10

ՆՐԵՒԲԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԵՒ ՀԱՏԱԾՔ ԿՈՆԻ

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ

ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆ

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ

ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆ

ԶՈՐ ՅՕՐԻՆԵԱԼ Է

Հ. ՂՈՒԿԱՍ ՏԷՐՏԷՐԵԱՆՑ

ՅԱՇԱԿԵՐՏԱՑ ՄԵԾԻ ՀՕՐՆ

ՄԽԻԹԱՐԱՅ

Գ ՏՈՄԱՐ

ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ ԵՒ ՀԱՏՈՒԱԾՔ ԿՈՆԻ

Ի ՎԻԷՆՆԱ

Ի ՎԱՆՍ Գ. Ս. ԱՍՏՈՒԱԾԱԾՆԻ

ՌՄՂԵ. 1846

ՅԱՌԱՋԱԲԱՆ

ՇԱՀՔ եւ օգուտք, զորս մաթեմատիկական ուսումն մատակարարէ հասարակաց կենաց, եւ մեծատարած տէրութիւնն՝ զոր կալեալ ունի նա ի բնական գիտութեան, եւ յայլ եւս գիտութիւնս մերձաւորս նորին, դարձեալ անհնարին զարգացումն, զոր մատուցանէ մարդկեղէն հանճարոյ, գրգիռ իմն լինին եւ եռանդն ածեն ուսումնականաց, որչափ հնար իցէ տածել զուսողութիւն, եւ սիրելի առնել զայն մանկանց, եւ մուծանել ի դպրոցս զուսումն նորին: Յայսմանէ վարեալ, կամեցաք մերովսանն աշխատ լինել առ հասանելոյ ի սոյն, զոր իսկզբանէ իսկ եդաք կէտ նպատակի: Այս երրորդ տումար ուսողութեանս, որ եւ է վերջին, ունի զերեքանկիւնաչափութիւն, եւ ընդճառս հատածոյն կոնի, որք կարեւորք են առ կատարեալ ուսումն ուսողութեան, եւ են մասն նորին, եւ ոչ սակաւ նպաստաւոր առ ուսանելոյ զփիւսկեան ուսումն եւ զգործական երկրաչափութիւն: Ի սմին, (որպէս գոնեայ մեզ թուի) գտանիցեն ուսանելիք զամենայն օրէնս, եւ զհասարակաց օրինակս՝ որք ի սոյնպիսի մատեանս հարկ է թէ գտանիցին առ ուսուցանելոյ մանկանց ի դըպրոցս, որով եւ ունիցին ի ձեռս զբովանդակ ուսողութիւն անթերի եւ կատարեալ:

ԴԻՐ ԳԼԽՈՑ

ՀԱՏԱԾՔ ԿՈՆԻ

ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՏԵՂԵԿՈՒԹԻՒՆ

1. ՅԱՄԵՆԱՅՆ երեքանկիւնս վեց մասունք յանդիման լինին մեզ, այս ինքն երեք կողմանքն եւ երեք անկիւնք։ Ուսոյց մեզ երկրաչափութիւն, թէ հարթ երեքանկիւնն որոշի, յորժամ Ա) երկու կողմանքն եւ անկիւնն փակեալ ի նոցանէ, կամ անկիւնն յանդիմանակաց մեծագոյն կողման յայտնի իցեն. Բ) եթէ մի կողմն եւ երկու անկիւնքն, որ ի նմին կողման կայցեն ծանուցեալ իցեն, Գ) կամ թէ երկու անկիւնք, եւ կողմն յանդիմանակաց միում ի նոցանէ՝ առաջի դնիցին, եւ Դ) եթէ երեք կողմանքն եւս միանգամայն ծանուցին (Երկրաչ. Հ. 73. Ծանօթ.)։

Յայսմանէ առնումք ի միտ թէ վասն զհարթ ինչ երեքանկիւն որոշելոյ կամ գտանելոյ, հարկ է զի երեք մասունքն ծանուցեալ իցեն, յորոց միջի կայ գոնեայ մի կողմն։ Վասնզի եթէ երեք անկիւնքն միոյ երեքանկեան ծանուցեալ իցեն, անստատին մարթեմք զհամեմատութիւն կողմանցն որ առ միմեանս՝ գտանել, այլ ոչ զբուն երկայնութիւնս նոցա։

2. Գիտութիւնն՝ որ ուսուցանէ յերից մասանց ծանուցելոց, որք զերեքանկիւն ինչ սահմանիցեն, հաշուել զայլ եւս մնացեալ մասունս, անուանեալ կոչի Երեքանկիւնաչափութիւն (Նշան. համառ. Հ. 2.)։ Յորժամ զհարթ ուղղագիծ երեքանկեամբք գայցէ երեքանկիւնաչափութիւնն, կոչի Հարթ, իսկ եթէ զգնդականօքն պատաղիցի, այս է զայնպիսի երեքանկեամբք որոց կողմանքն յերից աղեղանց մեծագոյն բոլորակաց գնդոյ փակիցին, յորջորջի Գնդական։

Յորժամ համառօտիւք Երեքանկիւն միայն ասիցեմք, զհարթ երեքանկիւնս իմանամք։

3. Վասն դիւրագոյն եւ հեշտ զհաշիւսն գործելոյ, վարին ուղիղ գիծք ինչ, որք պատշաճին անկեանց իրիք երեքանկեան, համարեալ զնոսա, որպէս կենդրոնական անկիւնս բոլորակի իրիք. եւ այս գիծք հաշուեալ են մասամբք կէս երկակորոյ, որ ըստ նմանութեան աստիճանացն դնի հիմն չափելոյ. այնպէս զի յորժամ գիծքս թուովք յանդիման կացուցանիցին, զմեծութիւն կշռեալ անկեանցն, եւ խոտորնակի եւս, յայտ առնեն: Որովհետեւ բուն մեծութիւն այսոցիկ գծից կախին զմեծութենէ կենդրոնական անկեանցն, որ նոցին կշռիցին, որպէս յառաջ կայս մատենիս տեսանիցեմք, վասն այսորիկ անուանեալ կոչին Երեքանկիւնաչափական Պաշտօնաւորք անկեան, կամ եւս Պաշտօնաւորք բոլորակի:

4. Գիտութիւն այսոցիկ գծից յօրինեալ կազմէ զԱնկիւնաչափութիւն, որ է Ուսումն համեմատելոյ զանկիւնս եւ զնոցին կշռեալ աղեղունս բոլորակի ընդ ուղիղ գիծս ինչ, որ զնոցունց կախեալ իցեն, այս է ընդ երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորս, եւ ըզպաշտօնաւորսն զայնոսիկ ընդ միմեանս: Երեքանկիւնաչափութիւն յանձուկ միտս, պարապի միայն ի հաշուել զերեքանկիւնս, եւ դնէ համարի, թէ հաշուեալ իցեն երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորքն եւ թուովք յայտ արարեալ, եւ վարի իսկ նոքօք իբրեւ ծանուցելովք: Իբրեւ ի կիր արկանիցէ ոք զերեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորս ի հաշուել զբազմանկիւնս, եւ զհամօրէն սկզբունս եւ զօրէնսն ի մի յօդիցէ, կոչի այն Ուսումն Բազմանկիւնաչափութեան, ընդ որում անկանի Չորեքանկիւնաչափութիւն, որ է հաշուել զչորեքանկիւնս: Արդ գլխաւոր սկզբունք անկիւնաչափութեան, եւ յառաջադրութիւնք եւ խնդիրք երեքանկիւնաչափութեան եւ չորեքանկիւնաչափութեան ի մի միաբանեալ, հասարակաց անուամբ կոչին Երեքանկիւնաչափութիւն յընդարձակ միտս:

Եւ արդ՝ արասցուք սկիզբն, որչափ ինչ միանգամ տացէ մեզ թոյլ ընդարձակութիւն մատենիս, ճառել նախ զանկիւնաչափութենէ, ապա զերեքանկիւնաչափութենէ յանձուկ միտս. իսկ զչորեքանկիւնաչափութիւն, եւ զբազմանկիւնաչափութիւն թողցուք ի բաց, քանզի չեն ինչ կարեւոր, մանաւանդ զի զբազմանկիւնս, որպէս եւ զչորեքանկիւնս մարթ է անկիւնագծիւք բաժանել յերեքանկիւնս, եւ երեքանկիւնաչափական օրինօք զնոսին եւս հաշուել:

Ա Ն Կ Ի Ւ Ն Ա Չ Ա Փ Ո Ւ Թ Ի Ւ Ն

Գ Լ Ո Ւ Խ Ա

Հ Ա Տ Ա Ծ Ա

ՅԱՂԱԳՍ ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԳԱՇՏՕՆԱԻՈՐԱՑ ԱԹԱՆՁԻՑՆ

5. Իցէ անկիւն ինչ ԱԿԲ (Ձեւ 1.) որոյ ծանուցեալ իցէ մեծութիւնն $=$ ա : Ի Կ գագաթանէ ԱԿ $=$ Ճ որ զինչեւ իցէ ճառագայթիւ ձգեա բոլորակ մի, յայտ է թէ ԱԲ աղեղն է չափ այնր ա անկեան (Երկրաչ. Հ. 147. Ա.), կամ թէ աղ. ԱԲ $=$ ա : Իբրեւ ձգիցի երկակատուրն ԳԵ (որ ասի Մերձաւոր երկակատուր), ուղղորդ ի վերայ ԱՃ երկակատրոյ (որ ասի Գլխաւոր երկակատուր) բաժանիցի բոլորակն ի չորս չորրորդս, ուստի եւ ԱԳ $= 90^0 = \frac{Հ}{2}$ կամ թէ անկիւնն ԱԿԳ $= \frac{Հ}{2}$. Նմին իրի եւ աղ. ԲԳ է Բովանդակումն ԱԲ աղեղան, կամ թէ անկիւնն ԲԿԳ $=$ բ է բովանդակումն ա անկեան, այս ինքն ա $+$ բ $= 90^0 = \frac{Հ}{2}$. զորոյ զհետ գայ ա $= \frac{Հ}{2} -$ բ եւ բ $= \frac{Հ}{2} -$ ա : Կէտն Ա որ պատշաճի ԱԲ աղեղան, ասի Սկիզբն, իսկ Բ կատարած այնր աղեղան:

6. Յորժամ կատարած աղեղան իւրք կայցէ ի միում ի չորրորդաց բոլորակի, ասի եթէ նմին կըշռեալ անկիւնն եւս կայ ի նմին չորրորդում բոլորակի, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿԲ կայ յառաջինն, իսկ ԱԿԲ՛՛ յերկրորդումն, ԱԿԲ՛ յերրորդումն, եւ ԱԿՆ ի չորրորդն:

Ա. Յայսմանէ դիւրագոյն մարթես տեսանել թէ ամենայն անկիւն յառաջին չորրորդ բոլորակի, փոքրագոյն է քան զ 90°, իսկ որ միանգամ յերկրորդումն գտանիցի, կայ ի մէջ 90 եւ 180 աստիճանաց. իսկ որ յերրորդումն՝ գտանի ի մէջ 180 եւ 270 աստիճանաց, եւ ի կատարած, որ ի չորրորդն կայ, է ի մէջ 270 եւ 360 աստիճանաց: Վասն այսորիկ կարեմք ի թուոյ անտի աստիճանաց խելամուտ լինել, թէ յոր չորրորդ արդեւք բոլորակի գտանիցի անկիւն ինչ:

Բ. Յաւելլով ի միմեանս բազում անկիւնս, հնար է թէ ելանիցէ բովանդակութիւն ինչ անկեանց, որ մեծագոյն իցէ քան զ360°. յայնժամ մարթ է զմտաւ ածել, թէ ուղիղ ինչ գիծ, յետ անցանելոյ ընդ 360 աստիճանս, միւսանգամ յիւր առաջին ուղղութիւն դարձ արարեալ իցէ, եւ անտի դարձեալ սկսեալ իցէ հեռանալ: Այսու օրինակաւ մարթ է զմտաւ ածել անկիւն ինչ, որ բովանդակիցէ բազմիցս աստիճանս 360, որոյ հասարակաց օրինակ իցէ ն360 + ա, յորում ն զամենայն ողջոյն թիւս եւս եւ 0 ցուցանել կարէ, իսկ ա ցուցանէ զթիւ ինչ որ փոքր իցէ քան զ360: Արդ աղեղն որ սմին անկեան պատշաճիցի, յայնչափ ինչ ողջոյն շրջապատոյ կազմի, որչափ միանգամ 360 աստիճանս ունիցի անկիւնն, այս է ն շրջապատս, եւ զաղեղնն եւս, որ ա անկեան կշռիցի:

Ուղղութիւն երկոցունց սրունից անկեանն կայ մնայ առանց փոփոխելոյ, որչափ ինչ չփոփոխիցի ա, թէպէտեւ մեծ կամ փոքր իցէ ն, կամ թէ իցէ = 0, այնպէս զի, սրունք անկեանն, որք 360 աստիճանաւ կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպ իցեն, ամենեքին ի միմեանց վերայ անկանին. եւ կատարածք աղեղանցն՝ որ նոյին կշռիցին ի նմին վայրի կան: Արդ քանզի ամենայն պաշտօնաւորք անկիւնաչափութեան միոյ անկեան, որոշին միայն ի ձեւոն սրունից այնր անկեան, կամ կատարածի աղեղանն՝ որ նմին պատշաճիցի, զորին զհետ գայ, թէ անկիւնք՝ որ 360 աստիճանօք կամ թէ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց խորիցին, ունին ի հարկէ նոյն պաշտօնաւորս երեքանկիւնաչափականս: Վասն այսորիկ պարտ եւ պատշաճ է ի ճառս անկիւնաչափութեան միայն զանկիւնս քննել, որք ընդ 360 աստիճանաւ են, քանզի յառաջագրութիւնք որ զնոցանէ ասիցին, զօրեն եւ վասն մեծագոյն բազմապատիկ անկեանց:

7. Մարթ է զի ի պաշտօնաւորս երեքանկիւնաչափականս, որպէս տեսանելոց եմք, իցեն միմեանց հակառակ քանակութիւնք, զորս պարտ է ի հաշիւս այլեւայլ նշանօք դրոշմել: Նմին իրի պարտ եւ պատշաճ է յառաջագոյն ճշդիւ զտակաւ որոշեալ սահմանել, թէ յոր դիրս արդեւք պաշտօնաւոր ինչ հաստատական իցէ, յորմէ դիւրին իցէ զուրացականն ի մտաց իմանալ: Արդ դնեմք օրէնս իմն հասարակաց, թէ այն դիրք երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորաց է հաստատական, որ կշռիցի անկեան ինչ, զոր օրինակ յառաջին չորրորդումն բոլորակի, իսկ յորժամ ցուցանիցի, եթէ յայլ ինչ անկեան դիրք պաշտօնաւորի իւրք իցէ հակառակ առաջնոյն, յայնժամ պարտ է զայն առ ուրացականս ունել. զայս կանոն հարկ է ի հաշիւսն հանապազ առաջի աչաց ունել:

8. Եթէ ի Բ կատարածէ անտի ԱԲ աղեղան ձգիցես ուղղորդ գիծ ինչ ԲԴ ի վերայ ԱԿ կէս երկակորոյն, որ ընդ Ա սկիզբն այնր աղեղան անցանիցէ, ուղղորդ գիծն այն ԲԴ անուանեալ կոչի Ծոց ԱԲ աղեղան կամ ա անկեան, զոր համառօտիւք մարթ է զայս օրինակ նշանակել, ԲԴ = ծոց աղ. ԱԲ = ծոց ա: Իսկ խոտորնակի ԱԲ = ա = աղ. ծոց ԲԴ այս ինքն ԱԲ կամ ա է աղեղն կամ անկիւն, որ ծոց = ԲԴ է:

9. Եթէ յԱ ծայրէ ԱԿ կէս երկակորոյն ուղղիցես զուղղորդ գիծն ԱՀ, որ յերկայնութենէ անտի

այլոյ ԿԲ երկակորդ հատանիցի ի Շ, ԱՇ մասն անուանի Շօշափող ԱԲ աղեղան կամ ա անկեան, որ համառօտիւք կարճառօտս դրոշմի գայս ձեւ օրինակի, ԱՇ = շօշ · աղ · ԱԲ = շօշ · ա, որոյ խոտորնակն է ԱԲ = ա = աղ · շօշ · ԱՇ, այս է ԱԲ կամ ա է աղեղն կամ անկիւն, որոյ շօշափողն է = ԱՇ։

10. Երկայնեալ կէս երկակատուրն ԿԲ այս է ԿՇ, որ ընդհարկանիցի ԱՇ շօշափողին ի Շ վայրի, յորջորջի Հատանօղ ԱԲ աղեղան, եւ համառօտի այսպէս, ԿՇ = հատ · աղ · ԱԲ = ա · խոտորնակի եւս ԱԲ = ա = աղ · հատ · ԿՇ, այսինքն ԱԲ կամ ա է աղեղն կամ անկիւն, որ ունի իւր հատանօղ = ԿՇ։

11. ԱՊ մասնն ԱԿ կէս երկակորդ, որ կայ ի մէջ ԲՊ ծոցոյն եւ Ա սկզբան ԱԲ աղեղան, ասի Շրջեալ ծոց ԱԲ աղեղան կամ ա անկեան, եւ գրի ԱՊ = շծոց աղ · ԱԲ, իսկ խոտորնակի ԱԲ = ա = աղ · շծոց ԱՊ, այս ինքն ԱԲ կամ ա է աղեղն կամ անկիւն, որոյ շրջեալ ծոցն է ԱՊ։

Արդ ըստ այամ մեկնութեան ի բ անկիւնն բովանդակման է ա) ԲՄ = ԿՊ = ծոց աղ · ԲԴ = ծոց բ, բ) ԴԹ = շօշ · աղ · ԲԴ = շօշ · բ · գ) ԿԹ = հատ · աղ · ԲԴ = հատ · բ · դ) ԴՄ = շծոց աղ · ԲՄ = շծոց բ։

12. Պաշտօնաւորք բ անկեան բովանդակման անուանեալ կոչին Պաշտօնակիցք ա անկեան, եւ խոտորնակս եւս։ Ասն որոյ ծոցն, շօշափողն, եւ հատանօղն եւ շրջեալ ծոցն բ անկեան ասին Ծոցակից, Ի միասին շօշափող, Ի միասին հատանօղ, եւ Շրջեալ ծոցակից ա անկեան բովանդակման, որք գրոշմին օրինակ գայս

$$\text{ծոց } բ = \text{ծոցակ} \cdot ա = \text{ծոցակ} \cdot (90^0 - բ) = \text{ծոցակ} \cdot \left(\frac{շ}{2} - բ\right)$$

$$\text{շօշ} \cdot բ = \text{ի՛շօշ} \cdot ա = \text{ի՛շօշ} \cdot (90^0 - բ) = \text{ի՛շօշ} \cdot \left(\frac{շ}{2} - բ\right)$$

$$\text{հատ} \cdot բ = \text{ի՛հատ} \cdot ա = \text{ի՛հատ} \cdot (90^0 - բ) = \text{ի՛հատ} \cdot \left(\frac{շ}{2} - բ\right)$$

շծոց բ = շծոցակ. ա = շծոցակ. (90° — բ) =

շծոցակ. (Հ/2 — բ).

