac{3}{4}$, $\sqrt{\text{Բ.}}=3\sqrt{35}$, $\text{Ա.}^2=\frac{6889}{16}$, $\text{Բ.}=315$. ուստի եւ

$\text{Գ.}=\sqrt{\left(\frac{6889}{16}-315\right)}=\sqrt{\frac{1849}{16}}=\frac{43}{4}$, եւ

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}+\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{83+43}{8}\right)}=\sqrt{\frac{63}{4}}=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}-\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{83-43}{8}\right)}=\sqrt{\frac{40}{8}}=\pm\sqrt{5},$$

ուստի եւ $\text{ք}=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}\pm\sqrt{5}$

Գ.. Ի հաւասարութենէս $\text{ք}=\sqrt{[3-\sqrt{(9-4\text{ք}^2)}]}$ խնդրեա զ ք։ Յօրինակիս է $\text{Ա.}=3$, $\sqrt{\text{Բ.}}=\sqrt{(9-4\text{ք}^2)}$, $\text{Ա.}^2=9$, $\text{Բ.}=9-4\text{ք}^2$, ուստի

$$\text{Գ.}=\sqrt{(9-9+4\text{ք}^2)}=2\text{ք},\ \text{եւ}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}+\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3+2\text{ք}}{2}\right)},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա.}-\text{Գ.}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3-2\text{ք}}{2}\right)}$$

ուստի եւ $\text{ք}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\text{ք}\right)}\mp\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\text{ք}\right)}$։

Դ. Խնդրեա զզօրութիւն ք չափոյն ի հաւասարութենէս

$$\text{ք}=\sqrt{[\text{ա}-2\sqrt{(\text{ա}-1)}]}.$$

Յօրինակիս է $\text{Ա}=\text{ա}$, $\sqrt{\text{Բ}}=2\sqrt{(\text{ա}-1)}$, եւ $\text{Գ}=\sqrt{(\text{ա}^2-4\text{ա}+4)}=\text{ա}-2$, ուստի եւ

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա}+\text{Գ}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2\text{ա}-2}{2}\right)}=\pm\sqrt{(\text{ա}-1)},\ \text{եւ}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{Ա}-\text{Գ}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\text{ա}-\text{ա}+2}{2}\right)}=\sqrt{1}=\pm 1$$

ուրեմն $\text{ք}=\pm 1\mp\sqrt{(\text{ա}-1)}$։

Ե. Իցէ $\text{ք}=\sqrt{(\text{բ}\sqrt{-1})}$։ Արդ է $\text{Ա}=0$, $\sqrt{\text{Բ}}=\text{բ}\sqrt{-1}$, ուստի եւ $\text{Գ}=\sqrt{(0+\text{բ}^2)}=\text{բ}$, եւ

$$\text{ք}=\sqrt{\left(\frac{0+\text{բ}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{0-\text{բ}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{\text{բ}}{2}}+\sqrt{-\frac{\text{բ}}{2}}=$$

$$(1+\sqrt{-1})\sqrt{\frac{\text{բ}}{2}}$$

392. Եթէ $\text{Ա}^2-\text{Բ}$ չափն չիցէ կատարեալ երկրորդ կարողութիւն որով եւ $\text{Գ}=\sqrt{(\text{Ա}^2-\text{Բ})}$ քանիօնութիւնս առանց համաստութեան լինիցի, յայսպիսի դէպս մարթ է ըստ 391 համարոյ հանել արմատ յերկմաննեան $\text{Ա}\pm\sqrt{\text{Բ}}$ չափոյն. այլ առաւել դիւրագոյն եւ համառօտ է չփոփոխել եւ պահել ըստ օրինակիս ըստ այսմիկ $\sqrt{(\text{Ա}\pm\sqrt{\text{Բ}})}$։ Զոր օրինակ յերկմաննեան չափս $3+\sqrt{2}$, է $\text{Գ}=\sqrt{7}$, ուստի եւ

$$\sqrt{(3+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)}։$$

393. Եթէ երկոցունց Ա եւ $\sqrt{\text{Բ}}$ քանիօնութեանց երկմաննեան չափոյն մի հասարակաց առանց համաստութեան անելի իցէ, բարւոք է զերկմաննեան չափն յերկուս անելիս լուծանել, յորոց մին իցէ առանց համաստութեան չափն. եւ ապա ի մի մի անելեաց զարմատն խնդրել։ Զոր օրինակ

$$5\sqrt{2}+4\sqrt{3}=(5+2\sqrt{6})\sqrt{2},$$ ուստի

$$\sqrt{(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}=\sqrt{(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt[4]{2}\text{։}$$

Եւ զի (Հ. 391.) $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, ուրեմն $\sqrt{(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{8}$։ Ըստ նմին օրինակի գտանի եւ $\sqrt{(19\sqrt{3}-6\sqrt{6})}=3\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}$

394. Համարեսցուք եթէ Մ եւ Ն չհաւասար թիւք իցեն, որոց այլակերպութիւնն իցէ Մ—Ն։ Արդ քանզի (Մ—Ն)²=Մ²+Ն²—2ՄՆ, եւ քանզի չէ մարթ երկրորդ կարողութեան իրիք ուրացական լինել, ապա ուրեմն հարկ է (Մ—Ն)² հաստատական լինել. ուստի եւ այլակերպութիւնն երկուց չափուցս Մ²+Ն² եւ 2ՄՆ, հարկ է զի հաստատական լինիցի, ուստի եւ

Մ²+Ն²>2ՄՆ

Ապա ուրեմն. Բովանդակութիւն երկրորդ կարողութեանց երկուց չհաւասար թուոց մեծագոյն է քան զերկպատիկ արդիւնս նոցին իսկ թուոյն։ Եւ զի կարիցեմք զայս եւ ի հասարակաց օրինակն, զորմէ վերագոյն (Հ. 391.) ասացաք մերձեցուցանել, ասեմք. եթէ Յերկմասնեան քանիօնութեան անդ Ա. բովանդակութիւն է երկրորդ կարողութեանց երկուց մասանց արմատոյն, եւ √Բ. կրկնապատիկ արդիւնք երկուց մասանցն այնոցիկ. արդ եթէ Ա.±√Բ. յիրաւի երկրորդ կարողութիւն իցէ որպիսի իմն եւ իցէ երկմասնեան արմատոյ. զորին զհետ գայ, եթէ հարկ է զի Ա.>√Բ. իցէ. եւ Ա.²>Բ. լինիցի, եւ Գ.=√(Ա.²—Բ.) ցանգ հնարաւոր իմն չափ։

Եւ դարձեալ քանզի չէ մարթ երկրորդ կարողութեանց հնարաւոր թուոց ուրացական լինել, ատրատին յայտ է եթէ եւ չափն Ա., որպէս բովանդակութիւն երկուց երկրորդ կարողութեանց հարկ է հաստատական լինել. Ապա ուրեմն զհասարակաց օրինակն, զորմէ (Հ. 391.) ճառեցաւ, հնար է վարն ամենոյն երկմասնեան չափուց $\text{Ա}+\sqrt{\text{Բ}}$ որոց առաջին մասն Ա հաստատական իցէ եւ մեծագոյն քան զ$\sqrt{\text{Բ}}$, աներկեւղ ի կիր արկանել:

Այլ քանզի են եւ դէպք ինչ, յորս յերկմասնեան չափոյ, որ $\text{Ա}\pm\sqrt{\text{Բ}}$ կերպարանս ունիցի, այլ ոչ զնոյն նման հանգամանս, այլ յայսը ամենայնի վերայ մարթ իցէ երկրորդ արմատ հանել. վասն այսորիկ ճառեսցուք փոքր ի շատէ զայնցանէ, եթէ զի՞րդ զարմատս երկմասնեան չափուցն այնոցիկ պարտ իցէ խնդրել:

395. Եթէ իցէ $\sqrt{\text{Բ}}>\text{Ա}$, յայնժամ $\text{Ա}^2-\text{Բ}$ ուրացական ինչ թիւ լինիցի, ուստի եւ $\sqrt{(\text{Ա}^2-\text{Բ})}=\text{Գ}$ անհնարին քանիոնութիւն իցէ: Յայս դէպս հասարակաց օրինակն 391 համարոյ երեւի իմն եթէ վասն $\sqrt{(\text{Ա}-\sqrt{\text{Բ}})}$, եւ եթէ վասն $\sqrt{(\text{Ա}+\sqrt{\text{Բ}})}$ չափուցն, անհնարին զօրութիւնս ընծայեցուցանիցէ: Առաջին արմատն այս ինքն $\sqrt{(\text{Ա}-\sqrt{\text{Բ}})}$ հարկ է զի ցնորական լինիցի, քանզի $\text{Ա}-\sqrt{\text{Բ}}$ ըստ մերոյ համարելոյ ուրացական է: Բայց սակայն հարկ է զի $\sqrt{(\text{Ա}+\sqrt{\text{Բ}})}$ քանիոնութեան երկուս զօրութիւնս հնարաւորս ցուցանիցէ, վասն $\text{Ա}+\sqrt{\text{Բ}}$ հաստատական լինելոյն: Այլ եթէ զի՞րդ արդեւք պարտ իցէ հնարս ինչ իմանալ, զի մի Գ. յ391 օրինակին, ցնորական լինիցի մօտաւոր օրինակքս յայտ առնեն:

Ա. Խնդրեա զզօրութիւն հաւասարութեանս, $\text{Զ}=\sqrt{(24+17\sqrt{2})}$: Եթէ $\text{Ա}=24$, $\sqrt{\text{Բ}}=17\sqrt{2}$ դիցես, լինիցի $\text{Գ}=\sqrt{-2}$: Արդ իբրեւ զերկմասնեան չափս $24+17\sqrt{2}$ յերկուս առնելիս լուծանիցես, յորոց մին իցէ $\sqrt{2}$, այս ինքն

$$24+17\sqrt{2}=(17+12\sqrt{2})\sqrt{2},\ \text{հարկ է զի}$$

$$\text{Զ}=\sqrt{(24+17\sqrt{2})}=\sqrt{(17+12\sqrt{2})}\cdot\sqrt[4]{2}$$

լինիցի: Արդ եդեալ $\text{Ա}=17$, $\sqrt{\text{Բ}}=12\sqrt{2}$. գտանիցի ըստ հասարակաց օրինակին (∸. 391.) $\sqrt{(17+12\sqrt{2})}$ $=3+2\sqrt{2}$, ուստի եւ

$$÷=(3+2\sqrt{2})\sqrt[4]{2}=3\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{8}$$

Բ. Ըստ նմին օրինակի, քանզի $60+49\sqrt{5}=(49+12\sqrt{5})\sqrt{5}$, ուրեմն եւ $\sqrt{(60+49\sqrt{5})}=\sqrt{(49+12\sqrt{5})}\cdot\sqrt[4]{5}$: Նաեւ զի ըստ ∸. 391, գտանի $\sqrt{(49+12\sqrt{5})}=2+3\sqrt{5}$, ուրեմն

$$\sqrt{(60+49\sqrt{5})}=(2+3\sqrt{5})\sqrt[4]{5}=2\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{125}$$

Գ. Խնդրեա զերկրորդ արմատ երկմասնեան չափոյ $1+\sqrt{2}$: Քանզի $1+\sqrt{2}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}$, զարմատ րին զհետ գայ, եթէ

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\cdot\sqrt[4]{2}$$

Արդ եթէ ըստ հասարակաց օրինակին (∸. 391.) դիցես $Ա=1$, $\sqrt{Բ}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. լինիցի

$$Գ=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ եւ}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Իբրեւ բազմացուցանիցես զարմատս $\sqrt[4]{2}$ չափով, լինի:

$$=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}\right]:\text{ Ուստի}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}$$

396. Եթէ խնդրէաք արմատ յերկմասնեան ինչ չափոյ (ըստ ∸. 391.) որ այսպիսի ինչ կերպարանս ունիցի $\sqrt{Բ}-Ա$, ցանկ ելանէր մնացածին ինչ զօրութիւն, այս ինքն իցէ

$$\sqrt{(\sqrt{\text{Բ}}-\text{Ա})}=\sqrt{\left(\frac{-\text{Ա}+\text{Գ}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-\text{Ա}-\text{Գ}}{2}\right)}:$$

Այլ արմատն յայնժամ եւեթ ցնորական լինի-ցի, յորժամ $\text{Ա}>\sqrt{\text{Բ}}$*, ուստի եւ* $\sqrt{\text{Բ}}-\text{Ա}$ *ուրացա-կան ինչ քանիօնութիւն իցէ։ Բայց սակայն եթէ* $\sqrt{\text{Բ}}>\text{Ա}$*, ուստի եւ* $\sqrt{\text{Բ}}-\text{Ա}$ *հաստատական լինիցի, յայնժամ* $\sqrt{\text{Բ}}-\text{Ա}$ *չափոյն երկու զօրութիւնք հնարա-ւորք ելանիցեն նովին օրինակաւ, որպէս վերագոյն գտան։ Զոր օրինակ, հանել արմատ ի* $7\sqrt{3}-12$ *չափոյ։ Քանզի* $7\sqrt{3}-12=(7-4\sqrt{3})\sqrt{3}$*, ուրեմն*

$\sqrt{(7\sqrt{3}-12)}=\sqrt{(7-4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[4]{3}$: *Նուղի ըստ Հ.* 391, $\sqrt{(7-4\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$. *ուրեմն*

$$\sqrt{(7\sqrt{3}-12)}=(2-\sqrt{3})\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}$$

Ըստ նմին օրինակի. Հանել արմատ ի $\sqrt{5}-1$ *չա-փոյ։ Գործեմս*

$$\sqrt{5}-1=\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5},\ \textit{ուստի եւ}$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\times\sqrt[4]{5}.$$

Արդ ըստ համառակաց օրինակին (Հ. 391.) իբրեւ դիցի

$$\text{Ա}=1,\ \sqrt{\text{Բ}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.\ \textit{ուստի եւ}\ \text{Գ}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ուստի եւ

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}\right)}$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right]}-\sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)}\right]\ \textit{ուստի}$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)}$$

ՀԱՏԱԾ Ե

Ա· ՅԱՂԱԳՍ ՊԱՐԶ ԲԱՐՁՐԱԳՈՅՆ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ

397· Թէպէտ եւ բարձրագոյն ուսողութեան գործ է ճառել զհաւասարութեանց, յորս անծանօթ չափն բարձրագոյն ինչ կարողութիւն յինքեան վերայ ունիցի, այլ սակայն դէպք ինչ են, զորոց զլուծումն ի ձեռն օրինացն զորոց մինչեւ յայս վայր ճառեցաք, մարթեմք գտանել:

Պարզ բարձրագոյն հաւասարութիւն այն ինչ է, որ իբրեւ կարգեալ յարդարիցի, ի նմա անծանօթ չափն առանձինն, եւ կարողութեամբ, որ բարձրագոյն իցէ քան զերկրորդ կարողութիւն, գտանի. ուստի եւ հասարակաց օրինակ այդպիսի հաւասարութեանց է $+^{մ}=Ա·$, յորում Ա· է ծանուցեալ ինչ քանիութիւն: Զօրութիւն անծանօթ չափոյն ի հաւասարութեանց աստ գտանի, յորժամ ոք յերկոցունց եւս անդամոց հաւասարութեան հանցէ արմատ մերորդ, այս ինքն է $+=\sqrt[մ]{Ա·}$: Արդ ի սոյն երկուց դիպաց մարթ է դիպել:

Ա· Եթէ ցուցիչն մ զոյգ ինչ թիւ իցէ եւ $=2ն$, յայնժամ $+$ անծանօթ չափոյն երկու զօրութիւնք իցեն, այս ինքն $+=\pm\sqrt[2ն]{Ա·}$. այլ սակայն երկոքին դէպքն անհնարին լինիցին, եւ $+$ մնացածին ինչ քանիութիւն, եթէ Ա· ուրացական լինիցի. քանզի յայս դէպս $+=\pm\sqrt[2ն]{-Ա·}$:

Բ· Այս եթէ մ ցուցիչն անզոյգ թիւ իցէ, եւ $=2ն+1$, յայնժամ անծանօթ չափոյն մի եւեթ, այլ հնարաւոր զօրութիւն է, որ եւ հաստատական լինիցի, եթէ Ա· հաստատական իցէ, եւ ուրացական, եթէ Ա· ուրացական իցէ. այս ինքն է,

$ք=\sqrt[2ն+1]{+Ռ}=+\sqrt[2ն+1]{Ռ}$, եւ $ք=\sqrt[2ն+1]{-Ռ}=-\sqrt[2ն+1]{Ռ}$: Զոր օրինակ,

Ա. $ք^3+8=0$, առնէ $ք=\sqrt[3]{-8}=-2$

Բ. $ք^3-8=0$ „ $ք=\sqrt[3]{8}=2$

Գ. $ք^4-81=0$ „ $ք=\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$

Դ. $ք^4+81=0$ „ $ք=\pm\sqrt[4]{-81}=\pm3\sqrt[4]{-1}$

Բ. ՅԱՂԱԳՍ ԲԱՐՁՐԱԳՈՅՆ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ, ՈՐՈՑ ՄԱՐԹ Է ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ ՇՐՋԵԼ

398. Ամենայն հաւասարութիւն, որ այսպիսի ինչ կերպարանս

$$ք^{2մ}+պք^{մ}+Ռ=0$$

ունիցի, յորում բարձրագոյն կարողութիւն անծանօթ չափոյն իցէ երկպատիկն խոնարհագոյն կարողութեան անծանօթին, մարթ է շրջել ի հաւասարութիւն երկրորդ կարողութեան: Համարեաց եթէ $ք^{մ}=ֆ$ իցէ, եւ $ք^{2մ}=ֆ^2$. իբրեւ զգօրութիւնս զայս դիցես ի հաւասարութեան անդ, զորմէ ճառս է, լինիցի

$$ֆ^2+պֆ+Ռ=0,$$

յորմէ ըստ 383 համարոյ ելանէ,

$$ֆ=-\frac{պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)},$$

եւ քանզի $ք^{մ}=ֆ$, ուրեմն

$$ք=\sqrt[մ]{\left[-\frac{պ}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{պ^2}{4}-Ռ\right)}\right]}:$$

Զոր օրինակ,

Ա. Լուծանել զհաւասարութիւնս $5ք=16+2\sqrt{ք}$: Համարեսցուք եթէ իցէ $\sqrt{ք}=ֆ$, ուստի եւ $ք=ֆ^2$. աստանին ծագէ

$$5ֆ^2=16+2ֆ,\ \text{եւ}\ ֆ^2-\frac{2}{5}ֆ-\frac{16}{5}=0,$$

$$ֆ=\frac{1}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{25}+\frac{16}{5}\right)}=\frac{1}{5}\pm\sqrt{\frac{81}{25}}=\frac{1}{5}\pm\frac{9}{5}$$

Ուրեմն

$$ֆ=\sqrt{ք}=2,\ \text{կամ}\ \sqrt{ք}=-\frac{8}{5},\ \text{ուստի}$$

$$ք=4 \quad \text{„} \quad ք=\frac{64}{25}$$

Բ․․ Եթէ համեմատիցեմք զհաւասարութիւնս $ք-6\sqrt{ք}+5=0$, ընդ հասարակաց օրինակին որ ի ∸․ 398, գտանեմք $մ=\frac{1}{2}$, $Պ=-6$, եւ $Ռ=5$, եւ եթէ զզօրութիւնս զայսոսիկ ի հասարակաց օրինակին դնիցեմք, ելանէ

$$ք=\sqrt[\frac{1}{2}]{[3\pm\sqrt{(9-5)}]}=\sqrt[\frac{1}{2}]{(3\pm2)},\ \text{ուստի եւ}$$

$$ք=\sqrt[\frac{1}{2}]{5}=25,\ \text{կամ}\ ք=\sqrt[\frac{1}{2}]{1}=1\cdot\ (∸\cdot\ 273\cdot)$$