Նմին խոստորնակքն են ծոց ա = ծոցակ. բ =

ծոցակ. (90° — ա)

շօշ. ա = էմշօշ. բ = էմշօշ. (90° — ա)

Հատ. ա = էմՀատ. բ = էմՀատ. (90° — ա)

շծոց ա = շծոցակ. բ = շծոցակ. (90° — ա)։

Քանզի ի ԲՄԿԳ ուղղանկեան կողմն ԲՄ = ԿԳ եւ ԲԳ = ԿՄ, նմին իրի ԿԳ = ծոցակ'. ա եւ ԿՄ = ծոցակ. բ. վասն այսորիկ մարթ է զծոցակից միոյ անկեան այսպէս եւս սահմանել, թէ է մասն կէս երկակտրոյն որ գտանիցի ի մէջ ծոցոյ եւ կենդրոնի։

Եթէ անկիւնն ա > 90° իցէ, յայնժամ ի հարկէ իսկ իցէ բ բովանդակումն ուրացական, զոր օրինակ է — ԲԿԴ բովանդակումն ԱԿԲ բութ անկեան։

13. Ընտասին ի ձեւոյ անտի յայտնապէս երեւի, թէ գիծքն ԱՇ, ԲԳ, ԿԳ եւ ԿՇ ի հարկէ իսկ փոփոխիցին, յորժամ փոփոխիցի անկիւնն ա, վասն որոյ եւ անուանեալ կոչին եւս Պաշտօնաւորք ա անկեան։ Բայց քանզի յիւրաքանչիւր փոփոխմունս անկեանն կամ ԱԲ աղեղան, փոփոխի եւ անկ. բ կամ աղ. ԲԴ, որով եւ գիծքն ԲՄ, ԿՄ, ԴՌ եւ ԿՌ, վասն այսորիկ յիրաւի իսկ կոչին յետին գիծքն Պաշտօնակիցք ա անկեան կամ ԱԲ աղեղան։

Ա. ԾՈՑ

14. Եթէ ԱԲ աղեղն (Ձեւ 2.) յԱ վայրէ անտի արարեալ սկիզբն ի Դ կոյս մի ըստ միոջէ աճիցէ, յայտ է թէ յԱ վայրի ի գլխովին 0 է աղեղնն այն. անդ ի միմեանց վերայ անկանին կէս երկակտուրքն ԱԿ եւ ԲԿ, կամ թէ կէտքն Ա եւ Բ, այս ինքն անկ. ա = 0։ Ապա ուրեմն ծոց 0° = 0, քանզի յայս դէպս ուղղորդ գիծն ԲԳ եւ Ա կէտն ի նմին վայրի ի միմեանց վերայ անկանին, վասն որոյ եւ կորնչին իսկ սատէն աղեղնն եւ ծոցն միանգամայն։

15. Ապա եթէ կէտն Բ այնչափ ինչ շարժիցի ի վերոյ քան զանփոփոխական կէտն Ա, որպէս զի աղեղն ընդ որ անցեալ իցէ, իցէ փոքր անհնարին, յայնժամ կարի իմն փոքր իցէ եւ ծոյն այնր աղեղան, եւ փոքր եւս իցէ այլակերպութիւն երկոցունց քանիօնութեանցս քան զամենայն մեծութիւն, զոր հնար իցէ մարդոյ ածել զմտաւ, այս ինքն իցէ այլակերպութիւնն զոր օրինակ Աբ — բթ = 0, կամ յայս դէպս ծոյն հաւասար իցէ իւրոյ աղեղան: Արդ եթէ զփոքր աղեղն զայն Աբ նշանակիցեմք դա քանիօնութեամբ, եւ զծոյն ըԲ որ նմին պատշաճիցի դնիցեմք դծ, յայնժամ ըստ առացելոյս դծ = ծոյ դա = դա, յորում դ չցուցանէ առնելի ինչ, այլ է նշան անհնարին փոքրիկն լինելոյն:

Վասնզի յիւրաքանչիւր ԱԿԲ անկեան, որ յառաջնում չորրորդի բոլորակին գտանիցի, ծոյն ԲԳ է մին յիջից ԲԳԿ ուղղանկիւն երեքանկեան, նմին իրի ԲԳ $<$ ԲԿ կամ ծոյ ԱԿԲ $<$ ճ. այս ինքն Ամենայն ծոցք անկեանցն՝ որ յառաջնում չորրորդի գտանիցին, փոքրագոյն են քան զկէս երկակատուր: Եթէ ԱԿԲ եւ ԱԿԲ′ չհաւասար անկիւնք իցեն յառաջնում չորրորդի, եւ անկ. ԱԿԲ′ $>$ անկ. ԱԿԲ, յայնժամ հարկ է զի իցէ ԿԳ′ $<$ ԿԳ: Իսկ արդ յուղղանկիւն երեքանկիւնսն ԲԳԿ եւ Բ′Գ′Կ, Բ′Գ′ $= \sqrt{(\overline{\text{Բ′Կ}}^2 - \overline{\text{ԿԳ′}}^2)}$ եւ ԲԳ $= \sqrt{(\overline{\text{ԲԿ}}^2 - \overline{\text{ԿԳ}}^2)} = \sqrt{(\overline{\text{Բ′Կ}}^2 - \overline{\text{ԿԳ}}^2)}$, ուստի եւ Բ′Գ′ $>$ ԲԳ. կամ ծոյ ԱԿԲ′ $>$ ծոյ ԱԿԲ, այս ինքն Յառաջին չորրորդն բոլորակի, մեծագոյն անկեան պատշաճի եւ մեծագոյն ծոց, եւ խոտորնակի եւս:

Ի կատարած յորժամ յառաջ խաղայցէ կէտն Բ մինչեւ ի Դ, այս ինքն իցէ աղ. ԱԲ = աղ. ԱԴ $= 90^0 = \frac{\text{Հ}}{2}$, յայնժամ ուղղորդ գիծն ԲԳ եկեալ հասանիցէ ի ԿԴ գիծս, եւ իցէ հաւասար ճ կէս երկակորդյ։ Ապա ուրեմն ծոց 90° = ծոց $\frac{\text{շ}}{2}$ = ճ։ Յայս դէպս ծոցն կոչի Ծոց ամբողջ։

16. Եթէ լինիցի ԱԲ աղեղնն մեծագոյն քան զ90°, զոր օրինակ կարգ ըստ կարգէ եկեալ հասանիցէ ի կէտսն Ե, Ե′, Ե″, յայնժամ սկսանին մի ըստ միոջէ հակառակ կարգաւ նուազել ծոցք յերկրորդում չորրորդի անդ բոլորակին, եւ յորժամ կէտն Բ մինչեւ ի Ճ հասանիցէ, այս է լինիցի աղեղն այն = 180° = շ, յայնժամ կորնչիցի եւ ծոցն ի գլխովին, ուստի եւ իցէ ծոց 180° = ծոց շ = 0։

Եթէ աղ. ԵՃ = աղ. ԱԲ (Ձեւ 1.) կամ անկ. ԵԿՃ = անկ. ԱԿԲ = ա իցէ, յայնժամ աղ. ԱԵ = աղ. ԱՃ — աղ. ԵՃ = 180° — ա = շ — ա։ Իսկ արդ Եպ է ծոց ԱԵ = ծոց (շ — ա), եւ Եպ = ծոց ԵՃ = ծոց ԱԵ = ծոց ա, ուրեմն է եւս ծոց (շ — ա) = ծոց ա, այս ինքն Անկիւնք լրման ունին ծոցս հաւասար։

Յասացելոցս զհետ գայ, թէ ծոցքն յերկրորդում չորրորդի բոլորակին փոքրագոյն են քան զկէս երկակտուր բոլորակին։ Եւ դարձեալ թէ՝ որչափ մեծագոյն իցէ անկիւնն յերկրորդում չորրորդի բոլորակին, այնչափ փոքրագոյն է ծոցն, որ նմին պատշաճիցի։

17. Եթէ իցէ աղ. ԱԲ > 180° (Ձեւ 3.), կամ թէ յառաջ խաղացցէ կէտն Բ ի վերոյ քան զՃ, յայնժամ ծոցքն դարձեալ սկիզբն առնեն, կարգաւ աճելոյ եւ մեծանալոյ առաւել քան զկէս երկակտուր։ Բայց սակայն որովհետեւ ծոցքն յերրորդում չորրորդի ունին ամենեւին դիրս հակառակ ծոցոյ առաջնոց երկուց չորրորդաց, վասն այսորիկ առաջին երկու ծոցքն նշանակին +, իսկ երրորդն — նշանաւ։

Որովհետեւ աղ. ՃԲ = աղ. ԱԲ″ = Բ′Ճ = ա. եւ դարձեալ զի ΔԲԿՊ ≅ Բ′ԿՊ ≅ Բ″Կպ, զորին զհետ գայ ԲՊ = — Բ′Պ = — Բ″պ, այս ինքն

ծոց ԱՃԲ = — ծոց ԱԲ′ = — ծոց ԱԲ″, կամ
ծոց (շ + ա) = ծոց (շ — ա) = — ծոց ա (Հ. 16.)
այս ինքն Բարձրացեալ անկիւնն ԱԿԲ ունի ընդ ԱԿԲ″ եւ ընդ ԱԿԲ′ զնոյն ծոց, այլ միմեանց հակառակ:

Եթէ եւս յառաջ շարժիցի աղեղն մինչեւ ցԴ, եւ իցէ ԱԲ′ԲԴ = $\frac{3շ}{2}$ = 270°, յայնժամ կէս երկակրատուրն գտանի յուրացական դիրս, ուստի եւ ծոց 270° = ծոց $\frac{3շ}{2}$ = ԿԴ = — ճ.

18. Յորժամ ԱԲ աղեղն կայցէ ի սահմանս չորրորդ չորրորդի բոլորակին (Ձեւ 4.), յայնժամ որովհետեւ զնոյն հակառակ դիրս պահեն ծոցքն, զոր յերրորդումն ունէին, վասն այսորիկ ուրացականք են, եւ սկսանին նուազել կարգաւ, մինչեւ ի կէտն Ա կորնչել ամենեւին ԲՊ ծոցոյն, ուստի եւ ծոց 360° = ծոց 2շ = 0, կամ ճշդիւ խօսելով ծոց 2շ = 0: Ասացելոցս զհետ գայ եթէ ծոց ա = — (360 — ա) յորում ա կարէ զամենայն անկիւնս ցուցանել, որ < 90° իցեն. եւ դարձեալ թէ յայսմ չորրորդի ծոցք փոքրագոյն են քան զկէս երկակտուր:

Քանզի ԲՊ = ծոց ԱԲ″Բ = ծոց (2շ — ԱԲ), եւ ԲՊ = ծոց ԱԲ, ուրեմն ծոց (2շ — ԱԲ) = ծոց ԱԲ, այս ինքն Աղեղունք կամ անկիւնք որք յ360° կատարեն զմիմեանս, ունին զնոյն ծոցս:

Եթէ իցէ աղ. ԱԲ′ = աղ. Բ″Ճ = աղ. ՃԲ‴ = ԱԲ. ի պատշաճական լինելոյ միմեանց ԲԿՊ, Բ″Կպ, Բ″ԿՊ եւ ԲԿՊ երեքանկեանց, ծագէ թէ ԲՊ = Բ‴պ = — Բ″պ = — Բ′Պ, կամ
ծոց (2շ — ա) = ծոց (շ + ա) = — ծոց (շ — ա) = ծոց ա:

19. Մինչեւ ցայս վայր ասացեալքս յայտ առնեն, թէ իւրաքանչիւր աղեղն կամ անկիւն ունի մի միայն ծոց. բայց սակայն միոյ ծոցոյ պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք: Քանզի եթէ ծոց մի ի հաստատական դիրս գտանիցի, պատշաճին նմա եր-

կու անկիւնք, որք կան յառաջին եւ յերկրորդ չորրորդս բոլորակին, եւ միահամուռ առնեն 180°. արդ եթէ տացեալ ծոյն յուրացական դիրս գտանիցի այս ինքն յերրորդ կամ ի չորրորդ չորրորդս բոլորակին, եւ իցեն եւս $180^0 + ա$ կամ $360^0 - ա$, յորում ա զայն անկիւն ցուցանէ որ իցէ յառաջին չորրորդի, յայնժամ ունիցին զնոյն ծոց, այլ ուրացական: Պարձեալ ամենայն անկիւնք, որք 360 աստիճանաւ կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց խտրիցին, ունին զնոյն ծոցս, եւ այս յայտ է ի 6 Բ համարոյ:

Զատացելոցս զհետ գայ, թէ ծոցքն հաստատական են ի 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14 որդ... չորրորդս, եւ ուրացական են յ3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16 որդ... չորրորդս, կամ եթէ կէս շրջապատն շ նշանագրով ցուցանիցի, եւ ա ցուցանիցէ սուր ինչ անկիւն, եւ՝ Ն թիւ ինչ հաստատական, յայնժամ

$$+\text{ծոց}\,ա = \text{ծոց}\,(շ - ա) = \text{ծոց}\,(3շ - ա) = \text{ծոց}\,(5շ - ա) = \cdots = \text{ծոց}\,[(2Ն + 1)շ - ա] = \text{ծոց}\,(2շ + ա) = \text{ծոց}\,(4շ + ա) = \text{ծոց}\,(6շ + ա) = \cdots = \text{ծոց}\,(2Նշ + ա).$$

$$-\text{ծոց}\,ա = \text{ծոց}\,(շ + ա) = \text{ծոց}\,(3շ + ա) = \text{ծոց}\,(5շ + ա) = \cdots = \text{ծոց}\,[(2Ն + 1)շ + ա] = \text{ծոց}\,(2շ - ա) = \text{ծոց}\,(4շ - ա) = \text{ծոց}\,(6շ - ա) = \cdots = \text{ծոց}\,(2Նշ - ա):$$

Այս ուրեմն իւրաքանչիւր հաստատական կամ ուրացական ծոցոյ պատշաճին անթիւ անկիւնք կամ աղեղունք:

20. Ուրացական ինչ անկիւն ունի իւր ծոց հաւասար ծոցոյ հաստատական ինչ անկեան, որ իցէ հաւասար ուրացական անկեան. այլ երկոքին ծոցքն միմեանց հակառակ են:

Դնիցուք գրեսցուք, եթէ (Ձեւ 1.) աղ. ԱԲ = + ա իցէ. յայնժամ, եթէ աղ. ԱՆ = աղ. ԱԲ, իցէ աղ. ԱՆ = — ա, քանզի ուղղութիւնն յԱ վայրէ առ-ն ամենեւին հակառակ է ԱԲ ուղղութեան: Յորժամ ի ձեւ անդր մանր միտ դնիցեմք, տեսանիցեմք թէ սրունք ուրացական ա անկեանն նոյն է ընդ սրունից 360 — ա անկեան, վասն որոյ ծոց (— ա) = ծոց (360^0 — ա): Իսկ արդ (Հ. 19.) — ծոց ա = ծոց (2շ — ա) = ծոց (360^0 — ա). ուրեմն ծոց (— ա) = — ծոց ա: Այս ցուցումն զօրէ վասն ամենայն չորրորդաց, յորս ա անկիւնն գտանել կարիցէ:

21. Հաւասարութիւնքն ծոց ա = — ծոց (180 + ա) եւ ծոց ա = — ծոց (180 — ա), որք ծագեն ի հաւասարութեանց անտի ի վերագոյն եդելոց, զօրեն եւս, եթէ ա ցուցանիցէ անկիւն ինչ > 90^0: Այս ինքն, եթէ անկիւնն ա կայցէ յերկրորդում չորրորդի, փոխանակ ա անկեան, պարտ է 180 — ա դնել: Յայնժամ իցէ ծոց (180 — ա) = ծոց ա, դարձեալ եւ ծոց (180 + 180 — ա) = ծոց (360 — ա) = — ծոց ա, եւ ծոց (360 — 180 + ա) = ծոց (180 + ա) = — ծոց ա. որով եւ ծոց (180 — ա) = — ծոց (180 + 180 — ա), եւ ծոց (180 — ա) = — ծոց (360 — 180 + ա): Եթէ յերրորդ կամ ի չորրորդ չորրորդս կայցէ անկիւնն, պարտ է փոխանակ այնր ա անկեան դնել 180 + ա. յորմէ ելանիցեն ծոց (180 + ա) = — ծոց ա, ծոց (180 + 180 + ա) = ծոց (360 + ա) = ծոց ա, եւ ծոց (360 — 180 — ա) = ծոց (180 — ա) = ծոց ա: Որով եւ ծոց (180 + ա) = — ծոց (180 + 180 + ա), եւ ծոց (180 + ա) = — ծոց (360 — 180 — ա):

22. Ծոցն ուղիղ անկեան կամ 90^0 աղեղան է հաւասար կէս երկակորոյ (Հ. 15.) եւ անուանի Ծոց ամբողջ, քանզի է մեծագոյն քան զամենայն ծոցս: Վասն այսորիկ մարթ է գծոցս ամենայն անկեանց, որք ոչ = 90^0 կամ = 180^0, կամ = 270^0 իցեն, համեմատել ընդ ամբողջ ծոցոյ, եւ զնոսին մասամբք նորին յայտ առնել: Արդ յորժամ զկէս երկակորոյն կամ զծոցն ամբողջ մի միութիւն դնիցեմք, եւ համարի-

ցինք թէ ի 10000000 հաւասար մասունս բաժանեալ իցէ, յայնժամ ամենայն ծոցք, որ ոչ իցեն հաւասար կէս երկակորդ, ի ձեռն բուն կոտորոց նշանակիցին կամ ճշդիւ եւ կամ օրինակաւ մերձաւորութեան, եւ կոտորոցն անուանիչ իցէ 10^7: Աղէ ած զմտաւ, թէ ԱԴ չորրորդն (Ձեւ 2.) ի վայրկեանս, այս է ի 5400 մասունս բաժանեալ իցէ, եւ ի կիտից անտի բաժանման ձգիցին ուղղորդ գիծք ի վերայ ԱԿ եւ ԿԴ ճառագայթից, յորոց յետինն կոտորիցի ի 10000000 մասունս հաւասարս. յայտ է թէ թիւքն որ կայցեն ի վայրս Ն, Տ, Տ', Տ''... ցուցանիցեն զհամարիչս կոտորոցն այնոցիկ, որք յայտն առնեն զզօրութիւնս ծոցոցն ի ձեռն կէս երկակորդ:

Զոր օրինակ, իցէ աղ. ՆԹ $= 60^{\circ}$. յայտ է թէ լա. ՆԹ = ԱԿ = ծ, եւ աղ. ԱՆ $= 30^{\circ}$, եւ ՆՌ = ծոց $30^{\circ} = \frac{1}{2}$ ծ $= \frac{15}{30}$ ծոց ամբ. կարի իմն ճշդիւ: Այնգունակ, եթէ Բ'Զ = լա. աղ. 120° իցէ, լինիցի ԱԲ' $= 60^{\circ}$, եւ լա. Բ'Զ = ծ$\sqrt{3}$, ուրեմն Բ'Պ' $= \frac{1}{2}$ծ$\sqrt{3}$ $= \frac{1}{2}$ ծ.0,8660254... (Երկր. Հ. 168. Բ.): Իսկ արդ Բ'Պ' = ծոց 60°, ուրեմն եւ ծոց 60° = ծ.0,8660254... = ծոց ամբ. 0,8660254... $= \frac{26}{30}$ օրինակաւ մերձաւորութեան:

Զայսորիկ զհետ գայ ծոց 30°:ծոց $60^{\circ} = \frac{15}{30}$ ծ: $\frac{26}{30}$ ծ $= 15:26$, այս ինքն ծոցք երկուց անկեանց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս թիւք կոտորոցն, որք զնշանակութիւնս նոցա ըստ միոյ կէս երկակորդ ցուցանիցեն:

Բ. ԾՈՑԱԿԻՑ

23. Քանզի ծոցակիցն է ծոց անկեան բոլանդակման, կամ յայտնագոյն եւս ուղղորդ գիծն որ ի կատարածէ անտի միոյ աղեղան անկանիցի ի վերայ մերձաւոր երկակորդ, վասն այնորիկ ըստ Հ. 7, այն ծոցակից է հաստատական, որ անկանիցի յայն կողմն