Գ․․ Ի հաւասարութեանս $ք^3-2ք\sqrt{ք}-3=0$, է $ք\sqrt{ք}=ք^{\frac{3}{2}}$: Արդ իբրեւ դնիցեմք $մ=\frac{3}{2}$, $Պ=-2$, $Ռ=-3$, ելանիցէ

$$ք=\sqrt[\frac{3}{2}]{[1\pm\sqrt{(1+3)}]}=\sqrt[\frac{3}{2}]{(1\pm2)},\ \text{ուստի եւ}$$

$$ք=\sqrt[\frac{3}{2}]{3}=\sqrt[3]{9},\ \text{կամ}\ ք=\sqrt[\frac{3}{2}]{-1}=\sqrt[3]{1}=1\cdot\ (∸\cdot\ 273)$$

Դ․․ Ի հաւասարութեանն $ք^4-7ք^2+12=0$, է $մ=2$, $Պ=7$, $Ռ=12$, ուստի եւ

$$ք=\sqrt{\left[\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{49}{4}-12\right)}\right]}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\right)},\ \text{եւ}$$

$ք=\pm2$ կամ $ք=\pm\sqrt{3}$:

Ապա ուրեմն չորք արմատք են հաւասարութեանս, $+2$, $+\sqrt{3}$, -2, $-\sqrt{3}$:

399. Ի հաւասարութենէս

$$\text{ֆ}^{2+}+\text{պ}\,\text{ֆ}^{+}+\text{Ռ.}=0$$

գտանել զզօրութիւն անծանօթ քանակութեան: Դիցիր $\mathbf{ֆ}=\text{ֆ}^{+}$. եւ $\mathbf{ֆ}^{2}=\text{ֆ}^{2+}$, իբրեւ զայս զօրութիւն, դնիցեմք ի հաւասարութեան, լինիցի

$$\mathbf{ֆ}^{2}+\text{պ}\,\mathbf{ֆ}+\text{Ռ.}=0,\ \text{ուստի եւ}$$

$$\mathbf{ֆ}=-\frac{\text{պ}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\text{պ}^{2}}{4}-\text{Ռ.}\right)}:$$

Արդ համառօտիւք եւս վճարին իւքն, յորժամ փոխանակ $\mathbf{ֆ}$ գտեալ զօրութեանն դնիցեմք Դ., ուստի եւ

$$\mathbf{ֆ}=\text{ֆ}^{+}=\text{Դ.}\ \text{եւ}\ (\text{Հ. } 349.)$$
$$+\,\text{լոգ.}\,\text{ֆ}=\text{լոգ.}\,\text{Դ.},\ \text{կամ}$$
$$+=\frac{\text{լոգ.}\,\text{Դ.}}{\text{լոգ.}\,\text{ֆ}}:$$

Ըստ նմին օրինակի, լուծանի հաւասարութիւնս,

$$\sqrt[+]{\text{ֆ}}+\text{պ}\sqrt[2+]{\text{ֆ}}+\text{Ռ.}=0:$$

Արդ դիցիր $\mathbf{ֆ}=\sqrt[2+]{\text{ֆ}}$, ուստի եւ $\mathbf{ֆ}^{2}=\sqrt[2+]{\text{ֆ}^{2}}=\sqrt[+]{\text{ֆ}}$: Իբրեւ զզօրութիւնս զայսոսիկ դիցես ի հաւասարութեան, ծագէ

$$\mathbf{ֆ}^{2}+\text{պ}\,\mathbf{ֆ}+\text{Ռ.}=0,$$

եւ ըստ վերագոյն ճառելոցս

$$\mathbf{ֆ}=-\frac{\text{պ}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\text{պ}^{2}}{4}-\text{Ռ.}\right)}=\text{Դ.},\ \text{ուստի}$$

$$\sqrt[2+]{\text{ֆ}}=\text{Դ.},\ \text{եւ}\ \frac{\text{լոգ.}\,\text{ֆ}}{2+}=\text{լոգ.}\,\text{Դ.},\ \text{կամ}$$

$$\frac{\text{լոգ.}\,\text{ֆ}}{2\,\text{լոգ.}\,\text{Դ.}}=+:$$

Զհաւասարութեանց, յորս բազում անծանօթ չափք գտանիցին երկրորդ կարողութեամբ, չճառեմք, զի մի կարի երկարեսցի ճառս, երկրորդ անգամ զի մարթ է նոյն օրինօք, զորոց ի Հ. 375 ճառեցաք, եւ զասոյն լուծանել:

ԽՆԴԻՐՔ

Ա. Խնդիր: Զթիւ ինչ ն յերկուս մասունս բաժանել, որպէսզի արդիւնք երկոցունց մասանցն այնոցիկ հաւասար լինիցի պ թուոյ:

Կազմ. հաւ. եւ Պատաս.: Առաջին մասն իցէ ք, եւ երկրորդն ն—ք. ուստի եւ

$ք(ն-ք)=պ$, կամ

$նք-ք^2=պ$, որոց եթէ նշանքն փոփոխիցին

$ք^2-նք=-պ$,

$ք^2-նք+\frac{ն^2}{4}=\frac{ն^2-4պ}{4}$, եւ

$ք=\frac{ն\pm\sqrt{(ն^2-4պ)}}{2}$, ուստի եւ

$$ն-ք=ն-\frac{ն\pm\sqrt{(ն^2-4պ)}}{2}$$

$$ն-ք=\frac{ն\mp\sqrt{(ն^2-4պ)}}{2}$$

Եթէ $ք>ն-ք$ գնիցեմք, յայնժամ եղանէ

$$ք-(ն-ք)=2ք-ն=\pm\sqrt{(ն^2-4պ)}=ր,$$

ենթեալ $ն^2-4պ=ր^2$: Արդ (Հ. 375. Ա. Խնդ.) մեծագոյն մասն է $\frac{ն}{2}+\frac{ր}{2}$, եւ փոքրագոյն մասն $\frac{ն}{2}-\frac{ր}{2}$, ուստի եւ

$$\left(\frac{ն}{2}+\frac{ր}{2}\right)\left(\frac{ն}{2}-\frac{ր}{2}\right)=\frac{ն^2}{4}-\frac{ր^2}{4}=պ,$$

զորոց զհետ գայ եթէ $\frac{ն^2}{4}>պ$, կամ $\left(\frac{ն}{2}\right)^2>պ$, որչափ եւ փոքր իցէ ր այլակերպութիւնն: Ապա եթէ $ր=0$ գնիցեմք, յայնժամ լինիցի $\frac{ն^2}{4}=\left(\frac{ն}{2}\right)^2=պ$ այս ինքն Արդիւնքն կարի իմն մեծագոյն լինիցի քան զամենայն արդիւնս յորժամ ՚ի ծանուցեալ թիւն յերկուս հաւասար մասունս բաժանիցի։

Բ. Խնդիր։ Այր ոմն ետ ուսուցչի վարժոցին 200 դահեկան, զի բաժանիցէ զայն աղքատ մանկանց որ ի հարցափորձի բարւոք հանդիսանայցեն։ Արդ երկուք ոմանք ի մանկանց մեռան ի ժամանակին քննութեան, եւ մի ոմն չեղեւ արժանաւոր պարգեւին. որով մի մի ի մանկանց առնու մնացելոց առ 15 դահեկանս աւելի քան զոր առնելոյն էր յառաջագոյն։ Արդ քանի՞ մանկունք էին որ առին պարգեւս, եւ որչա՞փ ինչ իւրաքանչիւր ոք առեալ իցէ։

Լուծ. հաւ. եւ Պատ.: Դնիցուք գրեցուք եթէ յառաջագոյն իցէ թիւ մանկանցն x. հարկ է զի իւրաքանչիւր ուրուք բաժին իցէ $\frac{200}{x}$ դահ.։ Այլ քանզի բովանդակ արծաթն ընդ $(x-3)$ մանկունս բաժանեցաւ. եւ քանզի մի մի մասն 15 դահեկանաւ չափ աւելի է քան զառաջին մասն. ուրեմն $\frac{200}{x-3}-15$ $=\frac{200}{x}$։ Ուրեմն

$$200x-15x^2+45x=200x-600,\ \text{այս ինքն}$$

$$15x^2-45x=600,\ \text{կամ}$$

$$x^2-3x=40,\ \text{ուստի եւ}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{3\pm13}{2},\ \text{այս ինքն}$$

$$x=\frac{3+13}{2}=8,\ \text{կամ}\ x=\frac{3-13}{2}=-5$$

Ի հանգամանաց իսկ խնդրոյն յայտ է, եթէ հաստատական զօրութիւն 8 կարէ լինել անծանօթին։ Արդ իբրեւ բովանդակ արծաթն բաժանիցի ընդ $8-3=5$ մանկունս, մի մի ի նոցանէ առնու $\frac{200}{5}=$ 40 դահ. իսկ ըստ առաջին հանգամանայն խնդրոյն խուրաքանչիւր ոք առնլոց էր $\frac{200}{8}=25$ դահ. ̃այս ինքն 15 դահ. սակաւ:

Գ.. Խնդիր: Վաճառական ոմն 1800 դահեկանաց գնոց առ բազում բաժինս ասուոյ, եւ մեռաւ: Իսկ որ գործակալն էր յղեաց ժառանգացն 100 բաժինս: Տեսեալ նոցա զայն, յիշեցին եթէ վաճառականն այն յառաջ քան զմեռանելն ասացեալ էր, Եթէ միով աւուրբ յառաջ գնոց առեալ էր իմ, նոյնչափ դահեկանաւ 30 բաժինս եւս աւելի առնոյի, եւ զմի մի բաժին 3 դահեկանաւ չափ սակաւագնոյ: Արդ քանի՞ բաժինս առաքեալ էր գործակալն:

Կազ. հաւ. եւ Պատաս.: Թիւ համարոյ բաժնիցն, զոր գնոց առեալ իցէ վաճառականն իցէ ք. ստատին յայտ է եթէ գինք միոյ միոյ ի բաժնիցն է $\frac{1800}{\text{ք}}$: Միով աւուրբ յառաջ $\text{ք}+30$ բաժինս կարէր առնուլ 1800 դահեկանօք, որոց միոյ միոյ ի բաժնիցն գինք էին $\frac{1800}{\text{ք}+30}$, եւ զի մի մի բաժինն 3 դահեկանաւ չափ սակաւագնոյ լինելոց էր, ուրեմն եթէ զ 3 դահեկանս ի վերայ յաւելուցումք, ելանէ հաւասարութիւնս,

$$\frac{1800}{\text{ք}+30}+3=\frac{1800}{\text{ք}},\ \text{կամ}$$

$$1800\text{ք}+3\text{ք}^2+90\text{ք}=1800\text{ք}+54000,$$

$$3\text{ք}^2+90\text{ք}=54000,$$

$$\text{ք}^2+30\text{ք}=18000,\ \text{ուստի եւ}$$

$$\begin{array}{r} \text{ք}^2+30\text{ք}=18000 \\ 15^2=\quad 225 \\ \hline (\text{ք}+15)^2=18225 \end{array}$$

$$\text{ք}=-15\pm\sqrt{18225}$$

$$\text{ք}=-15\pm135$$

եւ քանզի չէ հնար լինել ուրացական զօրութեան. ուրեմն

$$ք=-15+135=120.$$

արդ գործակալն 20 բաժինս գողացեալ էր:

Դ. Խնդիր: Զթիւ ինչ յերկուս մասունս կոտորել, որոց երկրորդ կարողութիւնքն ընդ միմեանս կշռիցին որպէս ն:մ:

Լուծ. Հաւ. եւ Պատասխանի: Իցէ մի մասն այնր թուոյ ք, իսկ միւսն ա—ք, ուստի եւ

$$ք^2:(ա-ք)^2=ն:մ$$

$$մք^2=ն(ա-ք)^2, \text{ կամ}$$

$$\frac{ք^2}{(ա-ք)^2}=\frac{ն}{մ}, \text{ այս ինքն}$$

$$\left(\frac{ք}{ա-ք}\right)^2=\frac{ն}{մ}, \text{ կամ}$$

$$\frac{ք}{ա-ք}=\pm\sqrt{\frac{ն}{մ}}, \text{ ուստի եւ}$$

$$ք=\pm ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}\mp ք\sqrt{\frac{ն}{մ}}, \text{ կամ}$$

$$ք\left(1\pm\sqrt{\frac{ն}{մ}}\right)=\pm ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}, \text{ ուստի}$$

$$ք=\frac{\pm ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}}{1\pm\sqrt{\frac{ն}{մ}}}, \text{ յորմէ}$$

$$ք=\frac{ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}}{1+\sqrt{\frac{ն}{մ}}} \text{ կամ } ք=\frac{-ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}}{1-\sqrt{\frac{ն}{մ}}}$$

գտանիցի: Արդ միւս մասն է

$$ա-ք=ա-\frac{\pm ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}}{1\pm\sqrt{\frac{ն}{մ}}}=\frac{ա\pm ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}\mp ա\sqrt{\frac{ն}{մ}}}{1\pm\sqrt{\frac{ն}{մ}}}=$$

$$\frac{ա}{1 \pm \sqrt{\frac{ն}{մ}}}$$ այս ինքն է

$$ա - ք = \frac{ա}{1 + \sqrt{\frac{ն}{մ}}}$$ կամ $$ա - ք = \frac{ա}{1 - \sqrt{\frac{ն}{մ}}}$$

Եթէ $մ = 1$ դնիցեմք, յայնժամ լինիցի

$$ք = \frac{\pm ա \sqrt{ն}}{1 \pm \sqrt{ն}},$$ եւ $$ա - ք = \frac{ա}{1 \pm \sqrt{ն}}$$

Զի՞նչ իցէ յետին արդիւնքն, եթէ $մ = ն = 1$ իցէ։

Հ Ա Տ Ա Ծ Գ.

ՅԱՂԱԳՍ ԱՆՑԱՑՏ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ

400. ԶԶՕՐՈՒԹԻՒՆՍ անյայտ հաւասարութեանց մարթ է իմանալ, յորժամ թիւ համարոյ հաւասարութեանցն զոյգ եւ հաւասար իցէ թուոյ անծանօթ չափուցն որ ի նոսա գտանիցին։ Քանզի յորժամ այսպիսի ինչ դէպք լինիցին, յայնժամ կարիցէ ոք կարգ ըստ կարգէ զանծանօթ չափսն ի միջոյ ի բաց բառնալ, եւ ի հաւասարութիւն ինչ ժամանել, յորում մի անծանօթ չափ գտանիցի, որոյ եւ զօրութեանն իսկ ի վերայ հասեալ, զայն ի հաւասարութեանն դրոշմել, եւ այնուհետեւ զզօրութիւնս այլոց անծանօթ չափուցն գտանել կարիցէ։ Ապա եթէ սմին հակառակ հաւասարութիւնքն նուազագոյն քան զանծանօթ չափսն, որ ի նոսա կայցեն, իցեն, յայնժամ ի յետին հաւասարութեան անդ, որ եղծանելով իսկ այլոց անծանօթ չափուցն, ծագիցէ, առաւել քան զմի անծանօթ չափք գտանիցին։ Որպիսի ինչ, յորժամ երկու հաւասարութիւնք իցեն, զմին միայն յանծանօթ չափուցն գոյ հնար եղծանել. արդ իբրեւ յերկուս հաւասարութիւնս երեք անծանօթ չափք գտանիցին, յայտ է եթէ վերջին հաւա-

տարութիւնն երկուս չափս անծանօթս ունիցի: Դասս որ առաջիս կայ, ցուցանիցէ, եթէ զիա՞րդ եւ որո՞վ օրինակաւ պարտ իցէ զխնդիրսն որ սմին ազգի պատշաճիցին, լուծանել:

401. Համարեսցուք եթէ ի $3‡+2†=7$ հաւասարութենէ կամք իցեն մեզ զզօրութիւնս ‡ եւ † չափուց գտանել: Քանզի չիք այլ հաւասարութիւն ընդ մէջ ‡ եւ † չափուց, որպէս զի նովաւ կարիցեմք զմին յանծանօթիցն ջնջել, եւ ի միջոյ ի բաց բառնալ, եւ դարձեալ զի եւ ոչ իսկ հաղորդութիւն եւ կցորդութիւն է ընդ մէջ երկուց չափուցն, որով հնար ինչ իցէ ընդ միմեանս հարկանել. ստատին յայտ է, եթէ ի գտանելոյ անտի զօրութեան միոյ յանծանօթիցն, եւ զօրութիւն միւսոյն ի յայտ գայցէ: Արդ հաւասարութիւնս է $‡=\frac{7-2†}{3}$, յորում եթէ դնիցեմք

$†=-1$, յայնժամ $‡=3$ լինիցի,

$†=0$ „ $‡=2\frac{1}{3}$

$†=1$ „ $‡=1\frac{2}{3}$ այլովքն հանդերձ:

Արդ որովհետեւ փոխանակ † չափոյն մարթ է անթիւ զօրութիւնս, հաստատականս եւ ուրացականս, ողջոյն կամ կոտորեալ, հաստատունս կամ առանց հաստատութեան դնել, աստի յառաջ գայ, եթէ եւ զօրութիւնքն որ ‡ չափոյն կշռիցին առանց թուոյ իցեն, վասն որոյ եւ բազում ազգիազգի օրինակօք զհաւասարութիւնն զայն լուծանել կարիցեմք: Այլ սակայն սակաւիկ ինչ չափ եւ սահման դիցի թուոյ հնարաւոր զօրութեանցն այնոցիկ, յորժամ խնդրեալ անծանօթ չափքն ըստ յայտ առնելոյ կցորդութեանն որ ընդ այլ չափս, կամ հանգամանաց խնդրոյն, հանգամանս հաստատունս ունել կարիցեն, որպիսի ինչ եթէ † եւ ‡ ողջոյն եւ հաստատական լինիցին:

402. Հասարակաց օրինակ անյայտ հաւասարութեանց է

$$աժ^2+բժ=գ:$$

Իբրեւ կամիցիմք զի ի հաւասարութեանս $ժ$ եւ $ժ^2$ հաստատական չափս ցուցանիցեն, ի քնին արկցուք զդէպսն, որ հանդիպել կարիցեն: Արդ երից դիպաց հնար է լինել, յորս փոփոխիցի հաւասարակաց օրինակն,

$$\text{Ա.}\quad աժ^2+բժ=գ$$
$$\text{Բ.}\quad աժ^2-բժ=գ$$
$$\text{Գ.}\quad աժ^2-բժ=-գ:$$

Ա. $ժ^2=\frac{գ-բժ}{ա}$: Վասնզի զօրութիւն $ժ^2$ չափոյն հաստատական լինելոց է, պարտ եւ պատշաճ է համարչին եւս հաստատական լինել, ուստի եւ $գ>բժ$, եւ $ժ<\frac{գ}{բ}$, ըստ ∸. 87: Արդ իբրեւ $ժ=\frac{գ}{բ}$ դնիցեմք, յայտ է եթէ $բժ=գ$, ուստի եւ $գ=գ$, եւ $գ-գ=0$ լինիցի. եւ զի $ժ<\frac{գ}{բ}$ լինելոց է, որպէսզի յորժամ $բ$ չափով բազմացուցանիցի $բժ<գ$ լինիցի. աստի յայտ է, եթէ յայս դէպս զօրութիւն $ժ$ չափոյն ի միջին վայրի 0 եւ $\frac{գ}{բ}$ չափուց կայ, քանզի թիւքն որ <0 իցեն ուրացականք են:

Բ. $ժ^2=\frac{գ+բժ}{ա}$: Յայս դէպս $ժ$ կարիցէ զամենայն չափս հաստատականս որ իցեն ընդ մէջ 0 եւ ∞, ցուցանել, քանզի յայնժամ եւ $ժ^2$ միշտ հաստատական լինիցի:

Գ. Ապա եթէ $ժ^2=\frac{բժ-գ}{ա}$, յայնժամ $բժ>գ$, ուստի եւ $ժ>\frac{գ}{բ}$ հարկ է լինել: Վասնզի $ժ^2$ հաստատական լինելոց է, հարկ է եւ համարչին $բժ-գ$ հաստատական լինել, ուստի եւ եթէ + = գ/բ համարիցիմք, յայնժամ բ+ = գ, արդ զի բ+ > գ լինիցի, պարտ է + չափոյն ընդ մէջ գ/բ եւ ∞ լինել։

403. Իսկ իբրեւ կամք իցեն մեզ զի յա‡+բ+=գ հաւասարութեանս, ‡ եւ + անծանօթ չափքն ողջոյն թիւք իցեն, պարտ է յառաջագոյն քննել, եթէ երբ եւ յորպիսի ինչ դէպս այն հնարաւոր իցէ։ Արդ յայնժամ մարթի լինել խնդիրս, յորժամ ա եւ բ առ համեմատութեամբ միմեանց նախաւոր թիւք իցեն։ Քանզի դիցուք գրեսցուք եթէ ղ համօրէն առնելի իցէ ա եւ բ չափուց, ընդ որ գ ճշդիւ չբաժանիցի, ուստի եւ ա=մղ, բ=նղ. զորոց իբրեւ զզօրութիւնս ի հաւասարութեան հաստատիցեմք, լինիցի

մղ‡+նղ+=գ, եւ ընդ ղ բաժանեալ,

մ‡+ն+=գ/ղ։

Արդ քանզի գ/ղ չափոյն հարկ է կոտորեալ թիւ լինել, որպէս համարեցաք իսկ, եւ դարձեալ եթէ ‡ եւ + ըստ մերոյ պահանջելոյ ողջոյն թիւք իցեն, յայնժամ անհնարին ինչ է մ‡+ն+ բովանդակութեանն կոտորեալ թիւ լինել, զորին զհետ գայ զի եթէ կամիցիմք զի հաւասարութիւնս

մ‡+ն+=գ/ղ

հնարաւոր իցէ, հարկ ի վերայ կայ ‡ եւ + չափուց կոտորեալս լինել։ Ապա ուրեմն անհնարին ինչ է զի յա‡+բ+=գ հաւասարութեանս, յորժամ գործակցացն մի համօրէն առնելի իցէ, ‡ եւ + ողջոյն թիւք իցեն։

404. Համարեսցուք եթէ յա‡+բ+=գ հաւասարութեանս, ա եւ բ գործակիցքն առ միմեանց հա-

մեմատութեամբ նախաւոր թիւք իցեն: Արդ քանզի փոխանակ ք եւ փ չափուց, ողջոյն թիւս, որ հաւասարութեանն կշռիցին հաստատելոց եմք, յայտ է, եթէ յայնժամ եւեթ հնարաւոր իցէ դէպքս, յորժամ գ ընդ մին յերկուց ա եւ բ գործակցացն, զոր օրինակ ընդ ա ճշդիւ բաժանիցի, եւ անտի իսկ ծագիցէ

$$ք = \frac{գ - բփ}{ա} = \frac{գ}{ա} - \frac{բփ}{ա} = ս - \frac{բփ}{ա},$$

համարելով այնպէս եթէ $գ : ա = ս$: Արդ եթէ ք ողջոյն թիւ լինելոց իցէ, յայնժամ փոխանակ փ չափոյն այնպիսի ինչ թիւ գոյ հնար դնել, որ բազմապատիկն իցէ ա չափոյն, քանզի այլին օրինակաւ եւեթ $\frac{բփ}{ա}$ կարէ ողջոյն թիւ լինել: Արդ եթէ $փ = ադ$, յորում դ կարէ զամենայն ողջոյն թիւս յայտ առնել, յայնժամ եւ

$$ք = ս - բդ,$$

եւ իբրեւ յերկոսին հասարակաց օրինակն

$$ք = ս - բդ, \text{ եւ } փ = ադ,$$

փոխանակ դ չափոյն մի ըստ միոջէ թիւս 1, 2, 3, 4, 5, ... դնիցեմք յայնժամ կարգ ըստ կարգէ, եւ զօրութիւն ք եւ փ չափուցն գտանիցեն, որ $աք + բփ = գ$ հաւասարութեանն կշռիցին:

Զսոյն ձեւ օրինակի գտանին եւ զօրութիւնքն, որ

$$աք - բփ = գ$$

հաւասարութեանն կշռիցին. յորում լինիցի $ք = ս + բդ$ եւ $փ = ադ$:

405. Ապա եթէ յերկոսին եւս դէպսն, որ են

$$աք + բփ = գ \text{ եւ}$$
$$աք - բփ = գ$$

չափքն ք եւ փ ոչ միայն ողջոյն թիւ այլ եւ հաստատական լինելոց իցեն յայնժամ որպէս ինքնին իսկ յայտ է, եթէ ի $\text{ֆ}=\text{ադ}$ հաւասարութեան փոխանակ դ չափոյն կարիցէ ըզ զամենայն ողջոյն թիւս հաստատականս փոխանակել, եւ եւս յառաջին դէպս յորում $\text{ֆ}=\text{գ}-\text{բդ}$, հարկ իսկ է $\text{բդ}<\text{գ}$, կամ $\text{դ}<\frac{\text{գ}}{\text{բ}}$ լինել: Յորոց դիւրին իցէ ի միտ առնուլ, եթէ յայս $\text{աք}+\text{բֆ}=\text{գ}$ հաւասարութեան, թիւ համարոյ հնարաւոր լուծմանցն սահմանեալ իցէ. իսկ եթէ $\text{բ}>\text{գ}$, ուստի եւ $1>\frac{\text{գ}}{\text{բ}}$, յորմէ եւ $1>\text{դ}$ դնիցեմք, յայնժամ եւ լուծումն հաւասարութեան ողջոյն թուով անհնարին լինիցի:

Իսկ յերկրորդ դէպս, յորում $\text{ք}=\text{գ}+\text{բդ}$, մարթ է զօրութեանց դ չափոյն, 1, 1, 3. . . . . ցմշանջենաւորս աճել, եւ ցանդ իսկ եւ հանապազ զօրութիւն ք չափոյն հաստատական իցէ, յորմէ յառաջ գայ, եթէ այսր հաւասարութեան

$$\text{աք}-\text{բֆ}=\text{գ},$$

լուծումն անթիւ եւ անհամար կարիցէ լինել:

Ա. Համարեսցուք եթէ իցէ $2\text{ք}+3\text{ֆ}=8$, ուստի եւ $\text{ք}=4-\frac{3\text{ֆ}}{2}$: Արդ դիցուք դրեսցուք եթէ իցէ $\text{ֆ}=2\text{դ}$, յայնժամ եւ $\text{ք}=4-3\text{դ}$, եւ եթէ դ $\text{է}=1$, լինիցի $\text{ք}=4-3=1$, եւ $\text{ֆ}=2$: Այլ մեծագոյն ինչ զօրութիւն քան զ1 անհնարին է զի իցէ դ չափոյն. քանզի յայնժամ $4-3\text{դ}$, ուստի եւ ք ուրացական լինիցի: Ապա ուրեմն յ$2\text{ք}+3\text{ֆ}=8$ հաւասարութեան, եթէ ք եւ ֆ ողջոյն եւ հաստատական թիւք լինելոց իցեն, մի եւեթ զօրութիւն հնարաւոր է, այս ինքն $\text{ք}=1$, եւ $\text{ֆ}=2$:

Բ. Իցէ հաւասարութիւնս $7\text{ք}+5\text{ֆ}=145$, ուստի եւ

$$\text{ֆ}=29-\frac{7\text{ք}}{5}$$

Իբրեւ ք$=5$պ դիցի, յայնժամ եւ ֆ$=29-7$պ, ուստի պ$<\frac{29}{7}$ կամ պ$<4\frac{1}{7}$ հարկ է լինել: Արդ մեծագոյն զօրութիւնն, զոր ունել կարիցէ պ, է պ$=4$, որով եւ հաւասարութեան հինգ օրինակք լուծմանց հնարաւոր են, քանզի

եթէ պ$=1$,	յայնժամ	ք$=5$,	եւ ֆ$=22$
„ պ$=2$	„	ք$=10$	„ ֆ$=15$
„ պ$=3$	„	ք$=15$	„ ֆ$=8$
„ պ$=4$	„	ք$=20$	„ ֆ$=1$

Գ. Իցէ 9ք-13ֆ$=9$, ուստի եւ ք$=1+\frac{13\text{ֆ}}{9}$: Արդ յօրինակիս հարկ է ֆ$=9$պ լինել, ուստի եւ ք$=1+13$պ, զորս զհետ գայ եթէ յօրինակիս փոխանակ պ. քանակութեան մարթ է զամենայն թիւ 1, 2, 3, 4, 5 . . . առանց կատարելոյ դնել, որով եւ ք եւ ֆ չափքն հաստատական լինիցին: Այսր 9ք-13ֆ$=9$ հաւասարութեան անթիւ զօրութիւնք մարթին լինել, այս ինքն

եթէ պ$=1$,	յայնժամ	ք$=14$,	եւ ֆ$=9$
„ պ$=2$	„	ք$=27$	„ ֆ$=18$
„ պ$=3$	„	ք$=40$	„ ֆ$=27$
„ պ$=4$	„	ք$=53$	„ ֆ$=36$. այլովքն

հանդերձ:

406. Այլ եթէ յաք$\pm$բֆ$=$գ հաւասարութեան, ծանուցեալ գ չափն, եւ ոչ ընդ մին յերկուց գործակցացն բաժանիցի, յայնժամ եւ լուծումն հաւասարութեանն սակաւիկ եւս դժուարագոյն լինիցի, այլ սակայն եւ զայն եւս ըստ առընթերակայ 405 համարոյն մարթ իցէ լուծանել, որպէս յօրինակացն ցուցցի:

Ա. Պարտ է զկոտորս $\frac{19}{35}$ յերկուս կոտորս զատանել այս է ի $\frac{\text{ք}}{7}$ եւ $\frac{\text{ֆ}}{5}$, որպէս զի իցէ $\frac{\text{ք}}{7}+\frac{\text{ֆ}}{5}=\frac{19}{35}$

Իբրեւ զկոտորան ի հաւասարութենէս ի բաց բառնայցեմք, ելանէ $5\ddagger+7\dagger=19$, յորմէ

$$\ddagger=\frac{19-7\dagger}{5},\ \text{կամ}$$

$$\ddagger=3+\frac{4}{5}-\dagger-\frac{2\dagger}{5}$$

Արդ եթէ $\frac{4}{5}-\frac{2\dagger}{5}=\frac{4-2\dagger}{5}=\text{դ}$ դնիցեմք, եւ գըտանիցեմք ի հաւասարութենէ անտի զզօրութիւն $\dagger$ չափոյն, ծագէ

$$\dagger=\frac{4-5\text{դ}}{2}=2-\frac{5\text{դ}}{2},$$

եւ եդեալ $\text{դ}=2\text{ր}$, զի կարիցեմք զկոտորն ի բաց թողուլ, ելանէ $\dagger=2-5\text{ր}$: Եթէ զզօրութիւնս զայսոսիկ ի $\ddagger=3-\dagger+\text{դ}$ հաւասարութեանս հաստատիցեմք, ծագէ $\ddagger=3-2+5\text{ր}+2\text{ր}=1+7\text{ր}$: Արդ զի ի զօրութիւնս $\ddagger$ եւ ր չափուց չիք այլ եւս կոտոր, վասն այսորիկ եթէ ի հաւասարութիւնս յայսոսիկ $\ddagger=1+7\text{ր}$, եւ $\dagger=2-5\text{ր}$, փոխանակ ր չափոյն որ ինչ եւ իցէ ողջոյն թիւ դիցի, յայնժամ եւ զօրութիւնք $\ddagger$ եւ $\dagger$ չափուց ի $5\ddagger+7\dagger=19$ հաւասարութեան ողջոյն թիւ լինիցին. այլ քանզի ի խնդիրս որ առաջիս կայ, $\ddagger$ եւ $\dagger$ հաստատական եւս լինելոց են, որ յայնժամ եւեթ հնարաւոր է, յորժամ $\text{ր}=0$ իցէ, վասն այնորիկ խնդրոյս մի եւեթ լուծումն հնարաւոր է, այս ինքն

$$\ddagger=1,\ \text{եւ}\ \dagger=2,\ \text{եւ}\ \frac{19}{35}=\frac{1}{7}+\frac{2}{5}$$

Ը. Խնդրեա թիւ ինչ, որ ընդ 5 ճշդիւ բաժանիցի. այլ բաժանեալ ընդ 23, ունիցի մնացորդ 11:

Խնդրեալ թիւն իցէ Ն, ուստի եւ ըստ առաջնոյ հանդամանաց $5\ddagger=\text{Ն}$, իսկ ըստ երկրորդ հանդամանաց $\text{Ն}=23\dagger+11$, ուստի եւ $5\ddagger=23\dagger+11$, եւ $\ddagger=$

$\frac{23†+11}{5}=4†+\frac{3†}{5}+2+\frac{1}{5}=4†+2+⁊$, եթէ $\frac{3†+1}{5}$ $=⁊$ դնիցեմք ։ Ի յետին հաւասարութենէ անտի, ելանէ $†=\frac{5⁊-1}{3}=⁊+\frac{2⁊-1}{3}=⁊+⸸$, յորժամ դարձեալ $⸸=\frac{2⁊-1}{3}$ դնիցեմք. եւ ի հաւասարութենէ անտի եւս դառնի զօրութիւն ⁊ չափոյն, այս ինքն $⁊=\frac{3⸸+1}{2}=⸸+\frac{⸸+1}{2}=⸸+ɼ$, համարեալ եթէ իցէ $\frac{⸸+1}{2}=ɼ$, կամ $⸸=2ɼ-1$ ։ Քանզի ի վերջին զօրութեան ⸸ չափոյս չիք կոտոր, վասն այսորիկ դառնին զօրութիւնքն ‡ եւ † չափուց ի զօրութենէ ⸸ չափոյն ։ Արդ

$⸸=2ɼ-1$
$⁊=⸸+ɼ=3ɼ-1$
$†=⁊+⸸=3ɼ-1+2ɼ-1=5ɼ-2$
$‡=4†+2+⁊=20ɼ-8+2+3ɼ-1=23ɼ-7$

Արդ իբրեւ զօրութիւնք ‡ եւ † չափուց կամ ի $Ն=5‡$ եւ կամ ի $Ն=23†+1$ հաւասարութեան հաստատիցին, ցանդ ելանէ $Ն=115ɼ-35$. եւ այս հասարակաց օրինակս ցուցանէ զամենայն թիւ, որ զնոյն հանգամանս զորմէ վերագոյն ճառեցաք, ունիցի. զորոյ զհետ գայ եթէ մարթ է փոխանակ ɼ չափոյն, դնել 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . . ∼ ։ Արդ փոքրագոյն թիւն, որ զհանգամանս խնդրոյս լնուլ կարիցէ է 1. վասն որոյ եթէ $ɼ=1$ դնիցեմք, յայնժամ $Ն=115-35=80$ ։

գ.. Գտանել երկուս թիւս, որոց բովանդակութիւնն հաւասար իցէ վեցերորդ մասին արդեանց թըւոցն այնոցիկ, ուստի $‡+†=\frac{‡†}{6}$ ։ Ի հաւասարութենէս դառնի $6†=‡†-6‡$, եւ $‡=\frac{6†}{†-6}$, զոր եթէ արգեամբք իսկ բաժանիցեմք $‡=6+\frac{36}{†-6}=6+ⲧ$,

համարեալ $ⲧ=\frac{36}{†-6}$։ Ի յետին հաւասարութենէ

տատ դարձեալ գտանի $†=\frac{36}{ⲧ}+6$, կամ $†=6+ⲯ$,

եդեալ, եթէ $ⲯ=\frac{36}{ⲧ}$, ուստի եւ $ⲧⲯ=36$։ Արդ պարտ է զ36 յաներկիան լուծանել ի ⲧ եւ ի ⲯ, եւ գնել $‡=6+ⲧ$, եւ $†=6+ⲯ$։ Եւ քանզի ամենայնք կամ բաժանարարք 36 թուոյ են, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. արդ եթէ իցէ

ⲧ= 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, յայնժամ
ⲯ=36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1, ուստի
‡= 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42, եւ
†=42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7 լինիցի։

Ապա ուրեմն հինգ հնարաւոր լուծմունք են խընդրոյս, այս ինքն

եթէ	1) ‡=7,	յայնժամ	†=42
„	2) ‡=8,	„	†=24
„	3) ‡=9,	„	†=18
„	4) ‡=10,	„	†=15
„	5) ‡=12,	„	†=12

407. Դէպ լինի բազում անգամ, զի խնդիր ինչ վասն բոտ չափոյ անծանօթ չափուցն եւ հաւասարութիւնս ունելոյ, յայտնի կարծիցի, բայց սակայն չիցէ այնպէս։ Որպիսի ինչ է խնդիրս. Երիս թիւս գտանել, յորում բովանդակութիւն առաջնոյն եւ երկրորդին =40 իցէ, իսկ բովանդակութիւն երկրորդին եւ երրորդին =100, եւ այլակերպութիւն երրորդին եւ առաջնոյն =60 լինիցի։ Յորժամ զերիս թիւսն ջ, ‡, † չափովք նշանակիցեմք, երեքին հանգամանք խնդրոյն

$$\text{ջ}+\text{ժ}=40$$
$$\text{ժ}+\text{ւ}=100$$
$$\text{ւ}-\text{ջ}=60 \text{ իցեն:}$$

Թէպէտեւ երեք հաւասարութիւնք իցեն, վասն այսորիկ իսկ յայտնի կարծիցի խնդիրն, այլ սակայն վերջին հանգամանք խնդրոյն չէ ինչ նոր եւ այլակերպ յերկուց առաջնոցն, այլ առաջինքն կրկնեալ իմն են, եւ կամ յերկուց առաջնոց յառաջ եկեալ, քանզի յորժամ զառաջին հաւասարութիւնն յերկրորդէն հանիցեմք, այլակերպութիւնն իցէ երրորդ հաւասարութիւնն: Յորմէ յայտնապէս տեսանի, եթէ արդեամբք իսկ երկու հաւասարութիւնք են, վասն այնորիկ եւ անյայտ է խնդիրն: Արդ գտանի զօրութիւն չափուցն. որպէսզի, եթէ

$\text{ջ}=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ 39$
$\text{ժ}=39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 35,\ 34, \ldots\ldots\ldots\ 1$
$\text{ւ}=61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66, \ldots\ldots\ldots\ 99$:

Դարձեալ դէպ լինի, զի անհնարին իցէ խնդիրն, յորժամ ինքնին իսկ հանգամանաց իւրոց հակառակիցի, որպէս օրինակքս ցուցանիցեն:

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. Գտանել երիս թիւս, որոց այսպիսի իմն հանգամանք իցեն. բովանդակութիւն երկուց առաջնոցն իցէ=12, իսկ բովանդակութիւն երկուց վերջնոց=6, եւ այլակերպութիւն առաջնոյն եւ երրորդին=4:

Ըստ հանգամանաց խնդրոյս գտանին երեք հաւասարութիւնքս,

Ա. $\text{ջ}+\text{ժ}=12$
Բ. $\text{ժ}+\text{ւ}=6$
Գ. $\text{ջ}-\text{ւ}=4$

Յաւելեալ զԱ. ի Գ. ելանէ

$$\text{ջ}+\text{ժ}=10,$$

զոր իբրեւ յԴ. գնիցեմք, ելանէ 12=10, որ է անպատեհ:

Բ. Գտանել ի $x^2+7=2x$ հաւասարութենէ զզօրութիւն x չափոյն: Արդ է

$$x^2-2x=-7$$

$$x^2-2x+1=-6$$

$$x-1=\pm\sqrt{-6}$$

$$x=1\pm\sqrt{-6}$$

յորմէ երեւի եթէ անհնարին եւ մտացածին է խնդիրն:

Գ. Հայրն ետ պարգեւս որդւոց իւրոց 12 դահ. եւ 15 նուք. դերմ. արդ մի մի ի մանկանցն առ այնչափ դահեկանս, որչափ էինչ էր թիւ մանկանցն: Արդ յօրինակիս է

$$x^2=12\frac{1}{4}=\frac{49}{4}, \text{ ուստի}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2}=\pm3\frac{1}{2}$$

Արդ ի հանգամանս խնդրոյն յայտ է եթէ չէ մարթ յօրինակին թուոյ մանկանցն կոտոր լինել:

ԳԼՈՒԽ Լ.