երկակտորոյն, յորում կայցեն եւ ծոցակիցք անկեանց առաջին չորրորդի. ամէն հակառակ՝ ծոցակիցք են ուրացական, յորժամ ի մեւս կողմն երկակտորոյն անկանիցին:

24. Զմտաւ ած եթէ չիցեն ի միմեանց հեռացեալ սրունք իրիք անկեան, այս ինքն եթէ կէս երկակտուրն ԲԿ (Ձեւ 2.) ի վերայ ԱԿ կէս երկակտոյ անկանիցի, որպէս զի լինել անկեանն կամ աղեղան = 0, եւ Բ եւ Պ կիտից կալ յԱ, յայնժամ լինիցի եւ ԿՊ = ԱԿ, այս ինքն ծոցակ. 0° = ճ:

25. Ապա եթէ կէտն Բ շարժիցի Աւ կարի իմն փոքրիկ աղեղամբ չափ, ծոցակից նորին իցէ = ԿԻ, որոյ անհնարին փոքր այլակերպութիւն է ի կէս երկակտոյ, այս ինքն փոքր քան զամենայն մեծութիւն, զոր հնար իցէ մեզ խորհել, կամ թէ կարեմք առանց մեծ ինչ վրիպման դնել ԱԿ — ԿԻ = 0, ուստի եւ ԿԻ = ԱԿ, այս ինքն ծոցակ. (փ ա) = ճ, եթէ աղ. ԱԻ = փա դիցի:

Իբրեւ աճիցեն մի ըստ միոջէ աղեղունքն, որպէս զի Բ կիտի կարգաւ գալ հասանել ի վայրս Բ′, Բ″, . . ., յայնժամ լինիցի նոցա ծոցակից, Բ′Ճ′ = Պ′Կ, Բ″Ճ″ = Պ″Կ, . . .: Նաւ քանզի ՊԿ = ԲՃ է եւ ծոց ԴԿԲ անկեան որ ընդ ԱԿԲ բովանդակի յ90°, վասն այսորիկ ծոցակ. ԱԿԲ = ծոցակ. ա = ծոց (90 — ա): Զորոյ զհետ գայ, թէ ամենայն ծոցակիցք յառաջնում չորրորդի բոլորակին փոքրագոյն են քան զկէս երկակտուր, եւ դարձեալ թէ մեծագոյն անկեան պատշաճի փոքրագոյն ծոցակից, քանզի 90 — ա, որով եւ ծոց (90 — ա) այնչափ փոքր է, որչափ մեծ լինիցի ա: Որով յայտ է, թէ մի ըստ միոջէ փոքրկանան ծոցակիցք յառաջնում չորրորդի, որպէս զի ծոցակ. 90° = ծոցակ. $\frac{\text{Շ}}{2}$ = 0 լինել:

26. Նաթէ լինիցի աղեղնն մեծագոյն քան զ90°, յայնժամ սկսանին տակաւ աճել ծոցակիցքն, որպէս զի ի գալ հասանել Բ կիտի ի վայրս Է, Է′, Է″ . . ., մինչեւ

ի ճ, ուր լինիցի աղեղնն $= 180^0 =$ շ, լինիցի ծոցակիցն հաւասար կէս երկակտրոյն: Զայսորիկ զհետ գայ, թէ ծոցակիցք երկրորդ չորրորդի բոլորակին փոքրագոյն են քան զկէս երկակտուր: Եւ քանզի այս ծոցակիցք երկրորդ չորրորդի ունին ամենեւին հակառակ դիրս առաջին ծոցակցաց, վասն այսորիկ եթէ առաջինքն հաստատականք կոչիցին, հարկ իցէ զերկրորդս ուրացականս անուանել: Վասն որոյ ծոցակ· $180^0 =$ ծոցակ· շ $= -$ ճ: Իսկ վասն այլ ինչ անկեան որ $> 90^0$ եւ $< 180^0$ իցէ, ծոցակիցն՝ է եւ ծոցակից նմին կից ա անկեան, որ լրացուցանիցէ զայն յ180^0, որ եւ գտանի եւս յառաջնում չորրորդի. նմին իրի նոյն ծոցակից է նոցա, այլ միմեանց հակառակ, ուստի եւ ծոցակ· ա $= -$ ծոցակ· $(180 -$ ա$)$:

Զասացելոյս զհետ գայ, թէ յերկրորդում չորրորդի մեծագոյն անկեան պատշաճի եւ մեծագոյն ծոցակից. եւ խոտորնակի եւս:

27. Եթէ $> 180^0$ լինիցի աղեղնն, զոր օրինակ $180^0 +$ ճԲ (Ձեւ 3.), յայնժամ փոքրկանան նմի ըստ միջէ ծոցակիցքն, մինչեւ կորնչել ընաւ, ի շարժել Բ կէտի մինչեւ ցԴ, կամ թէ աղեղանն լինել $= 270^0 = \frac{3շ}{2}$. նմին իրի ծոցակ· $\frac{3շ}{2} = 0$: Եւ քանզի յայս չորրորդս եւս ծոցակիցքն զնոյն դիրս զոր ունէին յերկրորդումն, անփոփոխ պահեն, նմին իրի են ուրացական:

Զայսոցիկ զհետ գայ, թէ ծոցակ· ա $= -$ ծոցակ· $(180 +$ ա$)$. եւ դարձեալ թէ մեծագոյն անկեան որ յերրորդ չորրորդի՝ պատշաճի փոքրագոյն ծոցակից, եւ խոտորնակի. եւ թէ յայս չորրորդս եւս ծոցակիցք են փոքրագոյն քան զկէս երկակտուր:

28. Եթէ աճիցէ ԱԲ աղեղն (Ձեւ 4.) առաւել քան զերիս չորրորդս, յայնժամ սկսանին մեծանալ ծոցակիցքն, մինչեւ Բ կէտն գայցէ միւսանգամ յԱ, եւ ծոցակիցն դարձեալ իցէ $=$ ԱԿ $=$ ա. ուստի եւ ծոցակ· $360^0 =$ ծոցակ· 2շ $=$ ճ: Եւ քանզի յայս չորրորդս ծոցակիցքն զնոյն դիրս ունին, զոր յառաջին չորրորդի անդ ունէին, վասն այնորիկ են հաստատական:

Յասացելոցս զհետ գայ, թէ ծոցակ. ա = ծոցակ. (360 — ա), յորում ա ցուցանէ անկիւն ինչ, որ $< 90^0$: Եւ դարձեալ թէ մեծագոյն անկեան այսր չորրորդի, պատշաճի եւ մեծագոյն ծոցակից, եւ խոտորնակս եւս. եւ թէ ծոցակիցքս փոքր են քան զկէս երկակտուր:

29. Յայս վայր տացեալքս ցուցանեն, թէ իւրաքանչիւր անկեան կամ աղեղան պատշաճի մի եւեթ ծոցակից, այլ իւրաքանչիւր ծոցակցի պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք, որք ի միմեանց յառաջ ածել կարեն: Քանզի եթէ հաստատական դիրս ունիցի ծոցակիցն, պատշաճին այնմ երկու անկիւնք, որք կան յառաջին եւ ի չորրորդ չորրորդս բոլորակին, եւ միահամուռ առնեն 360^0. ապա եթէ ուրացական իցեն դիրք ծոցակցին, յայնժամ նմին պատշաճեալ անկիւնքն կան յերկրորդ եւ յերրորդ չորրորդս բոլորակին, որք եւ են 180^0 — ա կամ 180^0 + ա, ուր ա ցուցանէ զնոյն անկիւն յառաջին չորրորդի անդ, այլ հաստատական: Դարձեալ թէ ամենայն անկիւնք, որք 360^0 կամ բազմապատկաւ 360 տարիճանաց ի միմեանց այլակերպ իցեն, ունիցին զնոյն ծոցակից, յայտ առնէ, Հ. 6: Վասն որոյ

Եթէ (Ձեւ 4.) աղ. ԱԲ = աղ. ԱԲ′ = աղ. Բ″Ճ = աղ. Բ‴Ճ = անկ. ա. յայնժամ ԿԴ = Կդ: Ուրեմն ԿԴ = ծոցակ. ա = ծոցակ. (2շ — ա), եւ ԿՃ = ծոցակ. (շ — ա) = ծոցակ. (շ + ա) = — ԿԴ. ըստ այսմ, ծոցակ. ա = ծոցակ. (2շ — ա) = — ծոցակ. (շ — ա) = — ծոցակ. (շ + ա), կամ համառօտիւք ծոցակ. ա = — ծոցակ. (շ ∓ ա) = ծոցակ. (2շ — ա), եւ հասարակաց իմն օրինակաւ

+ ծոցակ. ա = ծոցակ. (2շ ∓ ա) = ծոցակ. (4շ ∓ ա)

= Ն. = ծոցակ. (2^nշ ∓ ա) եւ

— ծոցակ. ա = ծոցակ. (շ ∓ ա) = ծոցակ. (3շ ∓ ա) = … = ծոցակ. [(2ն + 1) շ ∓ ա]. յորում ն ցուցանէ թիւ ինչ ողջոյն։

30. Ծոցակից միոյ ուրացական անկեան է հաւասար ծոցակցի նմին հաւասար հաստատական անկեան։

Քանզի սրունք ուրացական ա անկեան նոյն է ընդ սրունից 360 — ա անկեան. ուստի եւ ծոցակ. (— ա) = ծոցակ. (360 — ա) = ծոցակ. ա։

31. Հաւասարութիւնքն ծոցակ. ա = ծոցակ. (180^0 + ա) եւ ծոցակ. ա = ծոցակ. (360^0 — ա) զօրեն եւս, եթէ ա անկիւնն անցի > 90^0։ Այս ինքն եթէ անկիւնն իցէ յերկրորդում չորրորդի, յայնժամ պարտ է փոխանակ ա անկեան դնել 180 — ա եւ լինիցի ծոցակ. (180 — ա) = — ծոցակ. ա. դարձեալ ծոցակ. (180 + 180 — ա) = ծոցակ. (360 — ա) = ծոցակ. ա. եւ ծոցակ. (360 — 180 + ա) = ծոցակ. (180 + ա) = — ծոցակ. ա, որով եւ ծոցակ. (180 — ա) = — ծոցակ. (180 + 180 — ա), եւ ծոցակ. (180 — ա) = ծոցակ. (360 — 180 + ա)։ Ապա եթէ անկիւնն յերրորդ կամ ի չորրորդ չորրորդս բոլորակին գտանիցի, պարտ է փոխանակ ա անկեան դնել 180 + ա, եւ եղանիցէ ծոցակ. (180 + ա) = — ծոցակ. ա, ծոցակ. 180 + 180 + ա) = ծոցակ. (360 + ա) = ծոցակ. ա, եւ ծոցակ. (360 — 180 — ա) = ծոցակ. (180 + ա) = — ծոցակ. ա. որով եւ ծոցակ. (180 + ա) = — ծոցակ. (180 + 180 + ա), եւ ծոցակ. (180 + ա) = ծոցակ. (360 — 180 — ա)։

32. Եթէ (Ձեւ 1.) դնիցեմք անկ. ԲԿԴ = անկ. ԴԿԷ = Ա, յայնժամ ԲՊ = Էպ, այս ինքն ծոց

$$\left(\frac{\text{շ}}{2} - \text{Ա}\right) = \text{ծոց}\left(\frac{\text{շ}}{2} + \text{ա}\right) = \text{ծոցակ. Ա.}$$

եւ որովհետեւ Կպ = — ԿՊ, նմին իրի ծոցակ. $\left(\frac{\text{շ}}{2} + \text{ա}\right) =$

$$\text{ծոցակ.}\left(\frac{\text{շ}}{2} - \text{ա}\right) = -\,\text{ծոց ա}։$$

Գ. ՇՐՋԵԱԼ ԾՈՑ

33. Ըստ Հ. 7 յայնժամ եւեթ ուրացական լինել կարէ շրջեալ ծոցն, յորժամ ի միւս կողմն Ա կիտի, այս է արտաքոյ բոլորակին գտանիցի. իսկ արդ այս դիպել ոչ կարէ, քանզի ամենայն ծոցք կան ի ներքոյ բոլորակի. ապա ուրեմն չիք ուրացական շըրջեալ ծոց:

34. Եթէ իցէ աղեղնն կամ անկիւնն = 0, յայնժամ Ա է կատարած աղեղան, ընդ որ անցանէ ծոցն. վասն որոյ շծոց 0° = 0: Ապա եթէ այլակերպ իցէ ի 0 աստիճանէ աղեղնն կամ անկիւնն, որպիսի ինչ անկիւն ԱԿԲ (Ձեւ 1.), որ կայ յառաջին չորրորդի բոլորակին, շրջեալ ծոց նորա է ԱՊ մասն ԱԿ ճառագայթին, ուստի եւ փոքրագոյն քան զայն: Որչափ մեծագոյն լինիցի անկիւնն, այնչափ փոքրկանայցէ ՊԿ, վասն որոյ մեծանայցէ նմին պատշաճեալ շրջեալ ծոցն ԱՊ: Եթէ լինիցի աղեղնն ԱԿԲ = ա = 90° = շ/2, յայնժամ շծոց ա = շծոց 90° = շծոց շ/2 = ճ:

35. Եթէ աղեղնն ԱԲ > 90° իցէ, զոր օրինակ = ԱԲ′ (Ձեւ 3.), այս է կայցէ յերկրորդում չորրորդի բոլորակին, յայտ է թէ իցէ ԱՊ = շծոց ԱԲ′ > ճ, այլ սակայն փոքր քան զերկակաուրն ԱՃ: Մնացեալ ՊՃ մասն է շրջեալ ծոց ԲԿՃ անկեան, վասն որոյ շծոց ա + շծոց (180° — ա) = 2ճ: Որչափ ինչ մեծագոյն իցէ անկիւնն ա, այնչափ փոքր լինիցի 180 — ա. այնչափ եւս փոքր իցէ շրջեալ ծոցն 180° — ա անկեան: Ապա ուրեմն մեծագոյն անկեան յերկրորդում չորրորդի բոլորակին, պատշաճի եւ մեծագոյն շրջեալ ծոց, եւ խոտորնակս: Եթէ բացարձակութիւն սրունից անկեանն բովանդակ իցէ 180°, յայնժամ շծոց 180° = շծոց շ = 2ճ:

36. Եթէ լինիցի աղեղնն > 180°, որպիսի ինչ է անկ. ԱԿԲ (Ձեւ 3.), ԱՊ է շրջեալ ծոցն, որ մեծագոյն է քան զկէս երկակաուր, այլ փոքր քան զեր-

կակառուրն : Եւ քանզի է ՊՃ եւս շրջեալ ծոց ԲԿՃ անկեան, վասն այնորիկ ցծոց ա + ցծոց (180 + ա) = 2ճ: Որչափ ինչ մեծանայցէ 180 + ա յերրորդում չորրորդի, այնչափ առաւել մեծանայցէ ա, եւ ցծոց ա: Ապա ուրեմն մեծագոյն անկեան յերրորդում չորրորդի բոլորակին պատշաճի եւ փոքրագոյն շրջեալ ծոց: Որպէս զի ի լինել անկեանն յ270°, լինիցի ցծոց ա = ճ:

37 · Շրջեալ ծոցն ԱԿՆ բարձրացեալ անկեան, որ կայ ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին (Ձեւ 1 ·) է ՊԱ, մասն մի ԱԿ կէս երկակորդոյն, ուստի եւ փոքրագոյն քան զայն: Ուղիղ գիծն ՊԱ է եւ շրջեալ ծոց ԱԿՆ գոգաւոր անկեան. վասն որոյ ցծոց ա = ցծոց (360 — ա): Որչափ մեծագոյն լինիցի ա, այնչափ փոքրկանայցէ 360 — ա, եւ ցծոց (360 — ա): Մեծագոյն անկեան ի չորրորդում չորրորդի պատշաճի փոքրագոյն շրջեալ ծոց. եւ խոտորնակի եւս: Արդ ի լինել անկեանն = 360°, շրջեալ ծոց նորին է = 0:

38 · Զատացելոցս զհետ գայ, թէ իւրաքանչիւր աղեղան կամ անկեան պատշաճի մի եւեթ շրջեալ ծոց. բայց սակայն իւրաքանչիւր շրջեալ ծոցոյ պատշաճին երկու անկիւնք կամ աղեղունք, որք միահամուռ առնեն 360°. եւ կան կամ յառաջնում եւ ի չորրորդում չորրորդի, եւ կամ յերկրորդում եւ յերրորդումն ըստ փոքրագոյն կամ մեծագոյն լինելոյ շրջեալ ծոցոյն քան զկէս երկակուր: Յորս պարտ է յարել եւ զանկիւնս, որք 360 աստիճանօք, կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպք իցեն:

Նոյն օրինակաւ, որ ցուցաւ ի Հ · 21 եւ 31 · մարթ է դիւրաւ ցուցանել, թէ գոլով հաւասարութիւնս ցծոց ա + ցծոց (180 + ա) = 2ճ, եւ ցծոց ա = ցծոց (360 — ա) զօրեն եւս, եթէ ա > 90° դիցի:

Եթէ զմտաւ ածցի անկիւն ինչ ա յուրացական դիրս յայնժամ ցծոց (— ա) = ցծոց (360° — ա) · որով եւ ցծոց (— ա) = ցծոց ա:

Դ․ ՇՐՋԵԱԼ ԾՈՑԱԿԻՑ

39․ Ըստ Հ․ 7․ շրջեալ ծոցակիցն միոյ անկեան կամ աղեղան ուրացական իցէ, եթէ ի միւս կողմն Դ կիտի (Զեւ 1․) տարածոյ բոլորակին գտանիցի․ իսկ արդ այս եւ ոչ ի միում անկեան կամ աղեղան դիպել կարէ, ապա ուրեմն չիք շրջեալ ծոցակից ուրացական։

40․ Եթէ աղեղն կամ անկիւնն իցէ 0, յայնժամ ԱԿ է ծոցակից, եւ ԿԴ շրջեալ ծոցակից․ որով եւ շծոցակ․ $0^0 =$ ճ ։ Իսկ եթէ խարիցի ի 0 աստիճանէ աղեղնն կամ անկիւնն, զոր օրինակ ԱԿԲ, որ կայ յառաջնում չորրորդի բոլորակին, ԴՄ է շրջեալ ծոցակից նորին, որ եւ է շրջեալ ծոց ԴԿԲ անկեան։ Ապա ուրեմն շծոցակ․ ա = շծոց (90 — ա)։ Յայտորիկ զհետ գայ, թէ շրջեալ ծոցակից միոյ անկեան կամ աղեղան որ կայցէ յառաջնում չորրորդի փոքր է քան զկէս երկակատուր, եւ թէ մեծագոյն անկեան պատշաճի փոքր շրջեալ ծոցակից, եւ խոտորնակս։ Եթէ ուղիղ իցէ անկիւնն որպէս ԱԿԴ, յայնժամ կորնչի ԴՄ մասն այս է, շծոցակ․ $90^0 =$

շծոցակ․ $\frac{շ}{2} = 0$։

41․ Եթէ իցէ անկիւնն, զոր օրինակ ԱԿԳ յերկրորդում չորրորդի, յայնժամ Մ″Դ է շրջեալ ծոցակից նորին, որ եւ է եւս շրջեալ ծոցակից ՃԿԳ անկեան, նմին իրի շծոցակ․ ա = շծոցակ․ (180 — ա)․ զորոյ զհետ գայ, թէ եւ շրջեալ ծոցակիցն յերկրորդում չորրորդի փոքրագոյն է քան զկէս երկակատուր, եւ թէ մեծագոյն անկեան պատշաճի մեծագոյն շրջեալ ծոցակից։ Եթէ իցէ անկիւնն կամ աղեղնն 180^0, յայնժամ ԿԴ է շրջեալ ծոցակից, ուստի եւ շծոցակ․ $180^0 =$ շծոցակ․ շ = ճ ։

42․ Եթէ լինիցի անկիւնն $> 180^0$, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿԲ′, որ կայ յերրորդում չորրորդի, շրջեալ ծոցակիցն նորին է Մ′Դ, որով եւ մեծագոյն քան զկէս երկակտուր, այլ փոքր քան զերկակտուր։ Սասնն Մ′Ն է շրջեալ ծոցակից ՃԿԲ′ անկեան, ուստի եւ Մ′Ն + Մ′Գ = ԳՆ, կամ շծոցակ. ա + շծոցակ. (180 + ա) = 2ճ։ Որչափ մեծագոյն լինիցի անկիւնն 180 + ա, այնչափ առաւել մեծագոյն լինիցի ա, եւ այնչափ փոքրկանայցէ շծոցակ. ա, յորմէ յայտ լինի թէ մեծագոյն անկեան յերրորդում չորրորդի բոլորակի պատշաճի եւ մեծագոյն շրջեալ ծոցակից. եւ խոտորնակս եւս։ Ի լինել անկեանն = $270^0 = \frac{3շ}{2}$, լինիցի եւ շծոցակ. $270^0 = 2ճ$։

43. Եթէ ի չորրորդում չորրորդի անդ բոլորակին կայցէ անկիւնն կամ աղեղնն, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿԳ′, յայնժամ Մ‴Գ է շրջեալ ծոցակից նորին, որ մեծագոյն է քան զկէս երկակտուր, այլ փոքր քան զերկակտուրն։ ՆՄ‴ մասն երկակտրոյն է շրջեալ ծոցակից գոգաւոր ԱԿԳ′ անկեան. ուստի եւ շծոցակ. ա + շծոցակ. (360 — ա) = 2ճ. յորմէ մարթ է ի մտաց իսկ իմանալ, թէ ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին, մեծագոյն անկեան պատշաճի փոքր շրջեալ ծոցակից, որովհետեւ այնչափ փոքր լինիցի ա, եւ այնչափ մեծ շծոցակ. ա, որչափ միանգամ մեծագոյն լինիցի 360 — ա։

Դարձեալ որպէս վերագոյն, կարէ իւրաքանչիւր ոք դիւրաւ տեսանել, թէ հաւասարութիւնք շծոցակ. ա + շծոցակ. (180 + ա) = 2ճ. եւ շծոցակ. ա + շծոցակ. (360 — ա) = 2ճ, զօրեն եւս եթէ ա մեծագոյն եւս դիցի քան զ90^0։

44. Իւրաքանչիւր անկեան կամ աղեղան պատշաճի մի եւեթ շրջեալ ծոցակից. իսկ իւրաքանչիւր շրջեալ ծոցակի պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք։ Զանզի եթէ շրջեալ ծոցակին փոքրագոյն իցէ քան զկէս երկակտուր, յայնժամ պատշաճին նմա երկու անկիւնք, որք միանգամայն գումարեալ առնեն 180^0, եւ կան յառաջին եւ

յերկրորդ չորրորդս. իսկ եթէ մեծագոյն իցէ քան զկէս երկակտուր, յայնժամ նմին պատշաճեալ անկիւնքն կամ աղեղունք կան յերրորդ եւ ի չորրորդ չորրորդս, եւ առնեն միահամուռ 540°:

Ե. ՇՕՇԱՓՕՂ

45. Որովհետեւ շօշափող միոյ անկեան կամ աղեղան է մասն ուղղորդ գծին, որ կանգնիցի յԱ սկիզբն աղեղան. վասն այսորիկ մարթ է զի իցէ կամ ի մի կողմն եւ կամ ի միւս կողմն Ա կիտի (Ձեւ 5.): Ապա ուրեմն յորժամ անկանիցի շօշափողն յայն կողմն, յորում կայցէ շօշափող ինչ անկեան առաջին չորրորդի, է հաստատական. իսկ եթէ անկանիցի ի միւս կողմն Ա կիտի, է ուրացական:

46. Եթէ իցէ անկիւնն 0, յայտ է թէ Ա կէտն է կատարած աղեղան. եւ ԿԱ կէս երկակտուրն, որ անցանէ ընդ այն. վասն այնորիկ, շօշ. 0° = 0: Որչափ միանգամ մեծանայցէ անկիւնն յառաջին չորրորդի անդ, նոյնչափ մեծանայ եւ շօշափողն. քանզի ԱԲ, ԱՔ, ԱՔ′ աղեղանց կշռին շօշափողքն ԱՇ, ԱՇ′, ԱՇ″. որովհետեւ (Երկր. Հ. 69.) մեծագոյն հարկ է լինել կողմանն, որ յանդիմանակաց իցէ մեծագոյն անկեան: Եթէ լինիցի աղեղն ԱԲ = ԱԴ = 90°, յայնժամ շօշափողն ԱՇ լինի հաւասար հեռաւոր ի ԿՄ ուղղորդ գծէ, քանզի երկոքեանն եւս ուղղորդ կան ի վերայ ԱԿ գծին. որով եւ չկարեն զմիմեանս հատանել: Ապա ուրեմն շօշ. 90° = շօշ. $\frac{Հ}{2}$ = ∞, այս է ուղիղ անկեան չիք շօշափող:

47. Եթէ մեծագոյն իցէ աղեղն կամ անկիւնն քան զ90°, որպէս անկ. ԱԿԲ′, յայնժամ հարկ է զի Աշ անկանիցի ի միւս կողմն Ա կիտի, եթէ կամք իցեն զի երկայնութիւն կէս երկակտրոյն հատանիցէ զուղղորդ գիծն կանգնեալ յԱ: Ապա ուրեմն շօշափողք անկեանցն որ կան յերկրորդում չորրորդի են ուրացա-

կանք: Գիծն Աշ է եւս շօշափող ԱԿշ անկեան, որ միահամուռ ընդ ԱԿԲ՛ առնէ 180°: Ուրեմն երկուկից անկիւնք ունին հաւասար շօշափողս, այլ այս ինչ խտիր միայն է զի շօշափող բութ անկեանն է ուրացական: Ապա ի հաշիւս է շօշ. ա = — շօշ. (180 — ա), յորում ա նշանակել կարէ եւ անկիւն ինչ < 180°:

Եթէ իցէ աղեղնն կամ անկիւնն = 180°, յայնժամ ԿՃ է կէս երկակտուրն որ անցանէ ընդ Ճ. որոյ երկայնութիւն անցանէ ընդ Ա, ուրեմն շօշ. 180 = շօշ. 2շ = 0:

48. Ընդարձակեալ ԱԿԲ՛՛ անկեան, որ կայ յերրորդում չորրորդի, շօշափողն է ԱՇ կանգնեալ յայս կողմն Ա կիտի. վասն այսորիկ շօշափողք անկեանց երրորդ չորրորդի բոլորակին, են հաստատական: Գիծն ԱՇ է եւս շօշափող ԱԿԲ անկեան որ 180 աստիճանաւ չափ փոքր է քան զընդարձակեալ անկիւնն ԱԿԲ՛՛: Երկոքին անկիւնքն ունին զնոյն շօշափող, եւ երկոցունցն եւս է հաստատական. նմին իրի շօշ. ա = շօշ. (180° + ա): Որչափ մեծագոյն իցէ 180 + ա, նոյնչափ մեծագոյն լինիցի ա, եւ շօշ. ա: Ապա ուրեմն յերրորդում չորրորդի մեծագոյն անկեան կշուի եւ մեծագոյն շօշափող. եւ խոտորնակս:

Ի լինել անկեանն = 270°, շօշափողն լինի հաւասար հեռաւոր ի ԿԵ գծէ, նմին իրի անկիւնն = 270° = $\frac{3շ}{2}$ չունի շօշափող կամ թէ շօշ. 270° = շօշ. $\frac{3շ}{2}$ = ∞:

49. Եթէ աճիցէ դարձեալ աղեղնն առաւել քան զ270°, որպիսի ինչ ԱԿԲ՛՛՛, յայնժամ շօշափող նորին Աշ անկանի ի միւս կողմն Ա կիտի, ուստի եւ է ուրացական: Գիծն Աշ է եւս շօշափող ԱԿԲ՛՛՛ դուգաւոր անկեան, որ ընդ առաջնոյն առնէ 360°, եւ առանձինն զմտաւ ածեալ կայ յառաջին չորրորդի: Վասն այսորիկ շօշափողք երկուց անկեանց, որք միահամուռ առնիցեն 360°, ունին հաւասար շօշափողս, այլ շօշափող անկեանն, որ կայ ի չորրորդում չորրոր-

դի, է ուրացական. նմին իրի շօշ. ա = — շօշ. (360 — ա)։ Որչափ մեծագոյն լինիցի բարձրացեալ անկիւնն ԱԿԲ''', այնչափ փոքրագոյն լինիցի զոգաւոր անկիւնն ԱԿԲ''', վասն այնորիկ փոքր եւս լինիցի նմին կշռեալ շօշափողն։ Ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին, մեծագոյն անկեան կշռի փոքրագոյն շօշափող. եւ խոտորնակս։

Դարձեալ յայտ եւս է, թէ հաւասարութիւնքս շօշ. ա = շօշ. (180 + ա) եւ շօշ. ա = — շօշ. (360 — ա) զօրեն եւս, եթէ մեծագոյն քան զ90^{0} դիցի ա։

50. Յասացելոցս զհետ գայ, թէ իւրաքանչիւր անկեան պատշաճի մի եւեթ շօշափող. իսկ միոյ միոյ ի շօշափողացն պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք։ Քանզի եթէ հաստատական իցէ շօշափողն, յայնժամ պատշաճին նմին երկու, որ կան յառաջին եւ յերրորդ չորրորդս, եւ այլակերպք են ի միմեանց 180 աստիճանաւ։ Նմին հակառակ եթէ ուրացական իցէ շօշափողն, նմին պատշաճեալ անկիւնքն կան յերկրորդ եւ ի չորրորդ չորրորդս, եւ են 180 — ա եւ 360 — ա, եթէ ա նշանակիցէ զայն անկիւն առաջնոյ չորրորդին, որ զնոյն շօշափող այլ զհաստատական ունիցի։ Թէ յայսմ եւս հաշուել պարտ իցէ զամենայն անկիւնս, որք 360, կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպք իցեն, յայտ է ի 6. Բ համարոյ։

Եթէ զմտաւ ածիցի անկիւնն ա յուրացական դիրս, յայնժամ շօշ. (— ա) = շօշ. (360 — ա). իսկ արդ շօշ. (360 — ա) = — շօշ. ա, ուրեմն շօշ. (— ա) = — շօշ. ա։

Ի ՄԻԱՍԻՆ ՇՕՇԱՓՈՂ

51. Որովհետեւ ամենայն ի միասին շօշափող է մասն ինչ ուղղորդ գծին, որ կանգնիցի ի Դ կատարածի (Ձեւ 5.) առաջնոյ չորրորդին, նմին իրի մարթ է զի գտանիցի կամ ի մի կողմն եւ կամ ի միւս կողմն Դ

26

կիտին։ Ապա ուրեմն յորժամ գտանիցի ի միաւին շօշափօղն յայն կողմն Դ կիտի, յորում կայցէ ի միաւին շօշափօղն անկեան իւիք առաջին չորրորդի, է հաստատական, իսկ եթէ ի միւս կողմն Դ կիտի գտանիցի, է ուրացական։

52. Եթէ անկիւնն կամ աղեղնն իցէ $=0$, յայնժամ կէս երկակտուրն՝ որ անցանիցէ ընդ կատարած աղեղանն է ԱԿ, որ է || ՌԴ. իսկ արդ այս երկու գիծքս չկարեն զմիմեանս հատանել. ապա անկիւնն 0 չունի ի միաւին շօշափօղ կամ թէ խ՛շօշ. $0° = \infty$։

Ի միաւին շօշափօղն ԱԿԲ անկեան, որ կայ յառաջնում չորրորդի է գիծն ՌԴ, որ է և շօշափօղ ԴԿԲ անկեան. վասն որոյ խ՛շօշ. ա = շօշ. (90 — ա)։ Որչափ մեծագոյն լինիցի ա, այնչափ փոքրկանայցէ 90 — ա, և ևս շօշ. (90 — ա)։ Ապա ուրեմն մեծագոյն անկեան յառաջնում չորրորդի անդ պատշաճի փոքր ի միաւին շօշափօղ. և խոտորնակս. զոր օրինակ յԱԿԴ ուղիղ անկեան Դ է կատարած նմին կըշռեալ աղեղան. ուստի և խ՛շօշ. $90° = 0$։

53. Եթէ անկիւնն ԱԿԲ՛ կայցէ յերկրորդում չորրորդի անդ բոլորակին, յայնժամ ի միաւին շօշափօղ նորին Դ— կայ ի միւսմէ կողմանէ Դ կիտի։ Ապա ուրեմն ի միաւին շօշափօղ անկեան իւիք երկրորդ չորրորդի բոլորակին, է ուրացական։ Ուղիղ գիծն Դ— է ևս ի միաւին շօշափօղ Բ՛ԿՃ անկեան. ապա ուրեմն երկոքին կից անկիւնքն ԱԿԲ՛ և Բ՛ԿՃ ունին հաւասար ի միաւին շօշափօղս, այլ ի միաւին շօշափօղ բութ անկեան է ուրացական. վասն որոյ խ՛շօշ. ա = — խ՛շօշ. (180 — ա)։ Որչափ միանգամ մեծագոյն լինիցի 180 — ա, հարկ զի նոյնչափ փոքր իցէ ա, և նոյնչափ մեծագոյն խ՛շօշ. ա։ Ապա ուրեմն յերկրորդում չորրորդի մեծագոյն անկեան, պատշաճի մեծագոյն ի միաւին շօշափօղ. և խոտորնակս։

Ի լինել անկեանն կամ աղեղանն 180°, լինիցի Ճ կատարած աղեղան. և ԿՃ || Դ—. ապա ուրեմն խ̃շղ. 180 = խ̃շղ. շ $= \infty$, այս է 180^0 չունի ինչ ի միասին շօշափող։

54. Ի միասին շօշափող ԱԿԲ″ (Ձեւ 5.) բարձրացեալ անկեան է ՈԴ, որ յայս կողմն Գ կիտի անկանի. ուստի եւ հաստատական է ի միասին շօշափող անկեան երեք, որ կայ յերրորդում չորրորդի բոլորակին։ Նու քանզի ՈԴ է եւս ի միասին շօշափող ԱԿԲ անկեան, որ 180 աստիճանաւ չափ փոքր է քան զբարձրացեալ անկիւնն ԱԿԲ″. ապա ուրեմն նոյն է ի միասին շօշափողն նորա, եւ է հաստատական. վասն որոյ խ̃շղ. ա = խ̃շղ. (180 + ա)։ Որչափ մեծագոյն լինիցի անկիւնն 180 + ա յերրորդում չորրորդի, նոյնչափ մեծանայցէ ա, եւ նոյնչափ եւս փոքրկանայցէ խ̃շղ. ա։ Ուրեմն յերրորդում չորրորդի բոլորակին մեծագոյն անկեան պատշաճի փոքրագոյն ի միասին շօշափող. եւ խոտորնակս. զոր օրինակ ԱԿԲ″, ԱԿՔ, ԱԿՔ′ անկեանց յերրորդում չորրորդի, կշուին ի միասին շօշափողքն ՈԴ, Ո′Դ, Ո″Դ։

Եթէ լինիցի անկիւնն $= 270^0$, Ե է կատարած աղեղանն, եւ կէս երկակատուրն ձգեալ ընդ Ե, անցանէ ընդ Գ, վասն որոյ խ̃շղ. 270^0 = խ̃շղ. $\frac{3շ}{2} = 0$։

55. Ի լինել անկեանն կամ աղեղան $> 270^0$, զոր օրինակ է ԱԿԲ‴ (Ձեւ 5.), ի միասին շօշափող նորին Գ— անկանի ի մեւս կողմն Գ կիտի. ապա ուրեմն ի միասին շօշափողք անկեանցն չորրորդ չորրորդի բոլորակին են ուրացական։ Գ— գիծն է եւս ի միասին շօշափող ՃԿԲ′ անկեան, որ հաւասար է ԱԿԲ‴ գոգաւոր անկեան։ Ապա ուրեմն գոգաւոր եւ բարձրացեալ անկիւնքն ԱԿԲ‴ ունին նոյն ի միասին շօշափող. այլ բարձրացեալ անկեանն է ուրացական. վասն որոյ խ̃շղ. ա = — խ̃շղ. (360 — ա)։ Որչափ մեծագոյն լինիցի անկիւնն 360 — ա ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին, նոյնչափ փոքր իցէ ա, եւ մեծ խ̃շղ. ա։ Ուստի եւ ի չորրորդ չորրորդի բոլորակին մեծագոյն անկեան պատ-

շաճի եւ մեծագոյն ի միասին շօշափօղ. եւ խոտորնակս: Ի լինել անկեանն 360°, ԱԿ || Դտ. ուստի եւ խմշօղ. 360° = խմշօղ. 2շ = ∞, այս է չէք 360° ի ի միասին շօշափօղ: Դարձեալ եւ այն եւս յայտ է, թէ հաւասարութիւնքս խմշօղ. ա = խմշօղ. (180 + ա), եւ խմշօղ. ա = — խմշօղ. (360 — ա) զօրեն եւս, եթէ ա մեծագոյն քան զ90° դիցի:

56. Իւրաքանչիւր անկեան կամ աղեղան պատշաճի մի եւեթ ի միասին շօշափօղ. իսկ սմին հակառակ իւրաքանչիւր ի միասին շօշափօղի պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք: Քանզի եթէ հաստատական իցէ ի միասին շօշափօղն, յայնժամ պատշաճին նմին երկու անկիւնք յառաջին եւ յերրորդ չորրորդաց, որք խորին ի միմեանց 180° աստիճանօք. ապեթէ ուրացական իցէ ի միասին շօշափօղն երկու նմին պատշաճեալ անկիւնքն կան յերկրորդ եւ ի չորրորդ չորրորդս եւ են 180 — ա, եւ 360 — ա, յորս ա ցուցանէ զանկիւն ինչ, որ կայ յառաջին չորրորդի, եւ ունի զնոյն ի միասին շօշափօղ, այլ հաստատական: Եթէ յայս եւս յաւելուլ պարտ իցէ եւ զանկիւնն որք 360 եւ կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպք իցեն, յայտ է ի 6. Բ համարոյ:

57. Եթէ զմտաւ ածիցի անկիւն ինչ ա յուրացական դիրս, յայնժամ խմշօղ. (— ա) = խմշօղ. (360 — ա) = — խմշօղ. ա:

ՀԱՏԱՆՕՂ.