ՅԱՂԱԳՍ ՅԱՌԱՋԱՒՈՐՈՒԹԵԱՆ

408. Մինչ չեւ ցուցեալ իցէ մեր, եթէ զի՞նչ ինչ իցէ յառաջաւորութիւն, եւ որպիսի ինչ ազգի-ազգի գործքն, որ նովաւ կատարիցին, պարտ եւ պատշաճ է մեզ զայն յանդիման կացուցանել, եթէ զի՞նչ իցէ կարգն:

Կարգ անուանեալ կոչի շարք իմն չափուց, որ միով հաստատուն օրինօք կազմեալք իցեն, եւ զմիմեանց կնի կարգեալ տեղիցին: Այս ինքն որպիսի ինչ հաղորդութիւն իցէ ընդ մէջ երկուց թուոց, նոյն կցորդութիւն գտանիցի ընդ մէջ երկրորդին եւ երրորդին, ըստ նմին օրինակի կարգաւ մի ըստ միոջէ: Զոր օրինակ կարգ ինչ թուոց է յորժամ առիցեմք, զկարգ ինչ սովորական թուոց 1, 2, 3, 4. . . . . ըստ կարգի երկրորդ կարողութեանց իւրեանց տեղեալ. ուստի եւ

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... :

Դարձեալ մեւս եւս կարգ ինչ զայս ձեւ. Կարգ ինչ թուոց տեղեալ. յորում մի մի թիւ իցէ 5իւք պակաս յերեքպատկէ առընթերակաց մօտաւոր թուոյն, եւ այն ընդ 2 բաժանեալ: Հասարակաց օրինակ այսր կարգի, յորժամ զառաջին անդամն = դնիցեմք, է $=\frac{3=-5}{2}$: Արդ դիցուք եթէ առաջին թիւն կարգիս = $=100$ իցէ, երկրորդ անդամն ըստ հասարակաց օրինակին լինիցի $\frac{3\cdot100-5}{2}=\frac{295}{2}$, երրորդն $\frac{875}{4}$, չորրորդն $\frac{2605}{8}$, ըստ նմին օրինակի եւ հինգերորդն, եւ վեցերորդն, եւ այլքն եւս: Իսկ զանդամն որ նուաղ քան զ100 իցեն, եւ նուազիցին, մարթեմք գտանել, յորժամ զանծանօթ անդամն + դնիցեմք, եւ քանզի

$$100=\frac{3+-5}{2}, \text{ ուստի եւ } 200=3+-5, \text{ եւ } 200+5=3+,$$

ուրեմն $\frac{205}{3}=+$ անծանօթ երկրորդ անդամն իցէ, ըստ նմին նմանութեան եւ այլ անդամքն որ երթալով նուազիցին:

Բաժանի կարգն յաճեցող եւ ի նուազող, ըստ աճեցող եւ ըստ նուազող լինելոյ անդամոցն. դարձեալ ի Բովանդակելի, յորժամ չափ եւ սահման իցէ անդամոցն, եւ յԱնբաւ, եթէ առանց թուոյ իցեն անդամքն:

409. Եթէ անդամոցն, որ կարգաւ զմիմեանց կնի տողիցին նոյն իմն կշռութիւն իցէ ընդ միմեանս, յորջորջի կարգն այն Յառաջաւորութիւն, որ եւ յերկուս բաժանի ի Համարողական եւ յԵրկրաչափական, ըստ կշռութեանն, որ ի միջի անդամոցն իցէ, համարողական եւ երկրաչափական լինելոյ: Արդ սկիզբն արասցուք խօսել զյառաջաւորութենէ, նախ զհամարողական յառաջաւորութենէ, եւ յետ այնորիկ զերկրաչափականէն, որք եւ մարթին եւ աճեցող եւ նուազող լինել:

ՀԱՏԱԾ Ա

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄԱՐՈՂԱԿԱՆ ՅԱՌԱՋԱՒՈՐՈՒԹԵԱՆ

410. ՅԱՌԱՋԱՒՈՐՈՒԹԻՒՆ համարողական է կարգ իմն թուոց, յորում այն որ զհետն գայցէ, յայնմանէ՝ որ յառաջագոյն քան զնքն իցէ, նովին չափով այլակերպ է, որպիսի ինչ է յառաջաւորութիւնս, 10, 13, 16, 19, 21, ..., ըստ նմին օրինակի եւ անդամքն որ սկիզբն ի տասանց արարեալ

երեք չափ նուազիցին այսպէս 10, 7, 4, 1, —2, —5, —8, ... :

Զորին զհետ գայ, զի եթէ ի համարողական յառաջաւորութեան նոյն այլակերպութեամբ անդամքն յառաջ խաղայցեն, կշռութիւն իմն համարողական ի նոսա գտանիցի, որպէս զի ամենայն անդամքն որ ի յառաջաւորութեան են, միջին համեմատականն իցեն երկուց կից առընթերակաց անդամոցն: Որպէս ի յառաջաւորութեան անդ, զոր վերագոյն յանդիման կացուցաք 10 ÷ 13 = 13 ÷ 16 = 16 ÷ 19 = 19 ÷ 21, այլովքն հանդերձ: Արդ զհասարակաց այլակերպութիւն կշռութեանս դիւրագոյն կարիցէ ոք գտանել, եթէ զմին յանդամոցն, յայնմանէ որ զհետն գայցէ, հանիցէ:

411. Եթէ ծանուցեալ ինչ իցեն մի յանդամոց անտի յառաջաւորութեան եւ այլակերպութիւնն, դիւրագոյն զայլ անդամսն աճեցողս եւ զնուազողս հնար իցէ մի ըստ միոջէ գտանել:

Համարեսցուք եթէ ծանուցեալ անդամն յառաջաւորութեան իցէ Ա., եւ այլակերպութիւնն -, իսկ անդամն՝ որ զհետ գայցէ Ա. անդամոյն իցէ +: Արդ ինքնին իսկ յայտ է, եթէ յորժամ զառաջին Ա. անդամն ի + անդամոյն հանիցեմք, ելանիցէ - այլակերպութիւնն զայս օրինակ + — Ա. = -: Ի հաւասարութենէ աստի + անդամն գտանիցի, յորժամ զԱ., շրջեալ զնշանն ուրացական՝ ի մեւս անդամ հաւասարութեան փոփոխիցես, ուստի եւ

+ = Ա. + - :

Ըստ նմին օրինակի եթէ զմեւս անդամն + չափով դրոշմիցես, եւ յայնմանէ զանդամն որ առընթերակաց իցեն հանցես, գտանիցին մի ըստ միոջէ անդամքն

+ — Ա. — - = -, ուստի + = Ա. + - + - = Ա. + 2-

+ — Ա. — 2- = -, ուստի + = Ա. + 2- + - եւ = Ա. + 3-

Այնդունակ դառնին մի ըստ միոջէ եւ նուա-զօղ անդամքն ։ Գիտացուք գրեցուք եթէ երկրորդ նուազօղ անդամն + իցէ ։ Վասնզի որովհետեւ բաղանդակութիւն հանելի չափոյն եւ այլակերպութեան հաւասար է նուազելոյն. զորին զհետ գայ եթէ ++ա=Ա, ուրեմն +=Ա—ա. որ է երկրորդ նուա-զօղ անդամն. եւ կամ դիւրագոյն եւս, յորժամ ի Ա չափոյ զ+ նուազօղ առընթերակաց անդամն հանի-ցեմք, հարկ է զի ա այլակերպութիւն իցէ, ուստի եւ Ա—+=ա. եւ Ա—ա=+. ըստ նմին օրինակի եւ այլքն մի ըստ միոջէ, եթէ զայլ անդամսն + համա-րիցիմք,

Ա— ա—+=ա, ուստի Ա—2ա=+,

Ա—2ա—+=ա, „ Ա—2ա—ա=+, եւ Ա—3ա=+,

Յորմէ յառաջ գայ եթէ հաստարակաց օրինակ յառա-ջաւորութեան համարողութեան է

4 3 2 1 2 3 4

..Ա—3ա, Ա—2ա, Ա—ա, Ա, Ա+ա, Ա+2ա, Ա+3ա,..

յորում 1, 2, 3, 4, . . . են ցուցիչք անդամոցն ։

Իբրեւ մանր միտ դնիցեմք ընդ հաստարակաց օ-րինակ յառաջաւորութեանս, դտանեմք, եթէ իւրա-քանչիւր անդամ յառաջաւորութեան կազմի յառա-ջին անդամոյն Ա, եւ յա այլակերպութենէ, բազ-մացուցեալ միով պակաս թուով անդամոցն ։ Որպէս յայտ յանդիման երեւեցաւ ի հաստարակաց օրինակէն, յորում չորրորդ անդամն է Ա+3ա, եւ հինգերորդն Ա+4ա ։ Ըստ այսու օրինօք անկանի եւ առաջին ան-դամն Ա, քանզի առընթերակաց մօտաւոր անդամն է 0, արդ Ա+0ա=Ա ։ Ըստ նմին օրինակի եւ ա-մենայն նուազօղ անդամքն որ ընդ աճեկէն իցեն Ա չափոյն ։ Արդ զի զհամօրէն հաստարակաց օրինակ օ-րինացս կարիցեմք ցուցանել, հարկ է այնու իսկ յայտ առնել, եթէ զի՞րդ օրէնքս, որ անդամոց ինչ, որոց որ ինչ եւ իցէ անյայտ թիւ համարոյ Ն իցէ, պատ-շաճիցի, կարի քաջ եւ այնմ, որոյ Ն+1 թիւ իցէ անդամոյն, պատասխանի է։ Դնիցուք գրեսցուք եթէ Ներորդ անդամն որում պատասխանիցի կանոնս, ա իցէ, ուստի եւ ա=Ա+(Ն—1)–, իսկ (Ն+1) երորդ անդամն, զորմէ խնդիրն է, իցէ +. արդ իբրեւ ի + անդամոյն զա անդամն հանցես, այլակերպութիւնն – իցէ, այս ինքն +—ա=–, որ եւ նոյն ինչ իրք են,

+—[Ա+(Ն—1)–]=–

յորմէ եթէ զզօրութիւն + չափոյն կամիցիմք գտանել, որ է (Ն+1) երորդ անդամն, ըստ օրինաց հաւասարութեան գտանի

+=–+Ա+(Ն—1)–, յորմէ
+=Ա+(1+Ն—1)–, եւ
+=Ա+(Ն)–, կամ +=Ա+Ն–, որ է (Ն+1) երորդ

անդամ։ Զայս օրինակ յորժամ Ն անդամք իցեն յառաջաւորութեանն, անդամք յառաջաւորութեան լինիցին,

Ա, Ա+–, Ա+2–, Ա+3–, . . . , Ա+(Ն—2)–, Ա+(Ն—1)–,

412. Քանզի հասարակաց օրինակ ամենայն անդամոց յառաջաւորութեան է Ա+(Ն—1)–. զորին զհետ գայ

Ա. Զի եթէ առաջին անդամն յառաջաւորութեան, եւ այլակերպութիւնն եւ թիւ համարոյ անդամոյն յայտնի եւ ծանուցեալ իցեն, մարթ է զոր ինչ եւ իցէ անդամ յանդամոց յառաջաւորութեան, առանց ինչ մի ըստ միոջէ հաշուելոյ գտանել։ Որպիսի ինչ, եթէ իցէ ինչ յառաջաւորութիւն, յորում Ա=7 իցէ, –=3, եւ Ն=12. այս ինքն եթէ զի՞նչ իցէ երկոտասաներորդ անդամն յառաջաւորութեան, յորում 7 առաջին անդամ եւ 3 այլակերպութիւնիցեն. յայտ է եթէ է=7+(12—1)3=7+(36—3) =7+33=40։

Բ. Նոյնգունակ գտանի եթէ այս նիշ թիւ +, քաներո՞րդ անդամ իցէ յառաջաւորութեան, յորում Ա եւ – ծանուցեալ իցեն։ Որպիսի ինչ թիւս 48 քաներորդ անդամ իցէ յառաջատուութեան, յորում Ա.=5, եւ տ=2 իցեն: Պարտ է գտանելն անդամն իբրեւ անծանօթ համարել +, եւ զայն 1ով նուազեցուցեալ բազմացուցանել տ=2 թուով, եւ զարդիւնսն յաւելեալ յԱ.=5, զզօրութիւն անծանօթին ըստ օրինաց հաւասարութեան գտանել: Զոր օրինակ,

$$48=5+(+-1)2$$

$$48-5=(+-1)2\text{, եւ}$$

$$\frac{48-5}{2}=+-1\text{, եւ}$$

$$\frac{48-5}{2}+1=+\text{, որ է}$$

$$+=\frac{43}{2}+1=21\frac{1}{2}+1=22\frac{1}{2}$$

Եւ յիրաւի 48 միջին վայրի է 22 եւ 23 անդամոյն, զորս եւ արդեամբք իսկ կարիցեմք զփորձ առնուլ, քանզի 22որդ անդամն է=5+42=47, իսկ 23որդ անդամն=5+44=49, յորոց ի միջին վայրի գտանի 48:

413. Ի միջոցի երկուց ա եւ բ թուոց, մարթ է անդամս որչափ եւ կամիցի ոք դնել, եթէ այլակերպութիւն անդամոյն ծանուցեալ իցէ:

Դիցուք գրեսցուք եթէ ի միջոցի ա եւ բ թըւոց Ի անդամս կամք իցեն մեզ դնել, եւ անդամոյն այլակերպութիւն իցէ +: Արդ եթէ թիւ համարոյ անդամոյն զոր դնելոց եմք ի մէջ ա եւ բ չափուց, Ի իցէ, յայտ է եթէ ամենայն անդամքն միահամուռ Ի+2 իցեն. յորմէ եւ յառաջ գայ եթէ

$$\text{բ}=\text{ա}+(\text{Ի}+1)+\text{, յորում}$$

$$+=\frac{\text{բ}-\text{ա}}{\text{Ի}+1}$$

Ապա ուրեմն այլակերպութիւն անդամոյն որ ի միջոցի ա եւ բ չափուց, է հաւասար այլակերպութեան յետին եւ առաջին անդամոյն, որ բաժանիցի ընդ միով պակաս թիւ ամենայն անդամոցն։ Արդ իբրեւ այլակերպութիւնն ծանուցեալ իցէ, մարթեմք զայլ անդամս յառաջաւորութեան մի ըստ միոջէ գտանել։ Որպիսի ինչ, կամք են մեզ ի միջոցի 7 եւ 43 թըւոց 8 անդամս դնել։ Ըստ հասարակաց օրինակին այլակերպութիւնն ե $=\frac{43-7}{9}=4$։ Ուստի եւ

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43

Այսու իսկ առաւել եւս յայտ յանդիման կացուցանի օրէնքս, զի ի հասարակաց օրինակի անդ, զոր վերագոյն ընծայեցուցաք, հարկ է յառաջաւորութեանն լինել,

ա, ա+ե, ա+2ե, ... ա+(Ի−1)ե, ա+Իե, ա+(Ի+1)ե,

յորում յետին անդամն է (Ի+2) որդ անդամ կամ բ, եւ եթէ փոխանակ ե չափոյն զեւր զօրութիւնն դնիցեմք լինիցի ա+(Ի+1)(բ−ա)/(Ի+1), ուստի եւ արդեամբք իսկ բազմացուցեալ, ա+բ−ա եղանիցէ, որ է=բ։

414. Յամենայն համարողական յառաջաւորութիւնս, բովանդակութիւն երկուց անդամոցն, որ միով չափով հեռի իցեն յերկուց արտաքին անդամոց, յանդ հաւասար է միմեանց. Նոյնպէս եւ բովանդակութիւն երկուց արտաքին անդամոցն։ Որպէս յայտ յանդիման ցուցանի ի հասարակաց օրինակէ անտի համարողական յառաջաւորութեան

Ա, Ա+տ, Ա+2տ, ... Ա+(Ն−2)տ, Ա+(Ն−1)տ,

յորում բովանդակութիւն երկուց արտաքին անդամոցն է Ա+Ա+(Ն−1)տ=2Ա+(Ն−1)տ։ Հասարակաց օրինակ կանոնիս այսպիսի ինչ է։

Դնիցուք գրեսցուք եթէ ի հասարակաց օրինակի անդ յառաջաւորութեան, որոյ երկուց արտաքին անդամոցն բովանդակութիւն է=2Ա+(Ն−1)տ, երկու անդամք իցեն ա՛ եւ բ՛. Համարեսցուք իմն այնպէս եթէ ա՛ անդամն մերորդ տեղեաւ չափ հեռի իցէ յԱ. յառաջին անդամոյն. ապա յայտ է եթէ ա՛ անդամն իցէ$=$Ա$+($մ$-1)$տ, իսկ բ՛ իցէ մ$-($ն$-1)$ $=($մ$-$ն$+1)$ երորդ անդամն նովին չափով հեռացեալ ի յետին Ներորդ անդամոյ, ուստի եւ բ՛$=$ Ա$+($ն$-$մ$)$տ, եւ ա՛$+$բ՛$=2$Ա$+($ն$-$մ$+$մ$-1)$տ$=$ 2Ա$+($ն$-1)$տ:

415. Ի յառաջատուութեան, որոյ անզոյգ իցեն անդամքն, բովանդակութիւն երկուց արտաքին անդամոցն հաւասար է երկպատկի միջին անդամոյն, որ միով չափով յերկուց արտաքին անդամոցն հեռի իցէ:

Դիցուք գրեսցուք եթէ անզոյգ անդամք յառաջատուութեանն իցեն 2ն$+1$. եւ վերջին անդամն իցէ Ա$+2$նտ, ուստի եւ բովանդակութիւն երկուց արտաքին անդամոց$=2$Ա$+2$նտ: Իսկ քանզի յերկուցունց կողմանց միջին անդամոյն Ն անդամք եւս կարգեալ տողեալ են, զորին զհետ գայ եթէ միջին անդամն իցէ $($ն$+1)$ երորդ անդամն, որեմն $($ն$+1)$ երորդն իցէ Ա$+$նտ, որոյ երկպատիկն է 2Ա$+2$նտ:

Օայնց՝ որ տեսցանն զհետ գայ, զի եթէ զերկուս նոյն յառաջատուութիւնս, յորոց մին աճեցող եւ միւսն նուազող իցէ ընդ միմեամբք դրոշմեալ, միահամուռ գումարիցեմք, բովանդակութիւն ամենայն անդամոցն միմեանց հաւասար լինիցին: Քանզի ամենայն անդամքն որ ընդ միմեամբք անկանիցին, նովին չափով հեռի են յարտաքին անդամոցն. արդ եթէ զառաջին անդամն նուազող յառաջատուութեանն Վ դնիցեմք, յայնժամ

Ք$=$Ա$+($Ա$+$տ$)+($Ա$+2$տ$)+($Ա$+3$տ$)+\cdots\cdot+$Վ, եւ
Ք$=$Վ$+($Վ$-$տ$)+($Վ-2տ$)+($Վ-3տ$)+\cdots+$Ա,

եւ ողջոյն բովանդակութիւնն

2Ք$=($Ա$+$Վ$)+($Ա$+$Վ$)+($Ա$+$Վ$)+\cdots\cdot+($Ա$+$Վ$)$

յորում, որչափ ինչ միանգամ անդամք ի յառաջաւորութեան գտանիցին, այնչափ ինչ յինքեան վերայ յաւելեալ է $\text{Ա}+\text{Վ}$: Արդ եթէ Ն իցէ թիւ համարոյ անդամոցն, լինիցի $2\text{Գ}=\text{Ն}(\text{Ա}+\text{Վ})$ իսկ $\text{Գ}=\frac{\text{Ն}(\text{Ա}+\text{Վ})}{2}$:

Այս ուրեմն. Բովանդակութիւն ամենայն անդամոց համարողական յառաջաւորութեան հաւասար է բովանդակութեան առաջին եւ յետին անդամոյն, որ բազմացուցեալ իցէ կիսով թուոյ անդամոցն. եւ կամ հաւասար է կիսոյ բովանդակութեան առաջին եւ յետին անդամոյն բազմացուցեալ թուով անդամոցն: Զոր օրինակ. Գտանել զբովանդակութիւն թուոց ի 1ոյ մինչեւ ց100, կամ յառաջաւորութեանս, 1, 2, 3, 4 ...., 100: Յօրինակիս է $\text{Ա}=1$, $\text{Վ}=100$, $\text{Ն}=100$, ուստի եւ

$$\text{Գ}=\frac{100(1+100)}{2}=5050:$$

Զսորին զհետ գայ, զի եթէ Ն թիւ համարոյ անդամոցն իցէ, յայնժամ եւ ցուցիչն յետին անդամոյն իցէ Ն, եւ վերջին անդամն $\text{Վ}=\text{Ա}+(\text{Ն}-1)\text{տ}$

416. Ի հաւասարութիւնս, զորոց ի Հ. 415 ասացաք, որ են Ա. $\text{Վ}=\text{Ա}+(\text{Ն}-1)\text{տ}$, եւ

Բ. $2\text{Գ}=\text{Ն}(\text{Ա}+\text{Վ})$,

հինգ չափք գտանին, որոց զօրութիւնքն զմիմեանց կախեալ կան, Ա, տ, Ն, Վ, եւ Գ, յորոց երեքն Ա, Ն, Վ, յերկուսին եւս հաւասարութիւնս գտանին: Յերկուց հաւասարութեանց աստի, յորս նոյն անյայտ չափն գտանիցի, մարթ է մի հաւասարութիւն կազմել, յորում նոյն անծանօթն ոչ եւս գտանիցի (Հ. 375): Արդ յերկուց հաւասարութեանց աստի կազմին երեք հաւասարութիւնք, յորոց յառաջնումն Ա, յերկրորդումն Ն, եւ յերրորդումն Վ չգտանին:

Եթէ կամիցիս զԱ. ի միջոյ ի բաց բառնալ, գտեալ զգօրութիւնն

$$\text{Ա}=\text{Վ}-(\text{Ն}-1)\text{տ},$$

յառաջին հաւասարութենէ, դիջիր, յերկրորդ հաւասարութեան, որով լինիցի

Գ.. $2\text{Ք}=\text{Ն}(2\text{Վ}-(\text{Ն}-1)\text{տ})$:

Եթէ կամիցիս զՆ ջնջել, գտեալ զգօրութիւնն յառաջին հաւասարութենէ անտի $\text{Ն}=1+\frac{\text{Վ}-\text{Ա}}{\text{տ}}$, դիջիր զայն յերկրորդումն. որով լինիցի $2\text{Ք}=\left(1+\frac{\text{Վ}-\text{Ա}}{\text{տ}}\right)(\text{Ա}+\text{Վ})$, և իբրև զբովանդակ հաւասարութիւնն տ չափով բազմացուցանիցես, ելանիցէ

Դ.. $2\text{տ}\text{Ք}=(\text{Վ}+\text{Ա})(\text{Վ}-\text{Ա}+\text{տ})$:

Ըստ նմին օրինակի և զՎ ջնջի ի բաց, գտեալ զգօրութիւն նորա յառաջին հաւասարութենէ, և զայն հաստատեալ յերկրորդումն, որով

Ե.. $2\text{Ք}=\text{Ն}(2\text{Ա}+(\text{Ն}-1)\text{տ})$:

417. Ի մի մի ի հնգից հաւասարութեանց անտի 416 համարոյ չորք անյայտ չափք գտանին, որք զմիմեանց կախեալ կան, արդ զգօրութիւնս նոցա մարթեմք ի ձեռն երից ծանուցելոց գտանել, որպէս զի ի հինգ հաւասարութեանց անտի 20 հաւասարութիւնք կամ հասարակաց օրինակք ելանեն, որոց օգնականութեամբ, իբրև երեք չափք ի հինգ Ա., Ք, Վ, Ն, տ չափուց ծանուցեալ իցեն. և զերկուս մնացեալսն մարթ է գտանել:

Արդ յԱ. հաւասարութենէ ծագեն,

1. $\text{Ա}=\text{Վ}-(\text{Ն}-1)\text{տ}$.

2. $\text{տ}=\frac{\text{Վ}-\text{Ա}}{\text{Ն}-1}$.

$$3.\ \text{ն}=\frac{\text{Վ}-\text{Ա}}{\text{տ}}+1.$$

$$4.\ \text{Վ}=\text{Ա}+(\text{ն}-1)\text{տ}.$$

Ի Բ. Հաւասարութենէ ծագէ

$$5.\ \text{Ա}=\frac{2\text{Գ}}{\text{ն}}-\text{Վ}.$$

$$6.\ \text{ն}=\frac{2\text{Գ}}{\text{Ա}+\text{Վ}}.$$

$$7.\ \text{Վ}=\frac{2\text{Գ}}{\text{ն}}-\text{Ա}$$

$$8.\ \text{Գ}=\frac{1}{2}\text{ն}(\text{Ա}+\text{Վ})$$

Ի Գ. Հաւասարութենէ ծագեն,

$$9.\ \text{տ}=\frac{2(\text{ն}\text{Վ}-\text{Գ})}{\text{ն}(\text{ն}-1)}.$$

$$10.\ \text{ն}=\frac{2\text{Վ}+\text{տ}}{2\text{տ}}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{2\text{Վ}+\text{տ}}{2\text{տ}}\right)^2-\frac{2\text{Գ}}{\text{տ}}\right]}$$

$$11.\ \text{Վ}=\frac{2\text{Գ}+\text{ն}(\text{ն}-1)\text{տ}}{2\text{ն}}$$

$$12.\ \text{Գ}=\frac{1}{2}\text{ն}(2\text{Վ}-(\text{ն}-1)\text{տ}).$$

Ի Դ. Հաւասարութենէ ծագեն,

$$13.\ \text{Ա}=\frac{\text{տ}}{2}\pm\sqrt{\left[\left(\text{Վ}+\frac{\text{տ}}{2}\right)^2-2\text{տ}\text{Գ}\right]}$$

$$14.\ \text{տ}=\frac{(\text{Վ}+\text{Ա})(\text{Վ}-\text{Ա})}{2\text{Գ}-\text{Վ}-\text{Ա}}.$$

$$15.\ \text{Վ}=\frac{\text{տ}}{2}\pm\sqrt{\left[\left(\text{Ա}-\frac{\text{տ}}{2}\right)^2+2\text{տ}\text{Գ}\right]}$$

$$16.\ \text{Գ}=\frac{(\text{Վ}+\text{Ա})(\text{Վ}-\text{Ա}+\text{տ})}{2\text{տ}}$$

Յ. Հաւասարութիւնք

17. $\text{Ա}=\frac{2\text{բ}-\text{ն}(\text{ն}-1)\text{տ}}{2\text{ն}}$.

18. $\text{տ}=\frac{2(\text{բ}-\text{Ա}\text{ն})}{\text{ն}(\text{ն}-1)}$.

19. $\text{ն}=\frac{\text{տ}-2\text{Ա}}{2\text{տ}}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{\text{տ}-2\text{Ա}}{2\text{տ}}\right)^2+\frac{2\text{բ}}{\text{տ}}\right]}$

20. $\text{բ}=\frac{1}{2}\text{ն}(2\text{Ա}+(\text{ն}-1)\text{տ})$

Այս ուրեմն եթէ ի հինգ Ա, տ, ն, Վ, բ չափուց անտի երեքն ծանուցեալ իցեն, մարթ է ի ձեռն ծանուցելոց ըստ 20 փոփոխմանց զայլսն գտանել:

Ստորեւ պատկերս, յորում Ա առաջին անդամ է յառաջաւորութեան, տ այլակերպութիւն անդամոց, ն թիւ անդամոց, Վ յետին անդամն, եւ բ բովանդակութիւն անդամոց. ցուցանէ թէ որով ի 20 հաւասարութեանց զիւրաքանչիւր դէպս գտանել պարտ իցէ:

ԾԱՆՈՒՑԵԱԼ ՁԱՓՔ	ԽՆԴՐԵԱԼ ՁԱՓՔ	ՀԱՒԱՍԱՐՈՒ-ԹԻՒՆՔ
Ա, ա, ղ	Բ բ	4 20
Ա, ա, Բ	ղ բ	3 16
Ա, ա, բ	ղ Բ	19 15
Ա, ղ, Բ	ա բ	2 8
Ա, ղ, բ	ա Բ	18 7
Ա, Բ, բ	ա ղ	14 6
ա, ղ, Բ	Ա բ	1 12
ա, ղ, բ	Ա Բ	17 11
ա, Բ, բ	Ա ղ	13 10
ղ, Բ, բ	Ա ա	5 9

Հ Ա Տ Ա Ծ Ի

ՅԱՂԱԳՍ ԿԵՐՊԱՐԱՆԱՒՈՐ ԹՈՒՈՑ

418. ԿԵՐՊԱՐԱՆԱՒՈՐ *թիւք են այդ ինչ կարգաց, յորս իւրաքանչիւր թիւ այնչափ միութիւնս ունի, որպէս զի եթէ ի տեղի միութեանցն այնոցիկ հաւասար ստէպս դնիցես, զմի եւ ընոյն կարգաւոր բազմանկիւն ձեւ յօրինեալ կազմեն. որպիսի ինչ հաւասարակողմ երեքանկիւն կամ չորեքանկիւն. կամ կարգաւոր ինչ հնգանկիւն, եւ այլ եւս որ սոյին նմանք են։ Եթէ ի կարգէ անտի սովորական թուոց,*

յորում ա այս ինքն տարբերութիւն $=1$ է այս ինքն 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Ն, կազմիցի մեւս եւս կարգ, յորում մի ըստ միոջէ կարգեալ անդամքն, իցեն բովանդակութիւնք առաջնոց (երկուց, երից, չորից, . . .) անդամոց, որպիսի ինչ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,. . . . յայնժամ կարգս անուանեալ կոչի Երեքանկիւնի թիւ, որոյ իւրաքանչիւր խնդրեալ Ներորդ անդամն է բովանդակութիւն Ն անդամոց առաջին յառաջաւորութեան սովորական թուոց. ուստի եւ $=\frac{1}{2}Ն(Ն+1)$ (Տ. 415): Որպիսի ինչ եւթներորդ երեքանկիւնի թիւ է$=\frac{1}{2}\times7\times8=28$:

Արդ եթէ ոք կամիցի գիտել, եթէ այս ինչ թիւ Ա. երեքանկիւնի թիւ իցէ արդեւք. պարտ է $\frac{Ն(Ն+1)}{2}=Ա.$ գնել, յորմէ հարկ է զի $Ն=\frac{1}{2}[\sqrt{(1+8Ա.)}-1]$ ողջոյն ինչ թիւ ելանիցէ: Զոր օրինակ դիցուք դրեսցուք եթէ իցէ Ա.$=703$, յայնժամ գտանի Ն$=37$. որով յայտ է եթէ 703 երեսներորդ եւթներորդ երեքանկիւնի թիւ է ի կարգի անդ այնց թուոց: Ապա եթէ Ն առանց հաստատութեան կամ կոտորեալ ինչ թիւ իցէ, յայնժամ յայտնի նշանակ է, եթէ Ա. չիցէ ի կարգի երեքանկիւնի թուոց:

Օրինակ երեքանկիւնի թուոց

3 6

419. Եթէ առնուցումք զհամարողական յառաջաւորութիւնս 1, 3, 5, 7, 9, 11. . ., յորում ա$=2$ է, եւ մի մի անդամ$=2Ն-1$ ըստ առաջնոյ օրինակին. բովանդակութիւն երկուց, երից, չորից, ... անդա-

մոյն առնէ մեւս եւս յառաջաւորութիւն 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ..., որ եւ անուանեալ կոչի Զորեքանկիւնի թիւ, յորում կարգի ն երորդ անդամն հաւասար է բովանդակութեան ն անդամոց կարգի անզոյգ թուոց, ուստի եւ $=\frac{1}{2}\text{ն}(1+2\text{ն}-1)$ $=\text{ն}^2$ (Հ. 415)։ Զօրին զհետ գայ. եթէ եւ բովանդակութիւն ն անզոյգ թուոց ի 1ոյ սկիզբն արարեալ, է$=\text{ն}^2$ ։

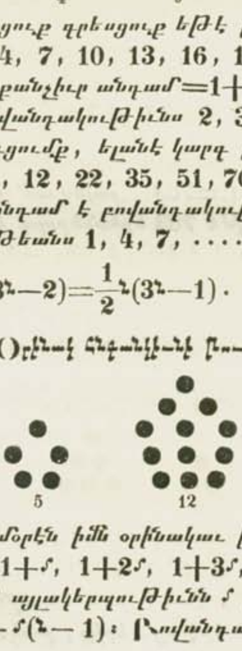
Օրինակ Քառանկիւնի թուոց

4 9

420. Դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ յառաջաւորութիւնս 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ..., յորում տ$=3$ եւ իւրաքանչիւր անդամ$=1+3(\text{ն}-1)$։ Եթէ եւ առէն զբովանդակութիւնս 2, 3, 4, 5, ... անդամոյն առնուցումք, եղանէ կարգ ինչ հնգանկիւնի թուոյն, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ..., յորում մի մի ներորդ անդամ է բովանդակութիւն ն անդամոց յառաջաւորութեանս 1, 4, 7, ..., ուստի եւ

$$=\frac{1}{2}\text{ն}(1+3\text{ն}-2)=\frac{1}{2}\text{ն}(3\text{ն}-1)\cdot\ (\text{Հ}.\ 415)$$

Օրինակ Հնգանկիւնի թուոց



5 12

421. Համօրէն իմն օրինակաւ իցէ յառաջաւորութիւնս 1, 1+տ, 1+2տ, 1+3տ, այլովքն հանդերձ, յորում այլակերպութիւնն տ իցէ, եւ ներորդ անդամն $=1+\text{տ}(\text{ն}-1)$։ Բովանդակութիւն ն ան-

գամոյ յառաջաւորութեանս է $=\frac{1}{2}ն(2+մն-մ)=$ $\frac{մն^2-(մ-2)ն}{2}$։ Արդ եթէ ի հասարակաց օրինակիս յորմէ բազմանկիւն թիւն ծագիցի, դիցես $մ=1$, $մ=2$, $մ=3$, ելանիցեն մասնաւոր օրինակք երեքանկիւնի թուոց (Հ․ 418), չորեքանկիւնի թուոց (Հ․ 419), հնգանկիւնի թուոց, (Հ․ 420), եւ այլոցն եւս, որ սոյին նմանք իցեն. ուստի եւ եթէ Ն նշանակս զթիւ համարոյ անկեանցն ցուցանիցէ. որով բազմանկիւն թիւն ծանիցի, յայնժամ ցանդ $մ=Ն-2$ ելանէ։ Ուստի յայտ է եթէ եւ հասարակաց օրինակ բազմանկիւն թուոյն զոր խնդրեմք, է $\frac{(Ն-2)ն^2-(Ն-4)ն}{2}$, յորում ն է ցուցիչ թուոյն որ կայ ի կարգի անդ այնր բազմանկիւն թուոյ։

Որպէս թէ եթէ կամք իցեն զեւթներորդ վեցանկիւնի թիւն ճանաչել, պարտ է $Ն=6$, $ն=7$ դնել, եւ խնդրեալ թիւն լինիցի

$$=\frac{4\cdot7^2-2\cdot7}{2}=2\cdot49-7=91$$

ՀԱՏԱԾ Գ.

ՅԱՂԱԳՍ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՅԱՌԱՋԱՒՈՐՈՒԹԵԱՆ

422. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ յառաջաւորութիւն է կարգ թուոց որք հաստատուն իմն օրինօք երկրաչափական կշռութեան աճեն կամ նուազեն, կամ իւրաքանչիւր անգամ իբրեւ բաժանիցի ընդ այն որ յառաջ իցէ քան զինքն, տայ զնոյն քանորդ։ Որպէս թէ կարգ թուոցս, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... այլովքն հանդերձ, յորում որ զհետ գայ երկպատիկ է իւրոյ առընթերակաց մօտաւոր թուոյն։ Նոյնպէս եւ 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, … յորում իւրաքանչիւր անդամ $\frac{1}{3}$ երորդ մասն է իւրոյ առընթերակաց թըւոյն։ Երկրաչափական կշռութիւնն՝ որ ի մէջ անդամոցն գտանի, նշանակի (:) նշանաւ։

423. Համարեսցուք եթէ $ա:բ:գ:դ:ե:զ:…$, այլովքն համդերձ, երկրաչափական յառաջաւորութիւն ինչ իցէ, արդ (Հ. 422). $ա:բ=բ:գ=գ:դ=դ:ե=ե:զ$, այլովքն համդերձ։ Ապա ուրեմն Ամենայն անդամք յերկրաչափական յառաջաւորութեան, միջին համեմատականք են երկուց առընթերակաց մօտաւոր անդամոցն։

424. Ի 223 համարոյ ծագէ եթէ

$$ա:բ=ա:բ$$
$$\underline{ա:բ=բ:գ}$$
$$ա^2:բ^2=ա:գ,$$ այս ինքն

Յամենայն երկրաչափական յառաջաւորութեան այնպէս իմն կշռի առաջին անդամն ընդ երրորդին, որպէս երկրորդ կարողութիւն առաջնոյն առ երկրորդ կարողութիւն երկրորդին։ Դարձեալ, քանզի

$$ա^2:բ^2=ա:գ,$$ եւ
$$\underline{ա:բ=գ:դ,}$$ եւս եւ
$$ա^3:բ^3=ա:դ,$$ նոյնպէս քանզի
$$ա^3:բ^3=ա:դ,$$ եւ
$$\underline{ա:բ=դ:ե,}$$ ուրեմն
$$ա^4:բ^4=ա:ե,$$ այս ինքն

Յամենայն երկրաչափական յառաջաւորութեան այնպէս իմն կշռի առաջին անդամն ընդ չորրորդին կամ ընդ հինգերորդին, որպէս կշռիցի երրորդ կամ չորրորդ կարողութիւն առաջին անդամոյն առ երրորդ կամ չորրորդ կարողութիւն երկրորդ անդամոյն։