58. Ուղղհեաւ հատանօղն է մասն ինչ երկայնեալ կէս երկակորդոյն, որ ձգիցի ընդ կատարած աղեղան, եւ ընդ հարկանիցի շօշափօղին վասն այնորիկ դիրք նորին առ համեմատութեամբ այսր կէս երկակորդոյ երկուս կերպարանս մարթ է ունել. զի կամ ընդ այսր կէս երկակորդոյի միասին ի միկողմն կենդրոնին կայ, եւ կամ ի հակառակ կողմն նորին կենդրոնի: ԱԿԲ անկեան ինչ (Չեւ 5.) յառաջնում չորրորդի, հատանօղն ԿՀ կայ ի նմին

կողման, յորում կայ եւ ԿԲ կէս երկակտուրն, ձգեալ ընդ Բ կատարած աղեղան: Վասն այսորիկ յորժամ հատանողն, եւ կէս երկակտուրն ձգեալ ընդ կատարած աղեղան ի միում կողման կենդրոնին գտանիցին, հատանողն է հաստատական. իսկ եթէ ոմն հակառակն դիպիցի է ուրացական:

59. Եթէ 0 իցէ անկիւնն, յայտ է թէ ԿԱ կէս երկակտուրն է հատանող, վասն որոյ շօշ. 0° = ծ: ԱԿԲ անկեան իրիք (Չեւ 5.) յառաջին չորրորդի անդ հատանողն է ԿՇ ներքնաձիգն ԱԿՇ ուղղանկիւն երեքանկեան: Որչափ միանգամ մեծանայցէ անկիւնն ԱԿԲ, այնչափ առաւել մեծանայ հատանողն, զոր օրինակ ԿՇ = շօշ. ԱԲ, ԿՇ′ = շօշ. ԱԲ, ԿՇ″ = շօշ. ԱԲ′. այլովքն հանդերձ, վասն որոյ յառաջին չորրորդի անդ բոլորակին մեծագոյն անկեան պատշաճի եւ մեծագոյն հատանող:

Ի լինել անկեանն ԱԿԴ $= \frac{ւ}{2}$, հատանողն ԿՄ $\|$ ԱՇ. վասն որոյ ուղիղ անկեան չիք հատանող, կամ թէ շօշ. $90^\circ =$ շօշ. $\frac{ւ}{2} = \infty$:

60. Եթէ իցէ անկիւնն յերկրորդում չորրորդի, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿԲ′, յայնժամ հատանողն նորին է ԿՂ, ի միւս կողմն Կ կենդրոնի, յորում չկայ կէս երկակտուրն: Ապա ուրեմն հատանողք երկրորդ չորրորդի բոլորակին են ուրացական: Գիծն ԿՂ է եւս հատանող ԱԿԲ‴ անկեան: Ապա ուրեմն երկու կից անկիւնք ԱԿԲ′ եւ ԱԿՂ ունին հատանողս հաւասարս, այլ հատանող առաջնոյն է ուրացական. վասն որոյ շօշ. ա = — շօշ. (180 — ա): Զայսր զհետ գայ եւս, եթէ յերկրորդում չորրորդի հատանողք անկեանցն մեծագոյն են քան զկէս երկակտուր: Որչափ միանգամ մեծագոյն իցէ անկիւնն ԱԿԲ′, այնչափ փոքր լինիցի կից անկիւնն նորին. եւ նոյնչափ եւս փոքր լինիցի հատանող նորին: Վասն որոյ յերկրորդում

չորրորդի մեծագոյն անկեան պատշաճի փոքր հատանող, եւ խոտորնակս:

Ի լինել անկեանն $= 180^\circ =$ շ, երկայնեալ կէս երկակտուրն ԿԴ անցանէ ընդ Ճ. նմին իրի ԿԱ հատանողն կայ յուրացական դիրս, ուստի եւ շոփ. 180° $= -$ ճ:

61. Եթէ իցէ աղեղն կամ անկիւնն $> 180^\circ$ (Ձեւ 5.), զոր օրինակ բարձրացեալ անկիւնն ԱԿԲ″, յայնժամ ուրացական եւս մնան հատանողքն: Հատանողն ԿՇ, է եւս հատանող ԱԿԲ անկեան, որ 180 աստիճանաւ փոքր է քան զբարձրացեալ անկիւնն ԱԿԲ″: Վասն զի այսորիկ այս երկու անկիւնք ունին հատանողս հաւասարս, այլ հակառակս, նմին իրի շոփ. ա $= -$ շոփ. (180 + ա): Զայսորիկ զհետ գայ, թէ եւ հատանողք երրորդ չորրորդին եւս մեծագոյն են քան զճառագայթն: Որչափ միանգամ մեծագոյն իցէ 180 + ա յերրորդում չորրորդի, նոյնչափ եւս մեծագոյն լինի ա, եւ եւս շոփ. ա: Ապա ուրեմն մեծագոյն անկեան յերրորդում չորրորդի պատշաճի եւ մեծագոյն հատանող. եւ խոտորնակս:

Ի լինել անկեանն ԱԿԵ $= 270^\circ = \frac{3շ}{2}$, ԿԵ է $\|$ ԱՇ, ուստի եւ չիք հատանող 270° անկեան, կամ շոփ. $270^\circ =$ շոփ. $\frac{3շ}{2} = \infty$:

62. Եթէ կայցէ անկիւն ինչ ի չորրորդում չորրորդի, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿԲ‴ (Ձեւ 5.), հատանող նորին իցէ ԿՂ որ ընդ երկակտրոյ կայ ի միւսում կողման կենդրոնի. վասն որոյ է հաստատական: Գինձն ԿՂ է հատանող եւս ԱԿՂ դոգաւոր անկեան. ուստի եւ շոփ. ա $=$ շոփ. (360 — ա): Զայսորիկ զհետ գայ, թէ հատանողք անկեանց ի չորրորդ չորրորդի մեծագոյն են քան զկէս երկակտուր: Որչափ միանգամ մեծագոյն իցէ անկիւնն 360 — ա, հարկ է զի այնչափ փոքր իցէ ա, եւ շոփ. ա. ապա ուրեմն մեծագոյն

անկեան ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին պատշաճի փոքր հատանող. եւ խոտորնակս:

Դարձեալ մարթ է դիւրաւ ցուցանել թէ հաւասարութիւնքս հաւ. ա = — հաւ. (180 + ա) եւ հաւ. ա = հաւ. (360 — ա) զօրեն եւս, եթէ ա $> 90^0$ դիցի:

63. Իւրաքանչիւր անկիւն կամ աղեղն ունի մի եւեթ հատանող. իսկ իւրաքանչիւր հատանողի են բազում անկիւնք կամ աղեղունք: Քանզի եթէ հաստատական իցէ հատանողն այն ծանուցեալ, յայնժամ պատշաճին նմա երկու անկիւնք, որ կան յառաջին եւ ի չորրորդում չորրորդի, որք միահամուռ առնեն 360^0, իսկ եթէ ուրացական իցէ հատանողն, կշռին նմին երկու անկիւնք որ կան յերկրորդ եւ յերրորդ չորրորդս, որք են 180 — ա, եւ կամ 180 + ա, յորում ա նշանակէ զայն անկիւն, որում պատշաճիցի նոյն հատանողն այլ հաստատական, եւ անկիւնն կայցէ յառաջնում չորրորդի: Յայսմ եւս հաշուել պարտ է զանկիւնսն, որք 360 կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպք իցեն, որպէս յայտ է ի 6. Բ համարոյ:

64. Եթէ զմնաւ ածիցի անկիւն ինչ ա յուրացական դիրս, յայնժամ հաւ. (— ա) = հաւ. (360 — ա) = հաւ. ա:

Ի ՄԻԱՍԻՆ ՀԱՏԱՆՕՂ

65. Ի միասին հատանողն իւիք անկեան, որ կայցէ յառաջնում չորրորդի բոլորակին կայ ի նոյն կողմն Կ կենդրոնի, յոր կողմն անկանիցի կէս երկակատուրն ԿԲ ձգեալ ընդ Բ կատարած աղեղան: Ա̀ան այսորիկ եթէ ի միասին հատանող անկեան իւիք անկանիցի ի նոյն կողմն, յոր կայցէ եւ կէս երկակատուրն ձգեալ ընդ կատարած այնր աղեղան, է հաստատական, իսկ եթէ ի միւս կողմն անկանիցի, է ուրացական:

66. Եթէ իցէ անկիւնն 0, յայնժամ ԿԱ || ԴԲ. ուստի եւ չէք ի միասին հատանօղ 0 անկեան. կամ խմհտփ. $0^0 = \infty$:

Ամէն ինչ անկեան, որ կայցէ յառաջնում չորրորդի, զոր օրինակ ԱԿԲ անկեան, խմհ. հատանօղն է ԿԲ. որ է հատանօղ եւս ԴԿԲ անկեան: Ապա ուրեմն խմհտփ. ա = հտփ. (90 — ա) : Զայսորիկ դհետ գայ, եթէ ամենայն ի միասին հատանօղք առաջնոյ չորրորդին հարկ է զի իցեն մեծագոյն քան զկէս երկակատուր. բայց սակայն այնչափ առաւել փոքրկանայցեն, որչափ միանգամ աճիցէ աղեղնն կամ անկիւնն, եւ խոտորնակս :

Ի լինել անկեանն 90^0, ի միասին հատանօղ նորին լինիցի ԿԴ կէս երկակատուրն, վասն որոյ խմհտփ.

$$90^0 = \text{խմհտփ.}\ \frac{շ}{2} = ճ :$$

67. Եթէ անկիւնն կայցէ յերկրորդում չորրորդի, զոր օրինակ ԱԿԲ՛, յայնժամ ի միասին հատանօղ նորին Կ—, կայ ի նոյն կողմն, յորում գտանիցի եւ կէս երկակատուրն նմին պատշաճեալ. ապա ուրեմն հատատակամն են ի միասին հատանօղք յերկրորդում չորրորդի: Երկոքին կից անկիւնքն ԱԿԲ՛ եւ ՃԿԲ՛ ունին զնոյն ի միասին հատանօղս հաւասարս, եւ հատատակամս, վասն որոյ խմհտփ. ա = խմհտփ. (180 — ա): Յորմէ կարես ի մտաց իմանալ, թէ ի միասին հատանօղք անկեան իրէք յերկրորդում չորրորդի մեծագոյն են քան զկէս երկակատուր, եւ այնչափ աճեն, որչափ մեծանայցեն անկիւնքն. եւ խոտորնակս:

Եթէ հեռաւորութիւնորունից անկեանն իցէ 180, յայնժամ ԿՃ || Դ—. վասն որոյ չէք ի միասին հատանօղ 180^0 անկեան, կամ խմհտփ. 180^0 = խմհտփ. $շ = \infty$:

68. Եթէ իցէ անկիւնն $> 180^0$, զոր օրինակ անկիւնն ԱԿՔ, յայնժամ ի միասին հատանօղ նորին ԿԲ՛ անկանի ի միւս կողմն միջավայրի բոլորակին, ապա ուրեմն ի միասին հատանօղք երրորդ չորրորդի բոլ-

րակին են ուրացական։ Գիծն ԿՌ՛ է եւս ի միասին Հատանօղ գոգաւոր ԱԿՔ անկեան, որ 180 աստիճանաւ չափ փոքր է քան զբարձրացեալ անկիւնն ԱԿՔ. վասն որոյ Խմհատ. ա = — Խմհատ. (180 + ա)։ Զայսորիկ զհետ գայ, թէ ի միասին Հատանօղն անկեան իրիք յերրորդում չորրորդի անդ բոլորակին մեծագոյն է քան զկէս երկակտուր. բայց սակայն այնչափ փոքրկանայ, որչափ միանգամ աճիցէ անկիւնն. եւ խոտորնակս։

Ի լինել անկեանն $= 270^0 = \frac{3շ}{2}$, ի միասին Հատանօղն իցէ ԿԵ վասն որոյ Խմհատ. $270^0 =$ Խմհատ. $\frac{3շ}{2} = —$ ճ։

69. Եթէ անկիւնն իցէ ի չորրորդում չորրորդի բոլորակին. զոր օրինակ ԱԿԲ‴ (Ձեւ 5.), ի միասին Հատանօղ նորին է Կ—, որ կայ ի միւս կողմն ԿԲ‴ կէս երկակտրոյն։ Արդ ուրեմն եւ ի միասին Հատանօղք այսր չորրորդի են ուրացական։ Գիծն Կ— է եւս ի միասին Հատանօղ ՃԿ— անկեան, որ Հաւասար է ԱԿԲ‴ գոգաւոր անկեան։ Արդ ուրեմն գոգաւոր եւ բարձրացեալ անկիւնքն ԱԿԲ‴, ունին ի միասին Հատանօղս Հաւասարս, այլ բարձրացեալ անկիւնն ունի ուրացական. վասն որոյ Խմհատ. ա = — Խմհատ. (360 — ա)։ Մարթ է դիւրաւ ցուցանել, թէ Հաւասարութիւնքս Խմհատ. ա = — Խմհատ. (180 + ա), եւ Խմհատ. ա = — Խմհատ. (360 — ա) զօրեն եւս, եթէ անկիւնն ա $> 90^0$ դիցի։

70. Իւրաքանչիւր անկեան կամ աղեղան պատշաճի մի եւեթ ի միասին Հատանօղ. բայց սակայն միոյ միոյ ի միասին Հատանողաց, պատշաճին բազում անկիւնք կամ աղեղունք։ Քանզի եթէ Հաստատական իցէ ի միասին Հատանօղն այն, յայնժամ պատշաճին նմա երկու անկիւնք, որ կան յառաջին եւ յերկրորդ չորրորդս որք առնեն 180^0. ապա եթէ իցէ ու-

բացական, նոյնպէս եւս էջուքն նմա երկու, որք կան յերրորդ եւ ի չորրորդ չորրորդս, որք են 180 + ա, եւ 360 — ա, յորում ա ցուցանէ զանկիւն ինչ առաջնոյ չորրորդի, որում նոյն, այլ հաստատական ի միասին հատանող պատշաճիցի: Յայս եւս հաշուել արժան է եւ զամենայն անկիւնս, որք 360 կամ բազմապատկաւ 360 աստիճանաց ի միմեանց այլակերպք իցեն:

71. Եթէ զմտաւ ածցի անկիւն ինչ ա յուրացական դիրս, յայնժամ իմհատ. (— ա) = իմհատ. (360 — ա) = — իմհատ. ա:

Պատկերս, որ առաջիս կայ ցուցանէ զփոփոխմունս երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորաց ի չորեսին չորրորդս բոլորակին զորոց յառաջագոյն ճառեցաք եւ ցուցաք ըստ բաւականին: Զաճել երեքանկիւնաչափական գծիցն յորոշեալ ինչ չորրորդի, ցուցանէ նշանագիրս Ա, իսկ զնուազել նոցին Ն:

Եթէ	ա = 0°	ա > 0° եւ < 90°	ա = 90°	ա > 90° եւ < 180°	ա = 180°	ա > 180° եւ < 270°	ա = 270°	ա > 270° եւ < 360°	ա = 360°
Ծոց	0	Ա+	ճ	Ն+	0	Ա−	−ճ	Ն−	−0
Ծոցակից	ճ	Ն+	0	Ա−	−ճ	Ն−	−0	Ա+	ճ
Շօշափող	0	Ա+	∞	Ն−	−0	Ա+	∞	Ն−	−0
Իմշօշափող	∞	Ն+	0	Ա−	$-\infty$	Ն+	0	Ա−	$-\infty$
Հատանող	ճ	Ա+	∞	Ն−	−ճ	Ա−	$-\infty$	Ն+	ճ
Իմհատանող	∞	Ն+	ճ	Ա+	∞	Ն−	−ճ	Ա−	$-\infty$
Շծոց	0	Ա+	ճ	Ա+	2ճ	Ն+	ճ	Ն+	0
Շծոցակ.	ճ	Ն+	0	Ա+	ճ	Ա+	3ճ	Ն+	ճ

Այսքա են զօրութիւնք յանդիմանակաց պաշտօնաւորաց

ՀԱՏԱԾ Բ

ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԻՒՆ ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊԱՇՏՕՆԵԱՒՈՐԱՑ ԸՆԴ ՄԻՄԵԱՆՍ, ԵՒ ՀԱՇՈՒԵԼ ԶՆՈՍԻՆ

72. Ծոցն *միոյ աղեղան կամ անկեան հաւասար է կիսոյ լարի կրկնապատկի այնր աղեղան:*

Կէս երկակտուրն ԱԿ (*Ձեւ* 1.) *իցէ ուղղորդ ի* ԲՆ. *յայտ է թէ հատանէ նա եւ զլարն* ԲՆ, *եւ զաղեղն* ԲԱՆ (*Երկր.* Հ. 139.). *ուստի եւ* ԲԳ = ՆԳ, *եւ աղ.* ԲԱՆ = 2. *աղ.* ԱԲ, *այս ինքն եթէ* ԲԳ *կամ կէսն* ԲՆ *լարին, որ պատշաճի* ԲԱՆ *աղեղան, է ծոց* ԱԲ *աղեղան կամ* ԱԿԲ *անկեան: Արդ եթէ անկիւնն* ԱԿԲ = *աղ.* ԱԲ = *ա դիցի, իցէ աղ.* ԲԱՆ = 2*ա. ուստի ծոց ա* = ½ *լա.* 2*ա:*

Ապա ուրեմն կիսով իւրաքանչիւր լարի մարթ է զծոց կիսոյ նմին պատշաճեալ աղեղան հաշուել: Իսկ արդ՝ որովհետեւ յերկրաչափութեան զլարս բազում աղեղանց հաշուեցաք որպէս կողմանս կարգաւոր բազմանկեանց, որք զբոլորակաւ ներքոյ ձգիցին ուրեմն կարեմք նոքօք եւ զծոցս նոցին աղեղանց գտանել: Զոր օրինակ լարն 120° = ճ √3 (*Երկր.* Հ. 168. Բ), *ուրեմն ծոց* $\frac{120^0}{2}$ = *ծոց* 60° = $\frac{ճ\sqrt{3}}{2}$ = ճ. 0,866025403784:

Նոյնպէս եւ ծոց 45° = ½ *լար* 90° = $\frac{ճ\sqrt{2}}{2}$ (*Երկ.* Հ. 169) = ճ. 0,707106781286 ... *եւ ծոց* 30° = ½ *լար* 60° = ½ ճ = ճ. 0, 5. *եւ ծոց* 18° = ½ *լար* 36° = ¼ ճ (−1 + √5) (*Երկ.* Հ. 170. Ա) = ճ. 0,309016994375 ....:

73. *Ամենայն երեքանկիւնաչափական գիծք կախին զծոցոյ, եւ նովաւ եւ ի ձեռն կէս երկակտրոյ կարեն նշանակել:*

Ցուցումն: *Իցէ* (*Ձեւ* 1.) *աղ.* ԱԲ = *ա, եւ* ԱԿ = ԲԿ = ճ:

1) Յուղղանկիւն ΔԲԿԳ է $\overline{\text{ԲԿ}}^2 = \overline{\text{ԲԳ}}^2 + \overline{\text{ԿԳ}}^2$, կամ $\text{ճ}^2 = \text{ծոց}^2\,\text{ա} + \text{ծոցակ}^2.\,\text{ա}$. ուրեմն $\text{ծոցակ}.\,\text{ա} = \sqrt{(\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\,\text{ա})}$։

2). Որովհետեւ $\Delta\,\text{ԲԿԳ} \backsim \Delta\,\text{ԱԿՇ}$. ուրեմն $\text{ԿԳ} : \text{ԲԳ} = \text{ԱԿ} \cdot \text{ԱՇ}$, կամ $\text{ծոցակ}.\,\text{ա} : \text{ծոց}\,\text{ա} = \text{ճ} : \text{շօշ}.\,\text{ա}$. ուրեմն $\text{շօշ}.\,\text{ա} = \dfrac{\text{ճ}.\,\text{ծոց}\,\text{ա}}{\text{ծոցակ}.\,\text{ա}} = \dfrac{\text{ճ}.\,\text{ծոց}\,\text{ա}}{\sqrt{(\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\text{ա})}}$ (1)։

3). Ի վերագոյն ասացեալ նման երեքանկիւնս է եւս $\text{ԿԳ} : \text{ԲԿ} = \text{ԱԿ} : \text{ԿՇ}$, կամ $\text{ծոցակ}.\,\text{ա} : \text{ճ} = \text{ճ} : \text{հատ}.\,\text{ա}$. զորս գտեա գայ $\text{հատ}.\,\text{ա} = \dfrac{\text{ճ}^2}{\text{ծոցակ}.\,\text{ա}} = \dfrac{\text{ճ}^2}{\sqrt{(\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\text{ա})}}$։

4). Ջնմանութեան ԲԿՄ եւ ԿԴՌ երեքանկեանց գտեա գայ $\text{ԿՄ} : \text{ԲՄ} = \text{ԿԴ} : \text{ԴՌ}$, կամ $\text{ծոց}\,\text{ա} : \text{ծոցակ}.\,\text{ա} = \text{ճ} : \text{էմշօշ}.\,\text{ա}$. յորմէ $\text{էմշօշ}.\,\text{ա} = \dfrac{\text{ճ}.\,\text{ծոցակ}.\,\text{ա}}{\text{ծոց}\,\text{ա}}$

$$= \frac{\text{ճ}\sqrt{\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\,\text{ա}}}{\text{ծոց}\,\text{ա}},$$

5). Ի նոյն երեքանկիւնս համեմատի $\text{ԿՄ} : \text{ԲԿ} = \text{ԿԴ} : \text{ԿՌ}$, կամ $\text{ծոց}\,\text{ա} : \text{ճ} = \text{ճ} : \text{էմհատ}.\,\text{ա}$, ուստի $\text{էմհատ}.\,\text{ա}$

$$= \frac{\text{ճ}^2}{\text{ծոց}\,\text{ա}}։$$

6). Էւ $\text{ԱԳ} = \text{ԱԿ} - \text{ԿԳ}$, այսինքն $\text{շծոց}\,\text{ա} = \text{ճ} - \text{ծոցակ}.\,\text{ա} = \text{ճ} - \sqrt{\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\text{ա}}$։

7). Ի կատարած է $\text{ԴՄ} = \text{ԿԴ} - \text{ԿՄ}$, այս ինքն $\text{շծոցակ}.\,\text{ա} = \text{ճ} - \text{ծոց}\,\text{ա}$։

Գիտասցեն ուսանելիք զի բազում ինչ խտիր է ի մէջ $\text{ծոց}^2\,\text{ա}$, եւ $\text{ծոց}\,\text{ա}^2$ գրուածոց։ Առաջինն ցուցանէ թէ պաշտօնաւորն ծոց ա յերկրորդ կարողութիւն համբարձեալ է, վասն որոյ գրի եւս այսպէս $(\text{ծոց}\,\text{ա})^2$, կամ $\overline{\text{ծոց}\,\text{ա}}^2$, փոխանակ գրելոյ $\text{ծոց}^2\,\text{ա}$։ Իսկ երկրորդն $\text{ծոց}\,\text{ա}^2$ յայտ առնէ զծոց աղեղանն, որ (այս է աղեղն) յերկրորդ կարողութեան իցէ (այս ինքն ա^2)։ Ասացեալս զօրէ եւ վասն այլոց պաշտօնաւորաց։

Ա. 1). Յ ԱԿՀ երեքանկեան է $\overline{\text{ԿՀ}}^2 = \overline{\text{ԱԿ}}^2 + \overline{\text{ԱՀ}}^2$. կամ $\text{հատ}^2.\,\text{ա} = \text{ճ}^2 + \text{շօշ}^2.\,\text{ա}$. ուստի $\text{հատ}.\,\text{ա} = \sqrt{\text{ճ}^2 + \text{շօշ}^2.\,\text{ա}}$. և $\text{շօշ}.\,\text{ա} = \sqrt{\text{հատ}^2.\,\text{ա} - \text{ճ}^2}$։

2). Յերեքանկիւնն ԿԴՌ է $\overline{\text{ԿՌ}}^2 = \overline{\text{ԿԴ}}^2 + \overline{\text{ԴՌ}}^2$, կամ $\text{էմհատ}^2.\,\text{ա} = \text{ճ}^2 + \text{էմշօշ}^2.\,\text{ա}$. յորմէ $\text{էմհատ}.\,\text{ա} = \sqrt{\text{ճ}^2 + \text{էմշօշ}^2.\,\text{ա}}$, և $\text{էմշօշ}.\,\text{ա} = \sqrt{\text{էմհատ}^2.\,\text{ա} - \text{ճ}^2}$։

3). Ի նման երեքանկիւնս ԱԿՀ, և ԿԴՌ համեմատի ԱՀ : ԱԿ = ԿԴ : ԴՌ, այս ինքն $\text{շօշ}.\,\text{ա} : \text{ճ} = \text{ճ} : \text{էմշօշ}.\,\text{ա}$. վասն որոյ և $\text{շօշ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ճ}^2}{\text{էմշօշ}.\,\text{ա}}$, և $\text{էմշօշ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ճ}^2}{\text{շօշ}.\,\text{ա}}$, և $\text{շօշ}.\,\text{ա} \times \text{էմշօշ}.\,\text{ա} = \text{ճ}^2$։

4). Նոյնպէս ի նման երեքանկիւնս յայտնի համեմատի ԿՀ : ԱԿ = ԿՌ : ԴՌ, այս ինքն $\text{հատ}.\,\text{ա} : \text{ճ} = \text{էմհատ}.\,\text{ա} : \text{էմշօշ}.\,\text{ա}$. Նմին իրի և $\text{էմհատ}.\,\text{ա} = \frac{\text{հատ}.\,\text{ա} \times \text{էմշօշ}.\,\text{ա}}{\text{ճ}}$, և

$$\text{հատ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ճ}.\ \text{էմհատ}.\,\text{ա}}{\text{էմշօշ}.\,\text{ա}} = \frac{\text{ճ}.\ \text{էմհատ}.\,\text{ա}}{\sqrt{\text{էմհատ}^2.\,\text{ա} - \text{ճ}^2}}\ (2)։$$

5). Դարձեալ զնմանութեան ասացեալ երեքանկեանց զհետ գայ ԿՀ : ԱՀ = ԿՌ : ԿԴ, այս է $\text{հատ}.\,\text{ա} : \text{շօշ}.\,\text{ա} = \text{էմհատ}.\,\text{ա} : \text{ճ}$. ուստի $\text{հատ}.\,\text{ա} = \frac{\text{շօշ}.\,\text{ա} \times \text{էմհատ}.\,\text{ա}}{\text{ճ}}$, և $\text{էմհատ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ճ}.\ \text{հատ}.\,\text{ա}}{\text{շօշ}.\,\text{ա}}$, և

$$\text{շօշ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ճ}.\ \text{հատ}.\,\text{ա}}{\text{էմհատ}.\,\text{ա}}։$$

6). Ի նման երեքանկիւնս ԱԿՀ և ԲԿՊ է ԲԿ : ԲՊ = ԿՀ : ԱՀ, այս ինքն $\text{ճ} : \text{ծոց ա} = \text{հատ}.\,\text{ա} : \text{շօշ}.\,\text{ա}$ ուստի և $\text{շօշ}.\,\text{ա} = \frac{\text{ծոց ա}.\ \text{հատ}.\,\text{ա}}{\text{ճ}},$ և $\text{հատ}.\,\text{ա} =$

$$\frac{\text{ճ}.\ \text{շօշ}.\,\text{ա}}{\text{ծոց ա}},\ \text{և}\ \text{ծոց ա} = \frac{\text{ճ}.\ \text{շօշ}.\,\text{ա}}{\text{հատ}.\,\text{ա}} = \frac{\text{ճ}.\ \text{շօշ}.\,\text{ա}}{\sqrt{\text{ճ}^2 + \text{շօշ}^2.\,\text{ա}}}\ (1)։$$

7). Ի կատարած ի նմանութենէ ԲԿՄ եւ ԿԴՌ երեքանկեանց գտանի ԲԿ : ԲՄ = ԿՌ : ԴՌ, այսինքն $\text{ճ} : \text{ծոցակ. ա} = \text{խմհատ. ա} : \text{խմշօշ. ա}$. զորոյ զհետ գայ $\text{խմշօշ. ա} = \frac{\text{ծոցակ. ա} \times \text{խմհատ. ա}}{\text{ճ}}$, եւ $\text{խմհատ. ա} = \frac{\text{ճ. խմշօշ. ա}}{\text{ծոցակ. ա}}$, եւ $\text{ծոցակ. ա} = \frac{\text{ճ. խմշօշ. ա}}{\text{խմհատ. ա}} = \frac{\text{ճ. խմշօշ. ա}}{\sqrt{\text{ճ}^2 + \text{խմշօշ}^2\text{. ա}}}$ (2):

Բ. Եթէ լինիցի (Ձեւ 1.), $\text{անկ. ա} = \text{անկ. բ}$, յայնժամ իցէ եւս ԱՀ = ԱԿ, եւ ԱԳ = ԿԳ, այսինքն $\text{շօշ. } 45^0 = \text{ճ}$, եւ $\text{ծոց } 45^0 = \text{ծոցակ. } 45 = \frac{1}{2}\text{ճ}\sqrt{2}$ (Հ. 72.). ուստի եւ $\text{հատ. } 45^0 = \text{ճ}\sqrt{2}$, որովհետեւ $\text{ԿՀ} = \sqrt{\overline{\text{ԱՀ}}^2 + \overline{\text{ԱԿ}}^2} = \sqrt{2\text{ճ}^2} = \text{ճ}\sqrt{2}$:

74. Օգնականութեամբ համարակաց օրինակացն, զորս եդաք ի Հ. 72 եւ 73, մարթ է զամենայն պաշտօնաւորս աղեղանց, եւ զփոփոխմունս նոցին իսկ պաշտօնաւորացն գտանել, եւ հաշուել:

1). Որովհետեւ ըստ Հ. 72, $\text{ծոցակ. ա} = \sqrt{\text{ճ}^2 - \text{ծոց}^2\text{. ա}}$. ուրեմն փոխանակելով զզօրութիւնս որ ի Հ. 71, վասն ծոցոց գտան, լինիցի $\text{ծոցակ. } 60^0 = \sqrt{\text{ճ}^2 - \frac{3\text{ճ}^2}{4}} = \frac{\text{ճ}}{2}$, եւ $\text{ծոցակ. } 45^0 = \sqrt{\text{ճ}^2 - \frac{2\text{ճ}^2}{4}} = \frac{\text{ճ}\sqrt{2}}{2}$, եւ $\text{ծոցակ. } 30^0 = \sqrt{\text{ճ}^2 - \frac{\text{ճ}^2}{4}} = \frac{\text{ճ}\sqrt{3}}{2}$ եւ $\text{ծոցակ. } 18^0 = \frac{\text{ճ}}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$:

2). Վասնզի ըստ Հ. 73. 2, է $\text{շօշ. ա} = \frac{\text{ճ. ծոց ա}}{\text{ծոցակ. ա}}$ ուրեմն փոխանակելով զզօրութիւնս ծոցոց եւ ծոցակցի որ ի Հ. 71 եւ 73. 1 գտան, լինիցին $\text{շօշ. } 60^0 = \text{ճ}\sqrt{3}$,

$\text{շօշ.}\ 45^0 = \text{ճ},\ \text{շօշ.}\ 30^0 = \frac{\text{ճ}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ճ}\sqrt{3}}{3},\ \text{շօշ.}\ 18^0 =$
$\text{ճ}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right) = \text{ճ}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$:

3)․ Որովհետեւ ըստ Հ. 73. 4, $\text{էմշօշ.}\ \text{ա} = \frac{\text{ճ. ծոցակ. ա}}{\text{ծոց ա}}$․ ուրեմն փոխանակելով զզօրութիւնս գտեալս ի Հ. 71, եւ 73. 1, հաշուիցի $\text{էմշօշ.}\ 60^0 = \frac{\text{ճ}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ճ}\sqrt{3}}{3}$, $\text{էմշօշ.}\ 45^0 = \text{ճ}$, $\text{էմշօշ.}\ 30^0 = \text{ճ}\sqrt{3}$,

$\text{էմշօշ.}\ 18^0 = \text{ճ}.\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}-1} = \text{ճ}\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$:

4)․ Ըստ. Հ. 73. 3, $\text{հատ.}\ \text{ա} = \frac{\text{ճ}^2}{\text{ծոցակ. ա}}$․ ուրեմն փոխանակեալ ի սմա մի ըստ միոջէ զիւրաքանչիւր զօրութիւնս, որ ի Հ. 73. 1 գտան. հաշուիցի $\text{հատ.}\ 60^0 = 2\text{ճ}$, $\text{հատ.}\ 45^0 = \frac{2\text{ճ}}{\sqrt{2}} = \text{ճ}\sqrt{2}$, $\text{հատ.}\ 30^0 = \frac{2\text{ճ}}{\sqrt{3}} = \frac{2\text{ճ}\sqrt{3}}{3}$, եւ $\text{հատ.}\ 18^0 = \frac{4\text{ճ}}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}$
$= \text{ճ}\sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)}$:

5)․ Կանոնի ըստ. Հ. 73. 5, $\text{էմհատ.}\ \text{ա} = \frac{\text{ճ}^2}{\text{ծոց ա}}$ յայտ է թէ մարթի հաշուել զ՚ի միասին հատանօղն յորժամ զնմին պատշաճեալ ծոցն ի հաւասարութեան անդ հաստատիցեմք: Վասն որոյ ըստ զօրութեանցն՝ որ ի Հ. 71, գտանի $\text{էմհատ.}\ 60^0 = \frac{2\text{ճ}}{\sqrt{3}} = \frac{2\text{ճ}\sqrt{3}}{3}$,

$\text{էմհատ.}\ 45^0 = \frac{2\text{ճ}}{\sqrt{2}} = \text{ճ}\sqrt{2}$, $\text{էմհատ.}\ 30^0 = 2\text{ճ}$, եւ

$\text{էմհատ.}\ 18^0 = \frac{4\text{ճ}}{\sqrt{5}-1} = \text{ճ}(\sqrt{5}+1)$:

6). Որովհետեւ ըստ Հ. 73. 6, է շծոց ա $=$ շ $-$ ծոցակ. ա. ուրեմն ըստ զօրութեանց ծոցակցաց եղելոց 74. 1, հաշուին շծոց $60^0 =$ շ $- \frac{շ}{2} = \frac{շ}{2}$, շծոց. $45^0 =$ շ $- \frac{շ\sqrt{2}}{2} =$ շ $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, շծոց $30^0 =$ շ $- \frac{շ\sqrt{3}}{2} =$ շ $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$, եւ շծոց $18^0 =$ շ $- \frac{շ}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})$:

7). Ի կատարած որովհետեւ ըստ. Հ. 73. 7, շծոցակ. ա $=$ շ $-$ ծոց ա, ուրեմն ի զօրութեանց անտի 71 համարոյ գտանին շծոցակ. $60^0 =$ շ $- \frac{շ\sqrt{3}}{2} =$ շ $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$, շծոցակ. $45^0 =$ շ $- \frac{շ\sqrt{2}}{2} =$ շ $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, շծոցակ. $30^0 =$ շ $- \frac{շ}{2} = \frac{շ}{2}$, եւ շծոցակ. $18^0 =$ շ $-$ շ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) =$ շ $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$:

Այսու հասարակաց օրինակօքս գտանին ամենայն փոփոխմունք երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորաց, զորոց վերագոյն երկարագոյն ճառեցաք: Ի ցուցանել շատ իցէ մօտաւոր օրինակս: Որովհետեւ ծոց $90^0 =$ շ. եւ ծոցակ. $90^0 = 0$, նմին իրի շօշ. $90^0 = \frac{շ.շ}{0} = \infty$. եւ քանզի ծոց $270^0 = -$շ, եւ ծոցակ. $270^0 = 0$, ուրեմն շօշ. $270^0 = -\frac{շ.շ}{0} = -\infty$: Դարձեալ վասն ծոց $0^0 = 0$, եւ ծոցակ. $0 =$ շ լինելոյ, է եւս հմշօշ. $180^0 = -\frac{շ.շ}{0} = -\infty$: Նոյնպէս վասն սոցին պատճառաց գտանի շօշ. $0^0 = 0$, շօշ. $180^0 = -0$, շօշ. $360^0 = -0$, եւ հմշօշ. $90^0 = 0$, եւ հմշօշ. $270^0 = 0$:

Զպաշտօնաւորս ի տասներորդական կոտորս լուծել, թողումք փութոյ ուսանելեաց. զորս մարթ է ըստ օրինաց համարողութեան դիւրաւ կատարել:

75. Միաքան երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորք միոյ անկեան կամ աղեղան, որ այլեւայլ կէս երկակարով ձգեալ իցեն, համեմատին որպէս զկէս երկակտուրան զայնոսիկ:

Համարեսցուք եթէ (Ձեւ 6.) ծանուցեալ իցէ անկիւնն ԱԿԲ = ա: Ի Կ գագաթանէ անտի ԱԿ եւ ակ կէս երկակորովք ձգեալ զնման աղեղունս ԱԴ եւ ադ, եւ ձգեալ եւս զերեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորս որ երկոցունց աղեղանցն այնոցիկ պատշաճիցին. յայնժամ ԲԿ : բկ = ԲՊ : բպ = ԿՊ : կպ, եւ ԱԿ : ակ = ԱՇ : աշ = ԿՇ : կշ, դարձեալ ԿԴ : կդ = ԴՌ : դռ = ԿՌ : կռ. իսկ արդ է եւս ԲԿ : բկ = ԱԿ : ակ = ԿԴ : կդ. զորին զհետ գայ եւս

ԲՊ : բպ = ԿՊ : կպ = ԱՇ : աշ = ԿՇ : կշ = ԴՌ : դռ = ԿՌ : կռ = ԱԿ : ակ = Ճ : ճ, եթէ ԱԿ = Ճ, եւ ակ = ճ դիցի։

Արդ իբրեւ զպաշտօնաւորս որ պատշաճիցին ա անկեան, եւ ԱԿ = Ճ կէս երկակորոյ, մեծ նշանագրովք գրիցեմք, իսկ զայնս որ ակ = ճ կէս երկակորոյ պատշաճիցին փոքրագունիւք, յայնժամ փոխանակելով, ծագիցեն համեմատութիւնքս,

Ծոց ա : ծոց ա = Ճ : ճ
Ծոցակ. ա : ծոցակ. ա = Ճ : ճ
Շօշ. ա : շօշ. ա = Ճ : ճ
Հատ. ա : հատ. ա = Ճ : ճ
Իմշօշ. ա : իմշօշ. ա = Ճ : ճ
Իմհատ. ա : իմհատ. ա = Ճ : ճ
Շծոց. ա : շծոց ա = Ճ : ճ։
Շծոցակ. ա : շծոցակ. = Ճ : ճ

1) Եթէ համարակաց իմն օրինակաւ Պա, պա ցուցանիցեն երկուս միայն պաշտօնաւորս ա անկեան, եւ Ճ, ճ կէս երկակորոց, յայտ է թէ Պա : պա = Ճ : ճ, յորմէ եւ Պա = Ճ/ճ .պա։ Այսպէս ուրեմն եթէ երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւոր ինչ հաշուեալ իցէ վասն որոշեալ ինչ ճ կէս երկակորոյ, մարթ է այնու զպաշտօնաւորս այլոց կէս երկակորոց գտանել։ Վասն դիւրագոյն զհաշուեան գործելոյ, եւ իւիք մասամբ վասն պարզագոյն առնելոյ զձեւս երեքանկիւնաչափականս, եդին ուսողք զկէս երկակորուրն = 1, որով զամենայն երեքանկիւնաչափական գիծս համարեցան, եւ յօրինեալ կազմեցին տախ-

տակս, յորոց ի փոքրագոյնն կան դրոշմեալ պաշտօնաւորքն մինչեւ ի 5, եւս եւ ի 6 տասներորդական տեղիս իսկ ի մեծագոյնս մինչեւ յ7, եւ ի 10 տասներորդականս։

2) Յովհաննէս Մուլլէր, որ անուանեցաւ Ռեգիոմոնտանոս (ծնեալ ի 1436որդ ամի, եւ վախճանեալ ի Հռոմ ի 1476) յօրինեաց տախտակ շօշափողաց, եդեալ զկէս երկակտուրն=100000, այլ միայն հաշուեալ զողջոյն աստիճանս, եւ ոչ զկոտորեալս։ Երասմոս Ռայնհոլդ յետ նորա (ծն. ի 1511, եւ մռ. ի 1553) յիւր գիրսն՝ որ կոչի Կանոն բերրի (Canon foecundus) զկէս երկակտուրն=10000000 արկ հիմն հաշուելոյ զգիծսն զայնոսիկ յերկրորդաց յերկրորդս։ Իսկ Գէորգ Յովակիմ Ռեթիկոս (ծն. ի 1514, եւ մեռեալ ի 1574) զշօշափողսն եւ զծոցս համարեցաւ ի 10 երկրորդէ ց10 երկրորդ, եդեալ զառաջինն զկէս երկակտուրն=10^{10}, եւ ապա=10^{15}։ Ապա յետ այնորիկ Պետրոս Ապիանոս (ծն. ի 1495 եւ վախճ. ի 1552) ութ ամօք յառաջ քան զՌեգիոմոնտանոսի դրոշմել տախտակս ծոցոց վասն 10000000 կէս երկակտրոյ, եւ տախտակ մի ծոցոյ եդեալ զկէս երկակտուրն=100000։

3) Յետ ղոգարիթմեացն գտանելոյ, վասն մեծի դիւրութեան, զոր ղոգարիթմոսն ի հաշիւսն մատուցանէ, փոխանակ թուոց երեքանկիւնաչափական գծիցս զղոգարիթմոսս նոցին եդին հաստատեցին, եւ յայս պէտս յօրինեցան տախտակք մեծք եւ փոքունք։ Արդ եթէ ի սոսա զկէս երկակտուրն=10^{10} դնիցէ ոք, յայտ է թէ ղոգարիթմոս նորին լինի=10, եւ այսու օրինակաւ հաշուին ղոգարիթմունք երեքանկիւնաչափական գծիցս ի 10 երկրորդէ ի 10 երկրորդ, կամ թէ ընաւ յերկրորդէ յերկրորդ։ Ի փոքր տախտակս սովորութիւն է զերիս յետին նշանակս թուոցն ի բաց թողուլ, որպէս թէ=10^7 լինեալ էր կէս երկակտուրն, եւ ղոգարիթմոսն նորին=7, որով եւ յայտնիչք այլոց ղոգարիթմեացն 3 նշանակօք թուոց նուազին։

4) Նշանաւոր տախտակք ղոգարիթմեաց են մերձաւոր նշանակեալքս, Ռ. Շորտրեդի, Փրանկիսկոսի Կալլէտայ, Գէորգայ Վեգայ, Յ. Կարոլոսի Շուլցի*, եւ Յով-

---

Logarithmic Tables to seven places of decimals ... by R. Shortrede. Edinburgh. 1844.