Դնիցուք գրեսցուք եթէ փ ներորդ անդամ իցէ յառաջաւորութեանն, յայնժամ լինիցի $ա:փ=$

$ա^{մ-1}:բ^{մ-1}$։ Ուրեմն եթէ առաջին եւ երկրորդ անդամ երկրաչափական յառաջաւորութեան ծանուցեալ ինչ իցեն, մարթ է զայլ անդամն զոր կամիցի ոք գտանել, Զոր օրինակ, իցէ $ա=3$, $բ=9$, եւ եթէ կամք իցեն զվեցերորդ անդամն $փ$ գտանել, լինիցի $3:փ=3^5:9^5$, եւ

$$փ=\frac{9^5.3}{3^5}=\frac{9^5}{3^4}=\frac{3^{10}}{3^4}=3^6=729$$

425. Երկրաչափական յառաջաւորութիւն հասարակաց իմն օրինակաւ զայս օրինակ յանդիման կացուցանի։ Դիցուք գրեսցուք եթէ առաջին անդամն յառաջաւորութեան իցէ $Ա$, եւ քանորդն անդամոց, որ զմիմեանց կնի կարգեալ իցեն $ք$, երկրորդ անդամոյն հարկ է $Աք$ լինել, զի $Աք:Ա=ք$։ Ըստ նմին նմանութեան երրորդ անդամն $Աք^2$, չորրորդն $Աք^3$, որպէս զի եթէ Ներորդ անդամ իցէ, պարտ է $Աք^{Ն-1}$ լինել։ Ուստի եւ

$$Ա:Աք:Աք^2:Աք^3:Աք^4:Աք^5, \ldots Աք^{Ն-1}։$$

Զորոյ զհետ գայ, եթէ, յերկրաչափական յառաջաւորութեան մի մի անդամ կազմի յարդեանց առաջին անդամոյն, եւ քանորդին, որ ի միով պակաս թիւ անդամոցն ի կարողութիւն համբարձեալ իցէ։ Եւ եթէ մանր միտ դնիցեմք, տեսանեմք եթէ եւ առաջին անդամն ընդ նմին օրինօք անկեալ է, քանզի առաջին անդամն է $Ա$, եւ թիւ անդամոցն է 1, արդ $1-1=0$, ուրեմն $Աք^0$, եւ քանզի (Տ. 95. Ա) $ք^0=1$, ապա $Աք^0=Ա1=Ա$։ Այլ զի ցուցանիցեմք եթէ ի վերայ ամենայն անդամոց պատշաճիցի կանոնս, ցուցցուք հասարակաց օրինակաւ։ Համարեսցուք եթէ պատշաճիցի կանոնս Ն անդամոց, որ եւ իցէ $=ա$, արդ է $ա=Աք^{Ն-1}$. իսկ եթէ մի անդամ եւս առնուցումք, եւ զայն $=բ$ համարիցիմք, հարկ է զի իցէ $բ=Աք^{Ն}$։ Եւ յիրաւի իսկ այդպէս է, քանզի $բ:ա=ք$, ուստի եւ $բ=աք$, եւ եթէ փոխանակ $ա$ չափոյն զիւր հաւասար զօրութիւնն դնիցեմք, լինիցի բ$=$ $Ա.ք^{Ն-1}\times ք=Ա.ք^{Ն-1+1}=Ա.ք^{Ն}$

426. Ի միջոցի երկուց թուոց մարթ է որչափ եւ կամիցի ոք անդամս յառաջաւորութեան դնել:

Դնիցուք դրեսցուք եթէ ի միջոցի ա եւ բ թուոց կամք են մեզ Ն անդամս դնել, պարտ է յառաջագոյն զայն խնդրել, եթէ զի՞նչ իցէ քանեբորդն յառաջաւորութեան. համարեսցուք եթէ իցէ ք: Արդ զանզի թիւ համարոյ անդամոյն զորս ընդ մէջ ա եւ բ չափուց դնելոց եմք, է Ն, ապա բովանդակ անդամքն են Ն+2, եւ $բ=աք^{Ն+1}$, յորմէ եւ $ք^{Ն+1}=\frac{բ}{ա}$. եւ զի ջնջեցի ցուցիչն ք չափոյն, պարտ է յերկոցունց եւս անդամոց հաւասարութեան (Ն+1)երորդ արմատ հանել, ուստի եւ

$$ք=\sqrt[Ն+1]{\frac{բ}{ա}}$$

Որով ի վերայ հասեալ քանեբորդին, լինիցի յառաջաւորութիւնն,

$$ա,\ ա\sqrt[Ն+1]{\frac{բ}{ա}},\ ա\left(\sqrt[Ն+1]{\frac{բ}{ա}}\right)^{2},\ ա\left(\sqrt[Ն+1]{\frac{բ}{ա}}\right)^{3},\ \ldots$$

$$ա\left(\sqrt{\frac{բ}{ա}}\right)^{Ն},\ ա\left(\sqrt[Ն+1]{\frac{բ}{ա}}\right)^{Ն+1}$$

յորում վերջին անդամն է$=ա\sqrt[Ն+1]{\frac{բ^{Ն+1}}{ա^{Ն+1}}}=ա.\frac{բ}{ա}=\frac{աբ}{ա}$ $=բ$

Որպիսի ինչ եթէ կամք իցեն ընդ մէջ 1 եւ 10 թուոց 4 անդամս դնել, լինիցի, Ն$=4$, Ն$+1=5$, $ք=\sqrt[5]{10}$, $ա=1$, $բ=10$, ուստի եւ

$$1,\ \sqrt[5]{10},\ \sqrt[5]{10^2},\ \sqrt[5]{10^3},\ \sqrt[5]{10^4},\ \sqrt[5]{10^5}$$

427. Բովանդակութիւն անդամոց երկրաչափական յառաջաւորութեան գտանի ազգի ազգի օրինակօք: Համարեսցուք եթէ իցէ յառաջաւորութիւնս

$$\text{Ա}:\text{Բ}:\text{Գ}:\text{Դ}:\text{Ե}:\text{Զ}:\cdots\text{Տ}:\text{Ր}:\text{Ց}:\text{Փ}:\text{Ք}$$

յորում Ք իցէ յետին անդամն: Բովանդակութիւն յառաջաւորութեանս իցէ $=\text{բ}$, ուստի եւ

$$\text{բ}=\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ}+\text{Դ}+\text{Ե}\cdots+\text{Տ}+\text{Ր}+\text{Ց}+\text{Փ}+\text{Ք}$$

Արդ քանզի

$$\text{Ա}:\text{Բ}=\text{Բ}:\text{Գ}=\text{Գ}:\text{Դ}=\text{Դ}:\text{Ե}=\text{Տ}:\text{Ր}=\text{Ր}:\text{Ց}=\text{Ց}:\text{Փ}=\text{Փ}:\text{Ք}$$

զորոյ գծեալ գայ (Հ.321.Ա.), եթէ բովանդակութիւն ամենայն առաջնորդացն այնպէս համեմատի առ բովանդակութիւն յաջորդաց, որպէս համեմատիցի իւրաքանչիւր առաջնորդ առ իւր յաջորդն, ուստի եւ

$$(\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ}+\text{Դ}+\cdots+\text{Ց}+\text{Փ}):(\text{Բ}+\text{Գ}+\text{Դ}\cdots+\text{Ց}+\text{Փ}+\text{Ք})=\text{Ա}:\text{Բ}։$$

Եւ քանզի բովանդակութիւն առաջնորդացն բովանդակէ զամենայն չափս որ ի յառաջաւորութեան գտանիցին բաց ի յետին անդամոյն, ուրեմն է$=\text{բ}-\text{Ք}$. Եւ քանզի ի բովանդակութեան յաջորդացն գտանին ամենայն անդամք յառաջաւորութեան բաց յառաջին անդամոյն, ուստի եւ $=\text{բ}-\text{Ա}$, ուրեմն

$$(\text{բ}-\text{Ք}):(\text{բ}-\text{Ա})=\text{Ա}:\text{Բ}=\text{Ա}:\text{Ա}\text{ք}=1:\text{ք}\ (\text{Հ}.\ 309),\ \text{եւ}$$

$$\text{բ}\text{ք}-\text{Ք}\text{ք}=\text{բ}-\text{Ա},\ \text{կամ}\ \text{բ}\text{ք}-\text{բ}=\text{ք}\text{Ք}-\text{Ա},\ \text{ուստի}$$

$$\text{բ}=\frac{\text{ք}\text{Ք}-\text{Ա}}{\text{ք}-1}$$

Գտանի բովանդակութիւնն եւ այլով օրինակաւ: Համարեսցուք եթէ իցէ Ա առաջին անդամ յառաջաւորութեան, ք քանորդ, եւ ն թիւ համարոյ յետին Ք անդամոյ, ուստի եւ $\text{Ք}=\text{Ա}\text{ք}^{\text{ն}-1}$, եւ յառաջաւորութիւնն

$$\text{Ա}:\text{Ա}\text{ք}:\text{Ա}\text{ք}^2:\cdots\text{Ա}\text{ք}^{\text{ն}-2}:\text{Ա}\text{ք}^{\text{ն}-1},$$

ուստի եւ բ բովանդակութիւնն

$$=\text{Ա}+\text{Ա}\text{ք}+\text{Ա}\text{ք}^2+\text{Ա}\text{ք}^3+\text{Ա}\text{ք}^4+\cdots+\text{Ա}\text{ք}^{\text{ն}-2}+\text{Ա}\text{ք}^{\text{ն}-1}$$

Եթէ բազմացուցանիցի յառաջաւորութիւնս ք չափոխ, եւ յարդեանցն հանցի յառաջաւորութիւնս է, եղանէ

$$
\begin{array}{l}
ֆք = \quad Աք + Աք^2 + Աք^3 + \cdots + Աք^{ն-2} + Աք^{ն-1} + Աք^ն \\
ֆ = Ա + Աք + Աք^2 + Աք^3 + \cdots + Աք^{ն-2} + Ա^{ն-1} \\
\text{— — — — — — — —} \\
\hline
\end{array}
$$

$$ֆք - ֆ = Աք^ն - Ա \text{ կամ } ֆ = \frac{Աք^ն - Ա}{ք - 1}$$

Եւ քանզի $Աք^ն = ք \times Աք^{ն-1} = քՎ$ ուստի եւ

$$ֆ = \frac{քՎ - Ա}{ք - 1}$$

որ նոյն է ընդ այնմ զոր վերագոյն գտաք ։

Եթէ զկոտորս $\frac{Ա}{1-ք}$ արդեամբք իսկ բաժանիցես, եղանէ յառաջաւորութիւն ինչ,

$$\frac{Ա}{1-ք} = Ա + Աք + Աք^2 + \cdots + Աք^{ն-1} + \frac{Աք^ն}{1-ք}, \text{ ուստի եւ}$$

$$\frac{Ա - Աք^ն}{1-ք} = Ա + Աք + Աք^2 + \cdots + Աք^{ն-1} = ֆ$$

Աստի եւս եղանէ

$$ֆ = \frac{Ա - Աք^ն}{1-ք} = \frac{Աք^ն - Ա}{ք - 1}, \text{ կամ } ֆ = \frac{քՎ - Ա}{ք - 1} ։$$

Զոր օրինակ, Ա· գտանել զբովանդակութիւն յառաջաւորութեանս,

$$1 : ե : ե^2 . ե^3 : ե^4 : \ldots . ե^մ$$

Յօրինակիս է $Ա = 1$, $ք = ե$, $Վ = ե^մ$, ուստի եւ

$$1 + ե + ե^2 + ե^3 + ե^4 + \cdots + ե^մ = \frac{ե^{մ+1} - 1}{ե - 1}, \text{ ուստի եւ}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^մ = \frac{2^{մ+1} - 1}{2 - 1} = 2^{մ+1} - 1,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^մ = \frac{3^{մ+1} - 1}{2}$$

$$1+4+16+64+\ldots 4^{\text{ն}}=\frac{4^{\text{ն}+1}-1}{3},$$ այլովքն համդերձ:

Բ. Գտանել զբովանդակութիւն անդամոց յառաջաւորութեանս,

$$1:\frac{1}{\text{ք}}:\frac{1}{\text{ք}^2}:\frac{1}{\text{ք}^3}+\cdots+\frac{1}{\text{ք}^{\text{ն}}}$$

Յօրինակիս է $\text{Ա}=1$, $\text{ք}=\frac{1}{\text{ք}}$ եւ $\text{Ք}=\frac{1}{\text{ք}^{\text{ն}}}$, ուստի եւ բովանդակութիւնն

$$\text{Բ}=\frac{\frac{1}{\text{ք}^{\text{ն}+1}}-1}{\frac{1}{\text{ք}}-1}=\frac{1-\text{ք}^{\text{ն}+1}}{(1-\text{ք})\text{ք}^{\text{ն}}},$$ կամ (∸. 161)

$$\text{Բ}=\frac{\text{ք}^{\text{ն}+1}-1}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}=\frac{\text{ք}^{\text{ն}+1}}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}-\frac{1}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}=$$

$$\frac{\text{ք}}{\text{ք}-1}-\frac{1}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}$$

Արդ աստանօր ծագէ

$$1+\frac{1}{\text{ք}}+\frac{1}{\text{ք}^2}+\frac{1}{\text{ք}^3}+\frac{1}{\text{ք}^4}+\cdots+\frac{1}{\text{ք}^{\text{ն}}}=\frac{\text{ք}}{\text{ք}-1}-\frac{1}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}$$

եւ եթէ յերկոցունց անդամոցն եւս հաւասարութեանս հանցես 1, լինի

$$\frac{1}{\text{ք}}+\frac{1}{\text{ք}^2}+\frac{1}{\text{ք}^3}+\frac{1}{\text{ք}^4}+\cdots\frac{1}{\text{ք}^{\text{ն}}}=\frac{1}{\text{ք}-1}-\frac{1}{(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}}}:$$

Եթէ $\text{ք}=2$, $\text{ք}=3$, $\text{ք}=4$, $\text{ք}=\ldots$ դնիցեմք, լինիցին

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{\text{ն}}}=1-\frac{1}{2^{\text{ն}}}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\frac{1}{3^{\text{ն}}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{\text{ն}}}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\frac{1}{4^{ն}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot4^{ն}}\cdot$$ այսինքն

համդերձ:

Եւ եթէ կարգ ինչ կոտորոց յառաջ խաղայցէ ընդ մշտնջենաւորս, յայնժամ վասն $ն=\infty$ լինելոյ հարկ է զի $\frac{1}{ք^{ն}}=0$ իցէ: Յայսպիսի դէպս է

$$\frac{1}{ք}+\frac{1}{ք^2}+\frac{1}{ք^3}+\frac{1}{ք^4}+\cdots\cdots=\frac{1}{ք-1},$$ ուստի եւ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{2-1}=1,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots\cdots=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\cdots=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}:$$

Գ. Գտանել զգօրութիւն տասներորդական շրջմանց կոտորոյս 0,51515151 . . . . : Քանզի

$$0{,}51515151\cdots\cdots=51\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots\right)$$

ուրեմն $ք=100$, ուստի եւ $0{,}51515151\cdots\cdots=$

$$51\times\frac{1}{100-1}=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$$

428. Ի հաւասարութիւնս յայսոսիկ

$$Ա.\quad Վ=Աք^{ն-1}$$

$$Բ.\quad Ք=\frac{քՎ-Ա}{ք-1},$$

յորս Վ է վերջին անդամն (∸. 427), եւ Ք բովանդակութիւն յառաջատութեան (∸. 427.) հինգ անյայտ չափք են, Ա, ք, Վ, Ն, եւ Ք, յորոց երեքն Ա, ք, Վ, յերկոսին եւս հաւասարութիւնս գտանին. արդ իբրեւ զերիս չափս զայսոսիկ մի ըստ միոջէ ի բաց ջնջիցեմք, ելանիցեն երեք եւս նոր հաւասարութիւնք, յորոց յառաջնումն Ա., յերկրորդումն ք, եւ յերկրորդումն Վ չգտանիցին։

Առ ի ջնջել ի միջոյ զԱ., դիջիր փոխանակ նորա զիւր զօրութիւնն դառեալ յառաջին հաւասարութենէ $\text{Ա.}=\frac{\text{Վ}}{\text{ք}^{\text{ն}-1}}$, յերկրորդումն, որով լինիցի

$$\text{Ք}(\text{ք}-1)=\text{ք}\text{Վ}-\frac{\text{Վ}}{\text{ք}^{\text{ն}-1}}=\frac{(\text{ք}^{\text{ն}}-1)\text{Վ}}{\text{ք}^{\text{ն}-1}},\ \text{կամ}$$

$$\text{Գ.}\ \text{Ք}(\text{ք}-1)\text{ք}^{\text{ն}-1}=(\text{ք}^{\text{ն}}-1)\text{Վ}:$$

Զի կարիցես զք ի բաց ջնջել, խնդրեա զզօրութիւն նորա $\text{ք}=\sqrt[\text{ն}-1]{\frac{\text{Վ}}{\text{Ա.}}}$ յառաջին հաւասարութենէ, եւ դիջիր զայն յերկրորդ հաւասարութեան, որով ելանէ

$$\text{Ք}\left(\sqrt[\text{ն}-1]{\frac{\text{Վ}}{\text{Ա.}}}-1\right)=\text{Վ}\sqrt[\text{ն}-1]{\frac{\text{Վ}}{\text{Ա.}}}-\text{Ա.}$$

եւ կամ իբրեւ բովանդակ հաւասարութիւնն $\sqrt[\text{ն}-1]{\text{Ա.}}$ չափով բազմանայցէ, ելանէ

$$\text{Դ.}\ \text{Ք}(\sqrt[\text{ն}-1]{\text{Վ}}-\sqrt[\text{ն}-1]{\text{Ա.}})=\text{Վ}\sqrt[\text{ն}-1]{\text{Վ}}-\text{Ա.}\sqrt[\text{ն}-1]{\text{Ա.}}:$$

Ըստ նմին օրինակի եւ Վ ի բաց ջնջիցի, յորժամ զզօրութիւնն $\text{Վ}=\text{Ա.}\text{ք}^{\text{ն}-1}$ յառաջին հաւասարութենէ յերկրորդ հաւասարութիւնն փոխիցես, որով լինիցի

$$\text{Ե.}\ \text{Ք}(\text{ք}-1)=\text{Ա.}(\text{ք}^{\text{ն}}-1):$$

429. Յիւրաքանչիւր հաւասարութեան չորք անծանօթ չափք գտանին, որք եւ զմիմեանց կախեալ կան. արդ զզօրութիւնս նոցա մարթեմք ի ձեռն երից ծանուցելոց գտանել, որպէս զի ի հինգ հաւասարութեանց անտի 20 հաւասարութիւնք, կամ հասարակաց օրինակք ելանեն, որոց օգնականութեամբն,

իբրեւ երեք չափք ի հինգ $Ա$, $Փ$, $Ն$, $Գ$, եւ $Ք$ քանիոնութեանցն ծանուցեալ իցեն, զերկուս մնացեալսն մարթ է գտանել:

ՅԱ՛ Հաւասարութիւնք ելանեն,

$$1.\ Ա=\frac{Ք}{Փ^{Ն-1}}.$$

$$2.\ Փ=\sqrt[Ն-1]{\frac{Ք}{Ա}}.$$

$$3.\ Ն=\frac{լոգ.Ք-լոգ.Ա}{լոգ.Փ}+1$$

$$4.\ Ք=ԱՓ^{Ն-1}:$$

Քանզի $Ք=ԱՓ^{Ն-1}$, ուստի $լոգ.Ք=լոգ.Ա+(Ն-1)լոգ.Փ$, եւ $Ն-1=\frac{լոգ.Ք-լոգ.Ա}{լոգ.Փ}$, յորմէ գտանի եւ հաւասարութիւնն զոր սակաւիկ ինչ յառաջ վասն $Ն$ չափոյն գտաք:

ԻԱ՛ Հաւասարութիւնք ծագեն

$$5.\ Ա=Գ-(Գ-Ք)Փ.$$

$$6.\ Փ=\frac{Գ-Ա}{Գ-Ք}.$$

$$7.\ Ք=Գ-\frac{Գ-Ա}{Փ}$$

$$8.\ Գ=\frac{ՓՔ-Ա}{Փ-1}$$

ԻԳ. Հաւասարութիւնք բղխեն

$$9.\ Փ^{Ն}-\frac{Գ}{Գ-Ք}Փ^{Ն-1}+\frac{Ք}{Գ-Ք}=0$$

$$10.\ Ն=\frac{լոգ.Ք-լոգ.[Գ-(Գ-Ք)Փ]}{լոգ.Փ}+1$$

$$11.\ Ք=\frac{Գ(Փ-1)Փ^{Ն-1}}{Փ^{Ն}-1}$$

12. $բ=\frac{(ք^{ն}-1)\cdot Ք}{(ք-1)ք^{ն-1}}$:

Քանզի իններորդն է բարձրագոյն հաւասարութիւն վասն այսորիկ զգօրութիւն ք չափոյն չէ մարթ հաւասարակաց օրինակաւ յանդիման կացուցանել: Տասներորդ օրինակն գտանի, յորժամ զԴ. հաւասարութիւնն ք չափով բազմացուցանիցես, որով

$$ք^{ն}=\frac{ք\cdot Ք}{բ-(բ-Ք)ք}, \text{ եւ}$$

$$ն\,լոգ.\,ք=լոգ.\,ք+լոգ.\,Ք-լոգ.\,[բ-(բ-Ք)ք],$$

զոր իբրեւ ընդ լոգ. ք բաժանիցես, ելանէ վերին հաւասարութիւն:

Ի Դ. հաւասարութենէ ելանեն

13. $(բ-Ա)^{ն-1}\cdot Ա=(բ-Ք)^{ն-1}\cdot Ք.$

14. $ն=\frac{լոգ.\,Ք-լոգ.\,Ա}{լոգ.\,(բ-Ա)-լոգ.\,(բ-Ք)}+1$

15. $(բ-Ք)^{ն-1}\cdot Ք=(բ-Ա)^{ն-1}\cdot Ա.$

16. $բ=\frac{Ք\sqrt[ն-1]{Ք}-Ա\sqrt[ն-1]{Ա}}{\sqrt[ն-1]{Ք}-\sqrt[ն-1]{Ա}}$

Եթէ յերկուս անդամս Դ. հաւասարութեանն չափքն Ա. եւ Ք այնպէս իմն փոփոխիցին որպէս զի մի մի ի նոցանէ ի մի եւեթ անդամ հաւասարութեանն գտանիցի, ելանէ

$$(բ-Ք)\sqrt[ն-1]{Ք}=(բ-Ա)\sqrt[ն-1]{Ա}.$$

եւ զհաւասարութիւնս ի կարողութիւն ն—1 համբառնայցես, ելանեն վերին 13 եւ 15 օրինակքն: Առ ի գտանել զ14 օրինակն պարտ է զԴ. հաւասարութիւնն ընդ $\sqrt{\ }$ բաժանել, յորմէ ծագէ

$$\sqrt[ն-1]{\frac{Գ}{Ա}}=\frac{Է-Ա}{Է-Գ}\ կամ\ \left(\frac{Է-Ա}{Է-Գ}\right)^{ն-1}=\frac{Գ}{Ա}$$

ուստի

$$(ն-1)(լգ\cdot(Է-Ա)-լգ\cdot(Է-Գ))=լգ\cdot Գ-լգ\cdot Ա\cdot$$

որով գտանի հաւասարութիւն ն չափոյն :

Յէ հաւասարութենէ ելանեն ,

$$17\cdot\ Ա=\frac{Է(ք-1)}{ք^{ն}-1}$$

$$18\cdot\ ք^{ն}-\frac{Է}{Ա}ք+\frac{Է}{Ա}-1=0,$$

$$19\cdot\ ն=\frac{լգ\left(Է-\frac{Է-ա}{ք}\right)-լգ\cdot Ա}{լգ\cdot ք}+1$$

$$20\cdot\ Է=\frac{Ա(ք^{ն}-1)}{ք-1}$$

Ի մտաւոր պատկերիս տեսանիցես զօրինակս հաւասարութեանցս ,

ԾԱՆՈՒՑԵԱԼ ԶԱՓՔ	ԽՆԴՐԵԱԼ ԶԱՓՔ	ՕՐԻՆԱԿՔ
Ա, Ք, Ն	Դ Բ	4 20
Ա, Ք, Դ	Ն Բ	3 8
Ա, Ք, Բ	Ն Դ	19 7
Ա, Ն, Դ	Ք Բ	2 16
Ա, Ն, Բ	Ք Դ	18 15
Ա, Դ, Բ	Ք Ն	6 14
Ք, Ն, Դ	Ա Բ	1 12
Ք, Ն, Բ	Ա Դ	17 11
Ք, Դ, Բ	Ա Ն	5 10
Ն, Դ, Բ	Ա Ք	13 9

Ի պատկերիս Ա առաջին անդամ է, Ք քանորդ, Ն թիւ անդամոց, Դ յետին անդամն, Բ բովանդակութիւն երկրաչափական յառաջաւորութեան ։

Խ Ն Դ Ի Ր Ք

Ա. Խնդիր ։ *Այն ուրումն էր կարաս մի, որոյ չափն կամ բովանդակութիւն էր =Ա, զոր եւ լցեալ էր ջրով եւ գինւով ։ Արդ եթէ այրն զ— մասն ի խառնուածոյ անտի հանցէ ի բաց, եւ ընդ այնր զոր յիւրաքանչիւր նուագի առնուցու, լնուցու ջուր, յետ Ն իցս զնոյն գործ կատարելոյ, որչափ ինչ ի կարասին մնայցէ գինի մաքուր ։*

Լուծումն։ Համարեսցուք եթէ յառաջագոյն ի սկզբանն ի բովանդակ խառնուածն Ա. գտանիցի Գ. մասն գինւոյ։ Քանզի զխառնուած կարասոյն մի օրինակ դնեմք, այս ինքն եթէ կշռութիւն չափոյ գինւոյն առ ջուրն յամենայն մասունս խառնուածոյն մի օրինակ իցէ, որպէս ի բովանդակ իսկ խառնուածն. ապա ուրեմն հարկ է զի մասունք գինւոյն, որ յԱ., եւ յա գտանին, ուղիղ համեմատիցին որպէս այսց բովանդակութեանց չափքն, այս ինքն $+ : \text{Գ.} = \text{ա} : \text{Ա.}$ յորմէ ելանէ $+ = \frac{\text{ա.Գ.}}{\text{Ա.}}$, այս ինքն յառաջնում նուագի $\frac{\text{աԳ.}}{\text{Ա.}}$ մասն գինւոյ առնուցու, եւ մնայ ի կարասի անդ

$$\text{Գ.} - \frac{\text{աԳ.}}{\text{Ա.}} = \frac{\text{Գ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}}$$

մասն գինւոյ։ Քանզի ընդ այնր զոր առ, եկից ջուր, ուրեմն ընդարձակութիւն խառնուածոյն, չէ փոփոխեալ, ուստի եւ

$$+' : \frac{\text{Գ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}} = \text{ա} : \text{Ա.}, \text{ ուստի եւ}$$

$$+' = \frac{\text{աԳ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}^2}$$

այս ինքն յա քանիօնութեան, որ յերկրորդումն նուագի առաւ են $\frac{\text{աԳ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}^2}$ մասունք գինւոյ. իսկ մնացորդ գինւոյ կարասին =

$$\frac{\text{Գ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}} - \frac{\text{աԳ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}^2} = \frac{\text{Ա.Գ.}(\text{Ա.} - \text{ա}) - \text{աԳ.}(\text{Ա.} - \text{ա})}{\text{Ա.}^2} = \frac{\text{Գ.}(\text{Ա.} - \text{ա})^2}{\text{Ա.}^2}$$

Նովին օրինակաւ գտանեմք եթէ յետ յերրորդումն նուագի առնլոյ մնան

$$=\frac{Գ(Ա—ա)^3}{Ա^3}$$

յետ ի չորրորդումն „ $=\frac{Գ(Ա—ա)^4}{Ա^4}$

„ ի հինգերորդումն „ $=\frac{Գ(Ա—ա)^5}{Ա^5}$

. . . .

„ ի Ներորդումն „ $=\frac{Գ(Ա—ա)^Ն}{Ա^Ն}$

մասունք գինւոյ ի կարասին:

Եթէ զյետին մնացորդն Ս՝ չափով նշանակեսցեմք, գտանիցի

$$Ս=\frac{Գ(Ա—ա)^Ն}{Ա^Ն}=Գ\left(\frac{Ա—ա}{Ա}\right)^Ն=Գ\left(1—\frac{ա}{Ա}\right)^Ն:$$

Բանզի որովհետեւ $ա<Ա$, ուստի եւ $\frac{ա}{Ա}<1$, եւ $1—\frac{ա}{Ա}<1$, յորմէ եւ $\left(1—\frac{ա}{Ա}\right)^Ն$ այնչափ ինչ փոքր լինիցի, որչափ մեծ իցէ Ն. (∸. 227) առանց ինչ սպառելոյ. այս ինքն յայտ արարեալ ցուցանէ, եթէ որչափ եւ փոքր իցէ $\left(1—\frac{ա}{Ա}\right)$, չէ մարթ զայն այնպիսի ինչ համարել, որպէս զի իբրեւ զայն փոխանակ Ն չափոյն դնիցեմք $Ս=0$ լինիցի. ապա ուրեմն ցանդ մնայցէ սակաւ ինչ մասն գինւոյ ի խառնուածն, թէպէտեւ առանց սպառելոյ մի քան միւսէ ա չափով նուազիցի, եւ ընդ այնր լնուցու ջուր:

Եթէ բովանդակ անօթն իսկզբանէ լցեալ իցէ գինւով, յայնժամ լինիցի $Գ=Ա$, ուստի եւ $Ս=Գ\left(1—\frac{ա}{Գ}\right)^Ն$:

Զի առաւել մեկին եւ յայտնագոյն երեւիցի հասարակաց օրինակս, ածցուք եւ մին առակ օրինակի։

Պանդոկապետի ուրումն էր թակոյկ մի գինւոյ, որ տանէր 100 մար, յորոյ մի մի խուրաքանչիւր էր ջ դահ. (=36 դահ.)։ Արդ բազում անգամ վաճառեալ մի մի մար ի գինւոյ անտի, ընդ այնր ելից ջուր։ Կամք են մեզ գիտել եթէ մինչեւ ցքանիցս անգամ կարիցէ գնոյն կատարել, որպէս զի մի մարն ի խառնուածոյն լիցէ ղ դահ. (=24 դահեկանաց)։

Պարտ է ի հասարակաց օրինակի անդ $\text{Գ.}\left(1-\frac{\text{ա}}{\text{Ա.}}\right)^{\text{ն}}$, դնել $\text{Գ.}=\text{Ա.}=100$ եւ $\text{ա}=1$, ուստի եւ մնայցէ մնացորդ $\text{Մ}=100\left(1-\frac{1}{100}\right)^{\text{ն}}=100(0{,}99)^{\text{ն}}$, այս ինքն յետ նիցս փոփոխելոյ զտանի դեռ եւս $100(0{,}99)^{\text{ն}}$ մար մաքուր գինւոյ ի խառնուածն, որոյ չափն է $=100$ մար։ Եւ քանզի 1 մար ազնիւ գինւոյն է ջ դահեկանաց, ապա ուրեմն գինք մնացորդին $=100\text{ջ}(0{,}99)^{\text{ն}}$ է, եւ քանզի մի մար ի յետին խառնուածոյն ղ դահեկանաց լինելոց է, ուրեմն գինք բովանդակ խառնուածոյն են $=100\text{ղ}$, ուստի եւ հարկ է զի իցէ

$$100\text{ջ}(0{,}99)^{\text{ն}}=100\text{ղ},\ \text{կամ}$$

$$\text{ջ}(0{,}99)^{\text{ն}}=\text{ղ},\ \text{եւ փոխանակելով}$$

$$36(0{,}99)^{\text{ն}}=24,\ \text{կամ}$$

$$(0{,}99)^{\text{ն}}=\frac{2}{3},\ \text{ուստի եւ}$$

$$\text{ն}\ \text{լոգ.}\,0{,}99=\text{լոգ.}\,2-\text{լոգ.}\,3$$

$$\text{ն}=\frac{\text{լոգ.}\,2-\text{լոգ.}\,3}{\text{լոգ.}\,0{,}99}=\frac{0{,}3010300-0{,}4771213}{0{,}9956352-1},\ \text{կամ}$$

$$\text{ն}=\frac{0{,}4771213-0{,}3010300}{1-0{,}9956352}=\frac{0{,}1760913}{0{,}0043648}=40{,}34\cdots$$

Ապա ուրեմն եթէ 40 իցս փոփոխիցի, մի մար խառնուածոյն իցէ աւելի քան զ24 դահեկանս, ապա եթէ 41 անգամ փոփոխիցի, գինք 1 մոր գինւոյն չլինիցի աւելի քան զ24 դահեկանս:

Բ. Խնդիր: Այր ոմն եդ գլուխ դրամոց Գ. դահ., շ շահու, եւ հրաման ետ, զի շահքն ամի ամի ի գլուխ անդր յաւելցին: Արդ որչափ ինչ բազմանայցէ գլուխն յետ Ներորդ ամի:

Լուծումն: Ի հանգամանաց խնդրոյն գտանի համեմատութիւնս,

$$\text{փ}' : 100+\text{շ} = \text{Գ.} : 100$$

այս ինքն եթէ 100 դահեկանաց գլուխն ի վախճան ամին լինիցի հանդերձ շահուքն 100+շ, որչափ ինչ լիցի Գ. գլուխն տոկոսեօքն հանդերձ. ուստի եւ

$$\text{փ}' : 1+\frac{\text{շ}}{100} = \text{Գ.} : 1,$$

այս ինքն որչափ ինչ լինիցի Գ. դահեկանաց գլուխն, եթէ 1 դահեկան գլուխն բազմանայցէ $\left(1+\frac{\text{շ}}{100}\right)$:

Յայտ է եթէ Գ. լինիցի $\text{փ}' = \text{Գ.}\left(1+\frac{\text{շ}}{100}\right)$, կամ եթէ $1+\frac{\text{շ}}{100} = \text{·Ք}$ դնիցեմք, $\text{փ}' = \text{Գ.·Ք}$: Արդ այս է գլուխն երկրորդ ամին կամ ի վախճան առաջին ամին. յորմէ եւ նոյնպէս

$$\text{փ}'' : \text{·Ք} = \text{Գ.·Ք} : 1, \quad \text{ուստի } \text{փ}'' = \text{Գ.·Ք}^2$$

որ է գլուխն հանդերձ շահուք ի վախճան երկրորդ ամին: Նովին օրինակաւ գտանեմք, եթէ գլուխն հանդերձ շահուք

ի վախճան 3 որդ ամին $= \text{Գ.·Ք}^3$

" 4 " " $= \text{Գ.·Ք}^4$

" 5 " " $= \text{Գ.·Ք}^5$

. . . . եւ հասարակաց օրինակաւ

ի վախճան Ներորդ ամին $= \text{Գ.·Ք}^{\text{Ն}}$:

Արդ եթէ զզօրութիւնն յոր աճեցեալ իցէ ի Ն ամս գլուխն, նշանակիցեմք Ի. նշանագրով, լինիցի

$\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Թ}^{\text{Ն}}$. (Տ. 427, կամ 429. Ձեւ 4.)։ Զոր օրինակ եթէ իցէ $\text{Գ}=3780$ դահ., $\text{Շ}=5$, $\text{Ն}=10$, յայնժամ $\text{Բ}=3780\cdot(1{,}05)^{10}$, որ եւ ի ձեռն լոգարիթմեայց գտանի

$$
\begin{array}{r}
\text{լոգ.}\ 3780=3{,}5774918\\
+10\ \text{լոգ.}\ 1{,}05=\underline{0{,}2118930}\\
3{,}7893848=\text{լոգ.}\ \text{Բ}
\end{array}
$$

ուստի եւ

$$\text{Բ}=6157{,}22\ldots \text{դահ.}։$$

Ա. Արդ եթէ խնդրիցեմք զժամանակն, յորում Գ. գլուխն նովին իսկ հանգամանօք, որպէս վերագոյն յիշատակեցաք, ի չափ ինչ սահմանեալ Բ աճիցէ. գտանեմք ի $\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Թ}^{\text{Ն}}$ կամ ի $\text{Թ}^{\text{Ն}}=\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}$ հաւասարութենէ զզօրութիւնն

$$\text{Ն}=\frac{\text{լոգ.}\ \text{Բ}-\text{լոգ.}\ \text{Գ}}{\text{լոգ.}\ \text{Թ}}։$$

Զոր օրինակ։ Ի քանի՞ ամս գլուխ ինչ դրամոց երիցս բազմանայցէ։ Արդ է յօրինակիս $\text{Բ}=3\text{Գ}$, եւ $\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}=3$. ուստի եւ

$$\text{լոգ.}\ \text{Բ}-\text{լոգ.}\ \text{Գ}=\text{լոգ.}\ 3,\ \text{եւ}\ \text{Ն}=\frac{\text{լոգ.}\ 3}{\text{լոգ.}\ \text{Թ}}։$$

Իւ քանզի դարձեալ $\text{Թ}=1{,}05$, ուրեմն

$$\text{Ն}=\frac{\text{լոգ.}\ 3}{\text{լոգ.}\ 1{,}05}=\frac{0{,}4771213}{0{,}0211892}=22{,}517\ldots$$

Արդ գլուխ ինչ դրամոց 5 շահու ի $22^1/_2$ ամի երիցս քան զառաջինն բազմանայցէ։ Այլ եթէ հասարակաց օրինակաւ $\text{Բ}=\text{մ}\text{Գ}$ դնիցեմք յայնժամ $\text{Ն}=\frac{\text{լոգ.}\ \text{մ}}{\text{լոգ.}\ \text{Թ}}$։

Բ. Արդ քանի՞ ինչ պարտ իցէ լինել շահն, եթէ գլուխն Գ. ի Ն ամի Բ լինել իցէ։

Ի $\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Թ}^{\text{Ն}}$ հաւասարութենէս, գտանի

$$\text{Թ}=\sqrt[\text{Ն}]{\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}},\ \text{կամ}\ 1+\frac{\text{Շ}}{100}=\sqrt[\text{Ն}]{\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}},\ \text{եւ}$$

$$\text{շ}=100\left(\sqrt[\text{ն}]{\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}}-1\right):$$

Զոր օրինակ: Այր ոմն փոխատու չորից բազմացոյց զիւր գլուխ դրամոյ յերկոտասան ամի. արդ որչափ ինչ տոկոսիս առ: Արդ է

$\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}=4$, ուստի եւ $\text{ն}=100(\sqrt[12]{4}-1)$: Իսկ զի

$\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}=\sqrt[3]{(\sqrt{2})}=1,12246\ldots$, ուրեմն
$\text{ն}=0,12246\ldots\times100=12,246\ldots$

Արդ աւելի քան զ12 տոկոսիս առ:

Զօրութիւն $\sqrt[\text{ն}]{\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}}$ արմատական չափոյս դիւրաւ եւ համառօտիւք եւս գտանի ի ձեռն ղոգարիթմեայց քանզի

$$\text{լոգ}\cdot\sqrt[\text{ն}]{\frac{\text{Բ}}{\text{Գ}}}=\frac{\text{լոգ}\cdot\text{Բ}-\text{լոգ}\cdot\text{Գ}}{\text{ն}}:$$

Գ.. Խնդիր: Այր ոմն ունի յետ 9 ամաց հատուցանել 7800 դահեկանս. արդ կամեցեալ նորա այժմէն իսկ փոխվաղակի զպարտս հատուցանել, կամի հատանել ի վերայ, եթէ որչափ ինչ ունիցի տալ:

Լուծումն: Խնդրեալ արժաթն պարտ է այնչափ ինչ լինել, որպէս զի համդերձ տոկոսեօք ի ժամանակի անդ 9 ամաց լինիցի 7800: Արդ ի $\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{ն}}$ հաւասարութեանս է $\text{Բ}=7800$, $\text{ն}=9$, $\text{Ք}=1,05$, ուստի եւ

$$\text{Գ}=\frac{\text{Բ}}{\text{Ք}^{\text{ն}}}=\frac{7800}{(1,05)^9},\ \text{եւ}$$

$$\begin{aligned}\text{լոգ}\cdot7800&=3,8920946\\ -9\,\text{լոգ}\cdot(1,05)&=\underline{0,1907037}\\ &3,7013909=\text{լոգ}\cdot\text{Գ}.\end{aligned}$$

ուստի եւ $\text{Գ}=5027,95$ դահեկան. արդ այնչափ ինչ կարէ այժմ վասն պարտուցն զոր յետ 9 ամաց ունէր հատուցանել, տալ:

Դ. Խնդիր: Այր ոմն վաճառական եդ գլուխ մի դրամոց Գ., Շ շահու, տանելով զտոկոսեացն տոկոսս, եւ ամի ամի յաւել ի գլուխ անդր դրամոց եւ Ա. դահ. նովին իսկ համեմատանօք: Արդ ո՞րչափ ինչ աճեսցի գլուխն յետ Ն ամաց:

Լուծումն: Ըստ Բ. խնդրոյ, Գ. գլուխն ի վախճան Ն ամին առանց յաւելուածոյ իցէ $\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}$, յորում $\text{Ք}=1+\frac{\text{Շ}}{100}$

Արդ առաջին յաւելուածն Ա. ի վախճան առաջին տարւոյ, որ նշանակի (Ն—1) քանիօնութեամբ, տոկոսօքն համդերձ $\text{է}=\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-1}$, յերկրորդումն $\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-2}$, յերրորդումն $\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-3}$, ... եւ ի վախճան Ներորդ ամի Ա., յորմէ յայտնապէս տեսանես, եթէ Ա. մնայ առանց փոփոխելոյ, որով բովանդակ գլուխն յետ Ն ամաց է

$$\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}+(\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-1}+\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-2}+\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}-3}+\cdots+\text{Ա}\cdot\text{Ք}^{2}+\text{Ա}\cdot\text{Ք}+\text{Ա}),$$

կամ

$$\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}+\text{Ա}(\text{Ք}^{\text{Ն}-1}+\text{Ք}^{\text{Ն}-2}+\text{Ք}^{\text{Ն}-3}+\cdots+\text{Ք}^{2}+\text{Ք}+1)$$

Եւ քանզի անդամքն որ ի փակիչ գծի անդ են, յօրինեալ կազմեն երկրաչափական յառաջատուորութիւն ինչ, որոյ բովանդակութիւնն է (Հ. 427.)$=\frac{(\text{Ք}^{\text{Ն}}-1)}{\text{Ք}-1}$ ուրեմն

$$\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}+\left(\frac{\text{Ք}^{\text{Ն}}-1}{\text{Ք}-1}\right)\text{Ա}:$$

Եթէ ի հասարակաց օրինակին $\text{Ա}=0$ դնիցեմք, յայնժամ $\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}$, որ է նոյն ընդ դիպացն, զորմէ վերագոյն Խնդ. Բ. տեսաք: Ապա եթէ յեդեալ գլխոյն ամի ամի առնուցու ի բաց Ա. դահեկ., յայնժամ ի Ն ամս լինիցի Գ. գլուխն

$$\text{Բ}=\text{Գ}\cdot\text{Ք}^{\text{Ն}}-\left(\frac{\text{Ք}^{\text{Ն}}-1}{\text{Ք}-1}\right)\text{Ա}:$$

Արդ եթէ յայս դէպս բազմանալոց իցէ գլուխն կամ $\text{Բ}>\text{Գ}$. լինելոց, յայնժամ հարկ է զի

$$\text{Գ.Ք.}^{\text{Ն}}-\left(\frac{\text{Ք.}^{\text{Ն}}-1}{\text{Ք.}-1}\right)\text{Ա.}>\text{Գ.}$$ *իցէ կամ*

$$(\text{Ք.}^{\text{Ն}}-1)\text{Գ.}>\left(\frac{\text{Ք.}^{\text{Ն}}-1}{\text{Ք.}-1}\right)\text{Ա.},$$ *եւ*

$$\text{Գ.}>\frac{\text{Ա.}}{\text{Ք.}-1},$$ *կամ* $(\text{Ք.}-1)\text{Գ.}>\text{Ա.}$։ *Իսկ զի*

$$\text{Ք.}-1=\frac{\text{Շ}}{100},$$ *ուրեմն* $\frac{\text{Գ.Շ}}{100}>\text{Ա.}$

այս ինքն, եթէ արծաթն, զոր ամի ամի առնուցու ի բաց, պարտ է սակաւ լինել քան զշահն միոյ տարւոյ։

Եթէ $\text{Ա.}=\frac{\text{Գ.Շ}}{100}$ *իցէ, յայնժամ Գ. գլուխն մնացէ առանց փոփոխելոյ. ապա եթէ* $\text{Ա.}>\frac{\text{Գ.Շ}}{100}$, *յայնժամ Գ. գլուխն տարւոյ տարւոյ նուազիցի։ Ժամանակն, յորում բոլորովին գլուխն սպառ իցի, գտանի ի* $\text{Մ}=0$ *հաւասարութենէ կամ* $\text{Գ.Ք.}^{\text{Ն}}-\left(\frac{\text{Ք.}^{\text{Ն}}-1}{\text{Ք.}-1}\right)\text{Ա.}=0$։ *Ի հաւասարութենէ աստի յայտնապէս ծագէ*

$$(\text{Ք.}-1)\text{Գ.Ք.}^{\text{Ն}}-\text{Ք.}^{\text{Ն}}\text{Ա.}+\text{Ա.}=0$$

$$\text{Ք.}^{\text{Ն}}(\text{Ա.}-(\text{Ք.}-1)\text{Գ.})=\text{Ա.}$$

$$\text{Ք.}^{\text{Ն}}=\frac{\text{Ա.}}{\text{Ա.}-(\text{Ք.}-1)\text{Գ.}}$$

Ի ձեռն լոգարիթմեայց ի հաւասարութենէս ելանէ

$$\text{Ն Լոգ. Ք.}=\text{Լոգ. Ա.}-\text{Լոգ. }(\text{Ա.}-(\text{Ք.}-1)\text{Գ.}),$$ *եւ*

$$\text{Ն}=\frac{\text{Լոգ. Ա.}-\text{Լոգ. }(\text{Ա.}-(\text{Ք.}-1)\text{Գ.})}{\text{Լոգ. Ք.}}$$

Եթէ իցէ Գ=80000 *դահ.* Ք=1,05 *ելանէ տոկոսիք տարւոյ միոյ* (Ք−1)Գ=4000։ *Եւ եթէ իցէ* Ա=9000, *ուստի եւ* Ա−(Ք−1)Գ=5000, *յայնժամ*

$$\text{Ն}=\frac{\text{Լոգ}\cdot 9000-\text{Լոգ}\cdot 5000}{\text{Լոգ}\cdot 1{,}05},$$

$$\begin{array}{r l}
\text{Լոգ}\cdot 9000 = & 3{,}9542425 \\
-\text{Լոգ}\cdot 5000 = & 3{,}6989700 \\
\hline
& 0{,}2552725
\end{array}, \quad \text{եւ Ն}=\frac{0{,}2552725}{0{,}0211893}=12{,}047\ldots$$

Արդ 80000 *գլուխն առլէն օրինակաւ սպառիցի յետ* 12 *ամաց*։

ԱՆՈՒԱՆՔ ՆՇԱՆԱԳՐՈՎՔ ՀԱՄԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆ

Աճեցող, wachsend, croissant.

Այլակերպութեան հաշիւ, Differenzialrechnung, calcul différentiel.

Այլակերպութիւն, (տարբերութիւն), Unterschied, Differenz, différence, excès.

Անբաւ, unendlich, infini.

Անբուն, unecht, uneigentlich, impropre.

Անդամ, Glied, terme.

Անզոյգ, ungerade, impair.

Անկարգ (կատոր), unregelmäßig, irrégulier.

Անհնարին, unmöglich, impossible.

Անյայտ հաւասարութիւն, unbestimmte Gleichung, équation indéterminée կամ sourde.

Անուանիչ, Nenner, dénominateur.

Անչափական, unmeßbar, incommensurable.

Անքակ (համեմատութիւն), stetig, continu.

Առանց հաստատութեան, irrational, irrationnel.

Առաջնորդ (կշռութեան), (նախընթաց), Vorderglied, antécédent.

Առաւել, Plus, plus.

Առնելի, Faktor, facteur.

Աստեղագիտութիւն, Astronomie, Sternkunde, astronomie.

Արդեանց (համարողութիւն, եւ այլն), (գործնական), praktisch, pratique.

Արդիւնք, (արտադրեալ), Produkt, produit.

Արմատ, Wurzel, racine.

Արմատոյ նշան, Wurzelzeichen, signe radical.

Արմատոյ ցուցիչ, Wurzelexponent կամ Radical-Exponent, exposant radical.

Արտաքին (անդամ), äußere, extrême.

Բազմամասն, polynome, polynôme.

Բազմանկիւնի թիւ, polygonalzahl, nombre polygone.

Բազմացուցանել, (բազմապատկել), multipliciren, multiplier.

Բազմացուցանելի (բազմապատկելի), Multiplicand, multiplicande.

Բազմացուցիչ, (բազմապատկիչ), Multiplicator, multiplicateur.

Բաժանարար, Theiler, Divisor, diviseur.

Բաժանելի, Dividend, dividende.

Բաժանումն, Division, division.

Բարձրագոյն ուսողութիւն, höhere Mathematik, mathématiques sublimes.

Բեւեկն, Terpentin, térébenthine.

Բովանդակութիւն, (գումար), Summe, somme.

Բովանդակելի, (գումարելի), Summand, Post, partie.

Բուն, echt, eigentlich, propre, réel.

Գիծ, Linie, ligne.

Գիտութիւն տեսանելեաց, Optik, optique.

Գործակից, Coefficient, coëfficient.

Գումարել, տես Յաւելումն։

Դահեկան Գերմանացւոց, Gulden, florin.

Դահեկան Տաճկաց, ղուրուշ, Piaster, piastre.

Դանգ, Heller, denier.

Դատարկ (զրոյ), Null, zéro.

Դոճի խէժ, Schellack, gomme laque.

Դրամ Գերմանացւոց, Quentchen, drachme.

Դրամ Ցանկաց, տես Է:

Երեքանկիւնի թիւ, Dreiecks կամ Triangularzahl, nombre trigonal կամ triangulaire.
Երեքդրամեան, Groschen, gros.
Երեքիլիոն, Trillion, trillion.
Երեքին, Terne, terne.
Երեքկնել, triplicirt, triplé.
Երեքմասնեան, Trinome, trinôme.
Երից կանոն, Regeldetri, règle de trois.
Երկիլիոն, Billion, billion.
Երկմասնեան, Binome, binôme.
Երկուքին, Ambe, ambe.
Երկրաչափական (նշմութիւն, եւ այլն). geometrisch, géométrique.
Երկրաչափութիւն, Geometrie, Erdmeßkunst, géométrie.
Երկրորդական վայրկեան, Sekunde, seconde.
Երկրորդ արմատ, zweite Wurzel, racine deuxième, կամ carree.
Երկրորդ կարողութիւն, zweite Potenz, seconde puissance կամ carré.
Երրորդական վայրկեան, Terz, կամ Tertie, tierce.
Երրորդ արմատ, dritte Wurzel, racine troisième կամ cubique.
Երրորդ կարողութիւն, dritte Potenz, troisième puissance կամ cube.

Զոյգ, gerade, pair.

Թիւ, Zahl, nombre.

Ժամ, Stunde, heure.

Ի բաց բառնալ / Ի բաց հանել (ի համարութեան), eliminiren, éliminer.

Լումայ Գերմանացւոց, Pfennig, fenin.
Լիտր Գերմանացւոց, Pfund, livre.
Լիտր Ցանկաց, օքքա:
Լումայ Ցանկաց, փարայ:

Խառնուած, Combination, combinaison.
Խառն ուսողութիւն, angewandte Mathematik, mathématiques mixtes.
Խոնարհագոյն ուսողութիւն, niedere, elementäre Mathematik, mathématiques élémentaires
Խոտորնակ, verkehrt կամ indirekt, indirect, inverse.
Խորանարդ, Kubik, cube, կամ nombre cubique.
Խրուկ, Zinober, cinabre.

Կանգուն, Elle, aune.
Կանոն, Regel, règle.
Կանոն զուգելոյ, Alligationsregel, règle d'alliage,
Կանոն ընկերութեան, Gesellschaftsregel, règle de compagnie.
Կարգ, Reihe, suite. 2. Sisteme, méthode, système.
Կարգաւոր (կոտոր), regelmäßig, régulier.
Կարողութիւն, Potenz, puissance.
Կերպարանաւոր թիւ, figurirte Zahl, nombre figuré.
Կէս ունկի, Loth, demi-once.
Կշիռ, Maß, mesure, diviseur, facteur.
Կշռութիւն, Verhältniß, rapport, կամ raison
Կոտոր, (կոտորակ), Bruch, fraction.
Կոտորեալ թիւ, չափ. gebrochene Zahl, nombre rompu.
Կրկնել, duplicirt, doublé.

Հակառակ չափք, entgegengesetzte Größe, quantité opposée.

Համազգի, gleichartig, homogen, homogène.

Համարիչ, Zähler, numérateur.

Համարողական (կշռութիւն, եւ այլն), arithmetisch, arithmétique.

Համարողութիւն, Arithmetik, Rechenkunst, arithmétique.

Համեմատական թիւ, Proportionalzahl, nombre proportionnel.

Համեմատութիւն, Proportion, proportion.

Համօրէն, gemeinschaftlich, commun.

Հանելի թիւ, (փոքր թիւ) Subtrahendus.

Հանումն, Subtraktion, soustraction.

Հասարակաց օրինակաւ, allgemein, en général.

Հաստատական, (դրական) positiv, bejahend, positif.

Հաստատուն (արմատ), rational, rationnel.

Հաւասար, gleich, égal.

Հաւասարասրուն, gleichschenklig, isocèle.

Հաւասարութիւն, Gleichung, équation.

Հաւասարութիւն առաջնոյ աստիճանի, Gleichung des ersten Grades, équation du premier degré.

Հաւասարութիւն երկրորդ աստիճանի, Gleichung des zweiten Grades, կամ quadratische Gleichung, équation du second degré.

Հաւասարութիւն խառն երկրորդ աստիճանի, unreine quadratische Gleichung, équation mixte կամ complètte du second degré.

Հաւասարութիւն պարզ երկրորդ աստիճանի, reine quadratische Gleichung, équation pure du second degré.

Հաւասարութիւն զուգութեան, Identitäts-Gleichung, équation d'identité.

Հնգանկիւնի թիւ, Pentagonalzahl, nombre pentagone.

Ձող, Klafter, brasse, toise.

Ղոգարիթմական, logarithmisch, logarithmique.

Ղոգարիթմոս, Logarithmus, logarithme.

Մասնաւոր (արդիւնք, կոտոր, եւ այլն), partial, partiel.

Մասնաւոր կոտոր, Partialbruch, fraction partielle.

Մատն, Zoll, pouce.

Մար, Eimer, seau.

Միանման, Monome, monôme.

Միլիոն, Million, million.

Միութիւն, Einheit, unité.

Միջնորդ համարողութեան, arithmetische Mittel, moyen arithmétique.

Միւսանգամ բազմացուցեալ, submultiplicirt, sous-multiplié.

Միւսանգամ երեքկնեալ, subtriplicirt, sous-triplé.

Միւսանգամ կրկնեալ, subduplicirt, sous-doublé.

Մեծ կամ մեծագոյն համօրէն կշիռ, größte gemeinschaftliche Theiler, le plus grand diviseur commun.

Մեքենական գիտութիւն, Mechanik, mécanique.

Միջին համեմատական, mittlere Proportionalzahl, moyenne proportionnelle.

Մղոն, Meile, mille.

Մնացորդ, Rest, reste, résidu (ի բաժանման)։

Մտացածին, imaginär, imaginaire.

Յայտնիչ, Charakteristik, caractéristique.
Յանդիմանիչ, Zeiger, index.
Յաջորդ (ի կշռութեան), Hinterglied, Consequent, conséquent.
Յառաջաւորութիւն (յառաջատուութիւն), Progression, progression.
Յաւելլի, Summand, Post, partie.
Յաւելուած, Mantissa, mantisse.
Յաւելումն, Addition, addition.
Յեռեալ կանոն, Kettenregel, règle conjointe.
Յեռեալ կոտոր, Kettenbruch, fraction continue.
Յօդուածոյ, zusammengesetzt, composé, complexe.
Յօդուածոյ համեմատութիւն, zusammengesetzte Proportion, proportion composée.

Նախաւոր թիւ, Primzahl, nombre premier կամ nombre simple
Նաբարակիտ Գերմանացւոց, Kreuzer, creutzer.
Նաբարակիտ Տաճկաց, փարա.
Ներքին (անդամ համեմատութեան), innere կամ mittlere, moyen.
Նշան, Zeichen, signe.
Նշանագիր, Buchstab, lettre.
Նշանագրովք համարողութիւն, Algebra, algèbre.
Նուազ, Minus, moins.
Նուազելի թիւ, (մեծ թիւ), Minuend.
Նուազօղ, steigend, décroissant.

Շրջան, Periode, période.
Շրջեալ զօրութիւն, reducirter Werth, valeur réduite.
Շրջմանց յեռեալ կոտոր, periodischer Kettenbruch, fraction continue périodique.
Շրջմանց տասներորդական կոտոր, periodischer Decimalbruch, fraction décimale infinie կամ périodique.

Ողջոյն թիւ, (ամբողջական թիւ) ganze Zahl, nombre entier.
Ողջութեան հաշիւ, Integralrechnung, calcul intégral.
Ոտն, Schuh, pied.
Ուղիղ, gerade, կամ direkt, direct.
Ունկի, Unze, once.
Ուսողութիւն, Mathematik, mathématiques.
Ուրացական (բացասական) negativ, négatif.

Չափ (քանակութիւն), Größe, Quantität, quantité.
Չհաւասար, ungleich, inégal.
Չորեքին, Quaternen, quaterne.
Չորեքկուսի, viereckig, quadrangulaire, 2. Quadrat, carré.
Չորեքկուսի արմատ, Quadratwurzel, racine carrée.
Չորրորդ, Viertel, quart.
Չորրորդ արմատ, vierte Wurzel, racine quatrième.
Չորրորդ կարողութիւն, vierte Potenz, quatrième puissance, կամ carré-carré, կամ bi-carré.

Պարզ, einfach, simple, 2. (ուսողութիւն) reine Mathematik, mathématiques pures.

Սահմանաց հաշիւ, Fluxionsrechnung, méthode des fluxions.
Սուր ստիքս, (ստորակէտ), Strich, virgule.
Ստիքս (կէտ), Punkt, point.

Վայրկեան, Minute, minute.

Տաղանդ, Thaler, ecu.
Տասնորդական կոտոր, Decimalbruch, fraction décimale.
Տասնորդական տեղիք, Decimalstelle, décimales.
Տասնկարգեան կարգ, dekadisches Sistem, rang décimal.

Ցնորական, imaginär, imaginaire.

Ցուցիչ, Exponent, Zeiger, exposant.

Փիւսիկեան փիլիսոփայութիւն, Phisik, physique.
Փոխանակելն, Substitution, substitution

Քանորդ, (քանորդ) Quotient, quotient.
Քանիօնութիւն, տես Չափ.
Քանքար, Zentner, quintal.

Օտարազգի, ungleichartig, hétérogène.

ՎՐԻՊԵԱԼՔՆ Ի ԴՐՈՇՄԵԼ ՄԱՏԵՆԻՍ

ԷՋ	ՏՈՂ	ՓՈԽԱՆԱԿ	ԸՆԹԵՐՑԻՐ
34	30	*զերրորդ Թիւ*	*զերկրորդ Թիւ*
51	29	$8<6$ (յօմանս)	$8<5$
59	31	*բազմացուցանեաւ*	*բազմացուցանելեաւ*
63	24	(բն) (յօմանս)	(բ:ն)
143	4	13/9	31/8
165	20	*Հակառակ 62 Համարոյ*	*Հակառակ 84 Համարոյ*
251	6	$=1\div\sqrt[ն]{\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}}$	$=1\div\sqrt[ն]{\frac{\text{Բ}}{\text{Ա}}}$
274	25	75^0 : 20,595	75^0 : 20,5995
318	11	$+=\frac{\text{Պ}}{\text{Ռ}}$	$+=\frac{\text{Ռ}}{\text{Պ}}$
399	9	*զոր առնելոյն էր*	*զոր առնլոյն էր*
451	27	*Բովանդակելի*. Sum- mand Post. partie	*Բովանդակելի*. endlich, final

Ի ՎԻԵՆՆԱ

Ի ՎԱՆՍ Գ· Ս· ԱՍՏՈՒԱԾԱԾՆԻ

1843