Callet François. Tables portatives de Logarithmes, etc. Edition stéréotype, gravée, fondue et imprimée par Firmin-Didot. Paris 1795.

Vega, Georg Freiherr, logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 2 Bände. Leipzig. in der Weidman'schen Buchhandlung.

Schulz, J. Carl, neue erweiterte Sammlung logarithmischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. 2 Bände. Berlin 1778.

սեփայ Ցաղմնի, եւ Ղաղանդայ, զորոց զկաղմածոյն եւ զարկանելոյն ի կիր, մարթ է ի վերայ հասանել ի տեղեկութեանցն, զորս սովոր են ի սկզբան մատենին դրոշմել։

5) Կարգն այն, որ հիմն հաշուոց երեքանկիւնաչափական գծիցն դնէ զկէս երկակուրն = 1, անուանեալ կոչի Բնական կարգ. ըստ այսմ կարգի ամենայն ծոցք են բուն կոտորք, որք ցանգ տասներորդական կոտորօք յանդիման կացուցանին։ Իսկ այլ կարգք, անուանեալ կոչին Արուեստական։ Եւ նշանակին առքա զայս օրինակ ծոց բնա . ա (այս է բնական ծոց ա աղեղան), շօշ . բնա . ա, այլովքն համդերձ, եւ ծոց արու . ա (այս ինքն արուեստական ծոց ա աղեղան), եւ այլքն եւս։ Փոխանակ արուեստական անելոյ բազմիցս գրի՝ տախտակի, զոր օրինակ ծոց տախ . ա, շօշ . տախ . ա, այլովքն համդերձ, իսկ բնականքն համառօտիւք նշանակին այսպէս ծոց ա, շօշ. ա, այլովքն համդերձ։

6) Արդ եթէ ի համեմատութիւնս, զորս վերագոյն եդաք, ճ նշանակիցէ զկէս երկակուրն տախտակի, եւ դիցի ճ = 1, յայնժամ փոքրագոյն սկզբան նշանագրովք գրեալ պաշտօնաւորքն նշանակեն ըստ բնական կարգի, իսկ մեծագոյն նշանագրովք գրեալք ըստ արուեստական կարգի։ Ուստի եւ փոխանակելով ելանեն

$$\text{Ծոց տախ . ա : ծոց ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ ծոց ա} = \frac{\text{Ծոց տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Ծոցալ . տախ . ա : ծոցալ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ ծոցալ . ա} = \frac{\text{Ծոցալ . տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Շօշ . տախ . ա : շօշ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ շօշ . ա} = \frac{\text{Շօշ . տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Շծոց տախտ . ա : շծոց ա} = \text{ճ} : 1 . \text{ յորմէ շծոց ա} = \frac{\text{Շծոց տախտ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Շծոցալ . տախտ . ա : շծոցալ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ շծոցալ . ա} = \frac{\text{Շծոցալ . տախտ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Հատ . տախ . ա : հատ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ հատ . ա} = \frac{\text{Հատ . տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Խմշօշ . տախ . ա : խմշօշ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ խմշօշ . ա} = \frac{\text{Խմշօշ . տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

$$\text{Խմհատ . տախ . ա : խմհատ . ա} = \text{ճ} : 1, \text{ յորմէ խմհատ . ա} = \frac{\text{Խմհատ . տախ . ա}}{\text{ճ}}$$

այս ինքն, Իւրաքանչիւր երեքանկիւնաչափական գիծ արուեստական կարգի բաժանեալ ընդ կէս երկակտուրն, որ հիմն եդեալն է կարգին այնորիկ, տայ զմիաբան երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորն բնական կարգի, եւ

Խոտորնակս, Ցորժամ երեքանկիւնաչափական գիծ ինչ բնական կարգի բազմացուցանիցի կէս երկակտրով, որ հիմն է արուեստական կարգին, ելանէ միաբան երեքանկիւնաչափական գիծն արուեստական կարգի:

7) Յերեքանկիւնաչափական լուծման ցանգ կէս երկակտուրն դնի $= 1$, այս ինքն ամենայն ձեւք ածին ի կարգ բնական, քանզի այսուիկ պարզին ձեւքն, եւ դիւրանայ յոյժ յոյժ հաշուելն, որք կարեն իսկ դառնալ շրջել ի կարգ արուեստական, եթէ որ ի համարողական հաւասարութեան անդ, որ զկցորդութիւն երկուց կամ բազում երեքանկիւնաչափական պաշտօնաւորացն դրոշմիցէ, զմի մի յերեքանկիւնաչափական գծիցն բնական կարգի, ըստ վերագոյն ասացեալ օրինաց, զնմին միաբան արուեստական գիծն դրոշմիցէ, բաժանեալ զայն ընդ կէս երկակտուրն այնր արուեստական կարգի:

Տացուք օրինակս ասացելոցս

ա) Առ յապա (Հ. 77.) տեսանելոց եմք, եթէ ծոց $2Ա = 2$ ծոց$Ա$. ծոցակ. $Ա$. է յորժամ կէս երկակտուրն $= 1$ դիցի. իսկ վասն $Ճ$ կէս երկակտրոյ գտանի

$$\frac{\text{ծոց տախ.}\ 2Ա}{Ճ} = 2\cdot\frac{\text{ծոց տախ.}\ Ա}{Ճ}\cdot\frac{\text{ծոցակ.}\ \text{տախ.}\ Ա}{Ճ},\ \text{ուստի}$$

$$\text{ծոց տախ.}\ 2Ա = 2\cdot\frac{\text{ծոց տախ.}\ Ա\cdot\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ}$$

բ) Ըստ նմին օրինակի շօշ. $\frac{1}{2}Ա = \dfrac{1-\text{ծոցակ.}\ Ա}{1+\text{ծոցակ.}\ Ա}$ ի լինել կէս երկակտրոյն $= 1$, իսկ վասն $Ճ$ կէս երկակտրոյ գտանի

$$\left(\frac{\text{շօշ. տախ.}\ \frac{1}{2}Ա}{Ճ}\right)^2 = \frac{1-\dfrac{\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ}}{1+\dfrac{\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ}}$$

$$= \frac{Ճ-\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ+\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա},\ \text{կամ}$$

$$\frac{(\text{շօշ. տախ.}\ \frac{1}{2}Ա)^2}{Ճ^2} = \frac{Ճ-\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ+\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա},\ \text{կամ թէ եւս}$$

$$(\text{շօշ. տախ.}\ \tfrac{1}{2}Ա)^2 = \frac{Ճ^3-Ճ^2\ \text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}{Ճ+\text{ծոցակ. տախ.}\ Ա}:$$

8) Այսուհետեւ զկէս երկակտուրն դնեմք $= 1$:

76. Խնդիր: Տուեալ զծոց անկեան իրիք, գտանել զծոց կիսոյ այնր անկեան:

Լուծումն: Իցէ (Ձեւ 7.) անկ. ԱԿԲ $=$ ա $=$ աղ. ԱԲ. ձգեա զկէս երկակատուրն ԿԴ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ լարի, եւ զԲՊ ուղղորդ ի գիծն ԱԿ: Յայտ իմն է թէ ԲՊ $=$ ծոց ա: եւ ԲԵ $= \frac{1}{2}$ լար ԱԲ $=$ ծոց աղ. ԲԴ $=$ ծոց աղ. $\frac{1}{2}$ ԱԲ $=$ ծոց $\frac{1}{2}$ ա: Իսկ արդ է $\overline{\text{ԱԲ}}^2 = \overline{\text{ԲՊ}}^2 + \overline{\text{ԱՊ}}^2 = \overline{\text{ԲՊ}}^2 + (\text{ԱԿ} - \text{ԿՊ})^2$, կամ $(2 \cdot \text{ԲԵ})^2 = \text{ծոց}^2\,\text{ա} + (1 - \text{ծոցաչ. ա})^2 = \text{ծոց}^2\,\text{ա} + 1 - 2 \cdot \text{ծոցաչ. ա} + \text{ծոցաչ.}^2\,\text{ա}$, այս ինքն $4 \cdot \overline{\text{ԲԵ}}^2 = 4 \cdot \text{ծոց}^2 \cdot \frac{1}{2}\,\text{ա} = \text{ծոց}^2 \cdot \text{ա} + \text{ծոցաչ.}^2\,\text{ա} + 1 - 2 \cdot \text{ծոցաչ. ա} = 2 - 2\,\text{ծոցաչ. ա}$. ապա ուրեմն $2\,\text{ծոց}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ա} = 1 - \text{ծոցաչ. ա}$, զորոյ զհետ գայ

$$\text{ծոց}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \sqrt{\frac{1 - \text{ծոցաչ. ա}}{2}}:$$

Ա. Ի հաւաստութեանս զհետ գայ $\text{ծոցաչ. ա} = 1 - 2\,\text{ծոց}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ա}$:

Բ. Եթէ դնիցեմք $\text{ա} = 2\text{բ}$, ուստի եւ $\frac{1}{2}\,\text{ա} = \text{բ}$, յայնժամ փոխանակելով զզօրութիւնս զայս ի յետին հաւաստութեան (որ յԱ.) դառնի, $\text{ծոցաչ.} \cdot 2\text{բ} = 1 - 2\,\text{ծոց}^2\,\text{բ} = 1 - 2\,(1 - \text{ծոցաչ.}^2\,\text{բ})$ (ըստ Հ. 73. 1.) $= 2\,\text{ծոցաչ.}^2\,\text{բ} - 1$, յորմէ գտանիցի

$$\text{ծոցաչ.} \cdot \text{բ} = \sqrt{\frac{1 + \text{ծոցաչ.} \cdot 2\text{բ}}{2}}.$$ ըստ այսմ է եւ

$$\text{ծոցաչ.} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \sqrt{\frac{1 + \text{ծոցաչ. ա}}{2}},$$ եթէ դարձեալ $\text{բ} = \frac{1}{2}\,\text{ա}$, ուստի եւ $2\text{բ} = \text{ա}$ դիցի:

$$\text{Գ. Ի շօշ.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{\text{ծոց}\ \frac{1}{2}\,\text{ա}}{\text{ծոցաչ.} \cdot \frac{1}{2}\,\text{ա}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1 - \text{ծոցաչ. ա}}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1 + \text{ծոցաչ. ա}}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \text{ծոցաչ. ա}}{1 + \text{ծոցաչ. ա}}},$$ եւ $\text{իմշօշ.}\ \frac{1}{2}\,\text{ա} = \dfrac{1}{\text{շօշ.}\ \frac{1}{2}\,\text{ա}} = \sqrt{\dfrac{1 + \text{ծոցաչ. ա}}{1 - \text{ծոցաչ. ա}}}$ (Հ. 73. Ա. 3.): Դարձեալ

$$\text{հատ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{1}{\text{ծոցակ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա}} = \sqrt{\frac{2}{1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\,(2+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})}} (\text{Հ}.\ 73.\ 3.),\ \text{եւ}$$

$$\text{եմհատ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{1}{\text{ծոց}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա}} = \sqrt{\frac{2}{1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})}} (\text{Հ}.\ 73.\ 5.)\text{։}$$

Գ. Ըստ Հ. 73. 6, է շծոց ա $= 1 -$ ծոցակ. ա. իսկ արդ ըստ մերոյ խնդրոյս եւս է $1 -$ ծոցակ. ա $=$ 2 ծոց^2 $\tfrac{1}{2}$ ա. ուրեմն ըստ այսմ փոխանակելով շծոց ա $= 2$ ծոց^2 $\tfrac{1}{2}$ ա։

Ե. Ըստ Գ, է $\text{շօշ}^2.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \dfrac{1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}{1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}$

$$= \frac{(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})(1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})}{(1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2} = \frac{1-\text{ծոցակ}^2.\ \text{ա}}{(1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2}$$

$$= \frac{\text{ծոց}^2\ \text{ա}}{(1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2}$$ զորոյ զհետ գայ եւս

$$\text{շօշ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{\text{ծոց}\ \text{ա}}{1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}\text{։}$$

Ըստ նմին օրինակի է $\text{շօշ}^2.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \dfrac{1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}{1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա}} =$

$$\frac{(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2}{(1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա})(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})} = \frac{(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2}{1-\text{ծոցակ}.^2\ \text{ա}}$$

$$= \frac{(1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա})^2}{\text{ծոց}^2\ \text{ա}},$$ զորոյ զհետ գայ եւս

$$\text{շօշ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}{\text{ծոց}\ \text{ա}}\text{։}$$

Զ. Որովհետեւ $\text{եմշօշ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \dfrac{1}{\text{շօշ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա}}$. ուրեմն

$$\text{եմշօշ}.\ \tfrac{1}{2}\,\text{ա} = \frac{1+\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}{\text{ծոց}\ \text{ա}} = \frac{\text{ծոց}\ \text{ա}}{1-\text{ծոցակ}.\ \text{ա}}\text{։}$$

77. Խնդիր: Տանուցեալ ծոց միոյ անկեան կամ աղեղան, ծոց կրկնապատկի այնր անկեան կամ աղեղան գտանել:

Լուծումն: Իցէ (Ձեւ 7.) աղ. ԱԴ = աղ. ԲԴ = ա, ուստի եւ աղ. ԱԲ = 2ա. արդ եթէ զնոյն կազմած, զոր յառաջնում համարի յօրինեցաք, հաստատուն պահիցեմք, յայնժամ վասն նմանութեան ԱԿԵ եւ ԱԲՊ երեքանկեանց, է

ԱԿ : ԿԵ = ԱԲ : ԲՊ, այս է 1 : ծոցակ. ա = 2 ծոց ա : ծոց 2 ա, յորմէ ծոց 2ա = 2 ծոց ա . ծոցակ. ա:

78. Խնդիր: Տանուցեալ շօշափող միոյ աղեղան, ծոց եւ ծոցակից նորին աղեղան գտանել:

Լուծումն: Ըստ Հ. 73 . 3, է հատ. ա = $\dfrac{1}{\text{ծոցակ. ա}}$, եւ եւս ըստ Հ. 73. Ա, է հատ. ա = $\sqrt{1 + \text{շօշ}^2 \cdot \text{ա}}$, ուրեմն $\dfrac{1}{\text{ծոցակ. ա}} = \sqrt{1 + \text{շօշ}^2 \cdot \text{ա}}$, յորմէ ծոցակ. ա = $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{շօշ}^2 \cdot \text{ա}}}$: Դարձեալ է ծոց ա = շօշ. ա × ծոցակ. ա (Հ. 73 . 2.), ուստի փոխանակելով

$$\text{ծոց ա} = \frac{\text{շօշ. ա}}{\sqrt{1 + \text{շօշ}^2 \cdot \text{ա}}}$$

79. Է հատ. ա = շօշ. ա + շօշ. $\left(45^{0} - \dfrac{\text{ա}}{2}\right)$:

Ցուցումն: Իցէ ԲԱԳ = ա (Ձեւ 9.) ծանուցեալ անկիւնն: Յորժամ ԱԲ կէս երկակորով յԱ կենդրոնէ ձգիցի աղեղն ԲԴ, եւ ԲԳ եւս կանգնիցի ուղղորդ յԱԲ, յայնժամ ԲԳ = շօշ. ա, եւ ԱԳ = հատ. ա: Արդ առնիջիր ԳԵ = ԳԲ, եւ ի Բ գագաթանէ ձգեա ընդ Ե ուղիղ գիծ մի, որ յԱԷ ուղղորդ գծէ կանգնելոյ յԱ ի վերայ ԱԲ գծի, սահմանիցի յԷ, եւ ի Բ կէտէ իբրեւ կենդրոնէ ԱԲ կէս երկակորով ձգեա զաղեղն ԱԶ. լինիցի ԱԷ = շօշ. աղ. ԱԶ = շօշ. ԱԲԷ

=շօշ. բ: Իսկ արդ որովհետեւ ΔԱԷԵ ∞ ΔԲԳԵ· ուստի եւ ԱԷ=ԱԵ=շօշ. բ:

Արդ որովհետեւ յուղղանկիւն ԱԲԷ եռանկեան անկիւնն Է+բ=90°, եւ ի հաւասարասրուն ԲԳԵ եռանկեան անկ. Գ+2·ԳԲԵ=180°=2·90°, վասն այսորիկ Գ+2·ԳԲԵ=2(Է+բ)=2Է+2բ· եւ քանզի Է=անկ.ԳԲԵ, նմին իրի փոխանակելով Գ+2·Է=2Է+2բ· զորոյ գտեալ գայ բ=½Գ= $\frac{90^0-\text{ա}}{2}=45^0-\frac{\text{ա}}{2}$ · զորոյ գտեալ գայ ԱԷ=ԱԵ=

$$\text{շօշ.}\cdot\text{բ}=\text{շօշ.}\left(45^0-\frac{\text{ա}}{2}\right):$$

Արդ՝ որովհետեւ ԱԳ=ԳԵ+ԵԱ=ԲԳ+ԱԷ· ուստի փոխանակելով հատ.ա=շօշ.ա

$$+\text{շօշ.}\left(45^0-\frac{\text{ա}}{2}\right):$$

80. Բովանդակութիւն ծոցոց երկուց ԱԲ եւ ԱԴ աղեղանց (Ձեւ 10.) համեմատի ընդ այլակերպութեան նոյին ծոցոց, որպէս միանգամ շօշափող կիսոյ բովանդակութեան աղեղանցն այնոցիկ կշռեսցի առ շօշափող կիսոյ այլակերպութեան նոցա: Այս ինքն, եթէ աղ.ԱԲ=ա, եւ աղ.ԱԴ=բ, յայնժամ ծոց ա

$$+\text{ծոց բ}:\text{ծոց ա}-\text{ծոց բ}=\text{շօշ.}\cdot\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}:\text{շօշ.}\cdot\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}:$$

Առա աղ.ԱԵ=աղ.ԱԲ=ա, ապա ձգեա զծոյն ԲԵ, զկէս երկակատուրն ԱԻ ուղղորդ ի ԲԵ· ԴՌ∥ԲԵ, եւ ԴՋ∥ԱՔ, եւ յաւելջիր զլարն ԲՋ եւ ՋԵ: Ի կատարած՝ ի Ջ վայրէ ՋԷ ∥ ԱԿ կէս երկակտրով ձգեա զաղեղն ԸԷԹ, եւ ի կէտն հատանելոյ Է կանգնեա զուղղորդ գիծն ԺԻ:

Արդ զայս կազմածոյ գտեա գայ, եթէ աղ.ԴԵ=ԱԵ+ԱԴ=ա+բ, աղ.ԲԴ=ԱԲ−ԱԴ=ա−բ, ԲՊ=ծոց ա, ԴՌ=ծոց բ, ՄԵ=ԵՊ+ՊՄ=ԲՊ+ԴՌ=ծոց ա + ծոց բ, եւ ԲՄ=ԲՊ−

ՄՊ = ԲՊ − ԴՌ = ծոց ա − ծոց բ լինի։ Դարձեալ է անկ. ԴՁԵ = յ = ½ աղ. ԴԵ = $\frac{\text{ա} + \text{բ}}{2}$, եւ անկ. ԲՁԴ = փ = ½ աղ. ԲԴ = $\frac{\text{ա} - \text{բ}}{2}$. ուստի ԷԻ = շօշ. յ = շօշ. $\frac{\text{ա} + \text{բ}}{2}$ եւ ԷԺ = շօշ. փ = շօշ. $\frac{\text{ա} - \text{բ}}{2}$։

Իսկ արդ որովհետեւ երեքանկիւնքն ՄԵՁ եւ ԷԻՁ, ԲՄՁ եւ ԺԷՁ միմեանց նմանք են, վասն այնորիկ ՄԵ : ԷԻ = ՄՁ : ԷՁ = ԲՄ : ԷԺ, կամ ՄԵ : ԲՄ = ԷԻ : ԷԺ. յորմէ ծագէ փոխանակելով

ծոց ա + ծոց բ : ծոց ա − ծոց բ = շօշ. $\frac{\text{ա} + \text{բ}}{2}$: շօշ. $\frac{\text{ա} - \text{բ}}{2}$

81. Խնդիր։ Ծանուցեալ են ծոցք եւ ծոցակիցք երկոցունց ԱԲ = ա, եւ ԲՆ = բ աղեղանց (Ձեւ 8.). արդ առաջի կայ գծոց եւ գծոցակից բաղադրութեան, եւս եւ այլակերպութեան նոցա գտանել։

Լուծումն։ Արա աղ. ԲՄ = աղ. ԲՆ = բ, յայտ է եթէ աղ. ԱՆ = աղ. ԱԲ + աղ. ԲՆ = ա + բ, եւ աղ. ԱՄ = աղ. ԱԲ − աղ. ԲՄ = ա − բ։ Ձգեա զճառագայթսն ԱԿ, ՄԿ, ԲԿ եւ ՆԿ, զլարն ՄՆ, եւ զուղիղ գիծսն ՄՍ, ԲՊ, ՆՌ, եւ ԴՁ ուղղորդս յԱԿ. յայտ եւս է, թէ են

ԲՊ = ծոց ա, ԿՊ = ծոց–կ. ա,
ՆԴ = ծոց բ, ԿԴ = ծոց–կ. բ,
ՆՌ = ծոց (ա + բ), ԿՌ = ծոց–կ. (ա + բ),
ՄՍ = ծոց (ա − բ), ԿՍ = ծոց–կ. (ա − բ)։

Ձգեա դարձեալ զԴԵ ⊥ ՆՌ, եւ զՄԷ ⊥ ԴՁ, եւ լինի △ԴԵՆ ≅ △ԴԷՄ, որովհետեւ ԴՆ = ԴՄ, եւ անկ. Ե = Է = 90°, եւ անկ. ՆԴԵ = անկ. ԴՄԷ, որովհետեւ ԴԵ ∥ ՄԷ. զորս զհետ գայ, եթէ ՆԵ = ԴԷ եւ ԴԵ = ՄԷ։ Վասն այսորիկ է

1) ծոց (ա + բ) = ՆՌ = ՆԵ + ԵՌ = ՆԵ + ԴՋ
= ԴՋ + ՆԵ

2) ծոց (ա — բ) = ՄՍ = ԷՋ = ԴՋ — ԴԷ
= ԴՋ — ՆԵ

3) ծոցաձ. (ա + բ) = ԿՌ = ԿՋ — ՋՌ = ԿՋ — ԴԵ

4) ծոցաձ. (ա — բ) = ԿՍ = ԿՋ + ՋՍ = ԿՋ + ՄԷ
= ԿՋ + ԴԵ

Ապա ուրեմն գործ է միայն այսուհետեւ զգիծսն ԴՋ, ՆԵ, ԿՋ եւ ԴԵ ծանուցեալ քանիօնութեամբք, այս ինքն ի ձեռն ԱԿ = 1 կէս երկակորդոյ, եւ ծոց ա, ծոց բ, ծոցաձ. ա, եւ ծոցաձ. բ քանիօնութեանց գրուշմել:

Արդ որովհետեւ Δ ԲԿՊ ∾ Δ ԿԴՋ ∾ Δ ԴԵՆ (Երկր. Հ. 98.), ուրեմն ԴՋ : ԴԿ = ԲՊ : ԲԿ, այս է ԴՋ : ծոցաձ. բ = ծոց ա : 1, յորմէ

ԴՋ = ծոց ա ծոցաձ. բ:

Դարձեալ ՆԵ : ՆԴ = ԿՊ : ԲԿ, այս ինքն ՆԵ : ծոց բ = ծոցաձ. ա : 1, յորմէ

ՆԵ = ծոցաձ. ա ծոց բ:

Իբրեւ զզօրութիւնս զայսոսիկ հաստատիցեմք ի հաւասարութիւնս 1 եւ 2, ելանէ

Ա) ծոց (ա + բ) = ծոց ա ծոցաձ. բ +
ծոցաձ. ա ծոց բ, եւ

Բ) ծոց (ա — բ) = ծոց ա ծոցաձ. բ —
ծոցաձ. ա ծոց բ:

Սոյնգունակ յաստցեալ նման երեքանկիւնս համեմատի ԿՋ : ԿԴ = ԿՊ : ԿԲ, այս ինքն ԿՋ : ծոցաձ. բ = ծոցաձ. ա : 1, ուստի եւ

ԿՋ = ծոցաձ. ա ծոցաձ. բ,

եւ քանզի ԴԵ : ԴՆ = ԲՊ : ԲԿ, այս ինքն ԴԵ : ծոց բ = ծոց ա : 1, ուրեմն

ԴԵ = ծոց ա ծոց բ:

Զայսոսիկ զօրութիւնս փոխանակելով ի հաւասարութիւնս 3, եւ 4, ելանեն

Գ) ծոցաձ. (ա + բ) = ծոցաձ. ա ծոցաձ. բ —
ծոց ա ծոց բ, եւ

$$\text{Դ) ծոցակ.}\,(\text{ա} - \text{բ}) = \text{ծոցակ. ա ծոցակ. բ} + \text{ծոց ա ծոց բ} :$$

Այս չորս օրինակքս, առ հասարակ դրոշմին երկու մօտաւորօքս

$$\text{ծոց}\,(\text{ա} \pm \text{բ}) = \text{ծոց ա ծոցակ. բ} \pm \text{ծոցակ. ա ծոց բ}$$
$$\text{ծոցակ.}\,(\text{ա} \pm \text{բ}) = \text{ծոցակ. ա ծոցակ. բ} \mp \text{ծոց ա ծոց բ} :$$

Ե. Հասարակաց օրինակքն, որք ի համարս գտան, աղբիւր ինն են, յորմէ ծագեն բազում այլ հասարակաց օրինակք: Շատ իցէ մեզ քաղել զայնոսիկ՝ որ կարեւորագոյնքն իցեն, եւ առ յապա յօգուտ լինել կարիցեն:

Ա. Եթէ յԱ եւ ի Գ. հասարակաց օրինակսն դնիցեմք $\text{բ} = \text{ա}$, ելանէ $\text{ծոց }2\text{ա} = \text{ծոց ա ծոցակ. ա} + \text{ծոց ա ծոցակ. ա} = 2\text{ծոց ա ծոցակ. ա}$, եւ $\text{ծոցակ. }2\text{ա} = \text{ծոցակ. ա ծոցակ. ա} - \text{ծոց ա ծոց ա} = \text{ծոցակ.}^2\text{ ա} - \text{ծոց}^2\text{ ա}$, կամ եթէ ի սոսին եւս $\text{ծոցակ.}^2\text{ ա} = 1 - \text{ծոց}^2\text{ ա}$ կամ $\text{ծոց}^2\text{ա} = 1 - \text{ծոցակ.}^2\text{ ա}$ հաստատիցեմք, լինիցի $\text{ծոցակ. }2\text{ա} = 1 - 2\,\text{ծոց}^2\text{ ա}$ եւ կամ $\text{ծոցակ. }2\text{ ա} = 2\,\text{ծոցակ.}^2\text{ ա} - 1$: Օգնականութեամբ այսոցիկ մարթ է գտանել զծոց 2ա եւ զծոցակ. 2ա, եթէ ծանուցեալ իցեն ծոց ա եւ ծոցակ. ա: Նոյն խոտորնակի եւս անտասին յերկուց յետին հասարակաց օրինակաց մարթ է եւս զծոց ա, եւ զծոցակ. ա խնդրել. քանզի ծոց ա =

$$\sqrt{\left(\frac{1 - \text{ծոցակ. }2\text{ա}}{2}\right)},\ \text{եւ ծոցակ. ա} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{1 + \text{ծոցակ. }2\text{ա}}{2}\right)},$$

եւ կամ եթէ ի նոսա ա եւ բ դնիցեմք ի տեղի 2ա եւ 2բ քանիօնութեանց, յայնժամ

$$\text{ծոց }\frac{\text{ա}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{ծոցակ. ա}}{2}\right)},\ \text{եւ ծոցակ.}\frac{\text{ա}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{ծոցակ. ա}}{2}\right)} :$$

Բ. Յաւելով ի միմեանս զերկոսին զայսոսիկ հաւասարութիւնս

$\text{ծոց}\,(\text{ա}+\text{բ}) = \text{ծոց ա ծոցաձ.}\,\text{բ} + \text{ծոցաձ.}\,\text{ա ծոց բ}$

եւ զծոց $(\text{ա}-\text{բ}) = \text{ծոց ա ծոցաձ.}\,\text{բ} - \text{ծոցաձ.}\,\text{ա ծոց բ}$,

ելանէ $\text{ծոց}\,(\text{ա}+\text{բ}) + \text{ծոց}\,(\text{ա}-\text{բ}) = 2\,\text{ծոց ա ծոցաձ.}\,\text{բ}$,

իսկ հանելով ի միմեանց զնոյն հաւասարութիւնս,

$\text{ծոց}\,(\text{ա}+\text{բ}) - \text{ծոց}\,(\text{ա}-\text{բ}) = 2\,\text{ծոցաձ.}\,\text{ա ծոց բ}$. յորս եթէ ա եւ բ դնիցեմք փոխանակ $\text{ա}+\text{բ}$ եւ $\text{ա}-\text{բ}$ քան., ուստի եւ $\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}$ եւ $\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}$ փոխանակ ա եւ բ քանիօնութեանց, լինիցի $\text{ծոց ա} + \text{ծոց բ} =$

$$2\,\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right),$$ եւ $\text{ծոց ա} - \text{ծոց բ} =$

$$2\,\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right):$$

Նմնեւին նոյնն օրինակաւ գտանի

$$\text{ծոցաձ.}\,(\text{ա}+\text{բ}) + \text{ծոցաձ.}\,(\text{ա}-\text{բ}) = 2\,\text{ծոցաձ.}\,\text{ա}\;\text{ծոցաձ.}\,\text{բ}$$

$$\text{ծոցաձ.}\,(\text{ա}-\text{բ}) - \text{ծոցաձ.}\,(\text{ա}+\text{բ}) = 2\,\text{ծոց ա ծոց բ},$$

եւ

$$\text{ծոցաձ.}\,\text{ա} + \text{ծոցաձ.}\,\text{բ} = 2\,\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right)$$

$$\text{ծոցաձ.}\,\text{բ} - \text{ծոցաձ.}\,\text{ա} = 2\,\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right):$$

Իբրեւ բաժանիցին ընդ միմեանս երկաքին հաւասարութիւնքս $\text{ծոց ա} + \text{ծոց բ} = (\dots\dots)$ եւ $\text{ծոց ա} - \text{ծոց բ} = (\dots)$, ելանէ

$$\frac{\text{ծոց ա} - \text{ծոց բ}}{\text{ծոց ա} + \text{ծոց բ}} = \frac{2\,\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right)}{2\,\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոցաձ.}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right)}$$

յորմէ վասն ըստ 73. 4 համարոյ

$$\frac{\text{ծոցակ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)}{\text{ծոց}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)} = \text{էմշօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right) \text{ եւ (Հ. 73. 2.)}$$

$$\frac{\text{ծոց}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)}{\text{ծոցակ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)} = \text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)$$ լինելոյ, ծառէ հասարակաց օրինակս

$$\frac{\text{ծոց } ա - \text{ծոց } բ}{\text{ծոց } ա + \text{ծոց } բ} = \text{էմշօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right) \cdot \text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right),$$ կամ (Հ. 73. Ա. 3.), վասն $\text{էմշօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right) = \frac{1}{\text{շօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)}$ լինելոյ է եւս

$$\frac{\text{ծոց } ա - \text{ծոց } բ}{\text{ծոց } ա + \text{ծոց } բ} = \frac{\text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)}{\text{շօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)} \text{ (Համեմ. ընդ. Հ. 80.)}$$

82. **Խնդիր**: Գիտացեալ զծոցակիցս երկուց անկեանց, զծոցակից կիսոյ բովանդակութեան անկեանցն այնոցիկ գտանել:

Լուծումն: Ըստ Հ. 80. Գ. որ հասար. է $\text{ծոցակ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right) = \text{ծոցակ.}\frac{ա}{2}\,\text{ծոցակ.}\frac{բ}{2} - \text{ծոց}\frac{ա}{2}\,\text{ծոց}\frac{բ}{2}$: Իսկ արդ ըստ Հ. 80. Ա, է եւս $\text{ծոցակ.}\frac{ա}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\text{ծոցակ. } ա}{2}\right)}$:

$\text{ծոցակ.}\frac{բ}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\text{ծոցակ. } բ}{2}\right)}$, $\text{ծոց}\frac{ա}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-\text{ծոցակ. } ա}{2}\right)}$ եւ $\text{ծոց}\frac{բ}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-\text{ծոցակ. } բ}{2}\right)}$:
Փոխանակելով զայսոսիկ նշանակութիւնս ի վերագոյն

եղեալ ձեւն, ելանէ ծոցաձ. $\left(\frac{ա+բ}{2}\right)=$

$$\sqrt{\left(\frac{1+ծոցաձ.\, ա}{2}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1+ծոցաձ.\, բ}{2}\right)}-$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-ծոցաձ.\, ա}{2}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-ծոցաձ.\, բ}{2}\right)},$$ կամ ծոցաձ.

$$\left(\frac{ա+բ}{2}\right)=\frac{\sqrt{[(1+ծոցաձ.\, ա)(1+ծոցաձ.\, բ)]}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{[(1-ծոցաձ.\, ա)(1-ծոցաձ.\, բ)]}}{2}$$

Խորհուրդ տամք ուսանելեաց, զհասարակաց օրինակս, զորս յանկինաչափութեան առա եդաք, (զանց արարեալ զբազմօք, առ չատնելոյ չափոյ մատենիս). ասել ի բերանոյ, որպէս զի ունիցին ի մտի հանապազ քանզի սոքա ի մաթեմատիկեան գիտութիւնս կարի կարեւորք են: Զայս յանձն առնեմք առանձինն խնամոց ուսուցչաց:

ԳԼՈՒԽ Բ

ԵՌԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

(ՅԱՆՁՈՒԿ ՄԻՏՍ)

83. Յամենայն *ուղղանկիւն* ԱԲԳ (*Ձեւ* 11.) *երեքանկեան ։*

1) *Ներքնաձիգն համեմատի ընդ միոյ միոյ յիջից անտի, որպէս միանգամ կշռիցի կէս երկակուրն (տախտակի) առ ծոց անկեանն որ կայ դէմ յանդիման այնր իջի. այս ինքն* ԱԲ : ԲԳ = ձ : *ծոց ա ։*

2) *Ներքնաձիգն համեմատի ընդ միոյ միոյ յիջից անտի, որպէս կշռիցի կէս երկակուրն (տախտակի) առ ծոցակից անկեանն, որ կայ առընթեր այնր իջի. այս է* ԱԲ : ԱԳ = ձ : *ծոցակ. ա ։*

3) *Կէս երկակուրն տախտակի համեմատի ընդ շօշափողի միոյ միոյ ի սուր անկեանց, որպէս մի էջք, որ կայ առընթեր այնր անկեան, առ միւս էջն կշռիցի. այս է* ԱԳ : ԲԳ = ձ : *շօշ. ա ։*

Նշանագիրքս ա եւ բ ցուցանեն զանկիւնսն որ կան ի գագաթունս Ա *եւ* Բ ։

*Ցուցումն ։ Ձգեա յ*Ա *կենդրոնէ անտի* ԱԳ *կէս երկակուրով զ*ԴԵ *աղեղն բոլորակի. ի* Դ *կիտէ ի վերայ* ԱԳ *ուղղութեան ձգեա զուղղորդ գիծն* ԴԶ, *որ ի* ԲԳ *կողմանէ հաւասար հեռաւոր իցէ. ուստի եւ վասն* ΔԱԲԳ ∾ ΔԱԶԴ *լինելոյ,*

ԱԲ : ԲԳ = ԱԳ : ԴԶ, *եւ* ԱԲ : ԱԳ = ԱԳ : ԱԶ,
այս ինքն

1) ԱԲ : ԲԳ = ձ : *ծոց ա*, *եւ* 2) ԱԲ : ԱԳ = ձ : *ծոցակ. ա ։ Դարձեալ ի վերայ* ԱԳ *իջին կանգնեա ի կէան* Ե *զուղղորդ գիծն* ԵԷ, *որպէս զի դարձեալ իցէ* ԵԷ ∥ ԲԳ. *վասն որոյ*

ԱԳ : ԲԳ = ԱԵ : ԵԷ, *այս է* ԱԳ : ԲԳ = ձ : *շօշ. ա*

Ա. Արդ որովհետեւ ԱԲ : ԲԳ = ճ : ծոց ա, եւ ԱԲ : ԱԳ = ճ : ծոցակ. ա. ուրեմն եւ ԲԳ : ԱԳ = ծոց ա : ծոցակ. ա :

Բ. Իսկ նախին օրինակի մարթ է ցուցանել եւ զմօտաւոր համեմատութիւնս

ԱԲ : ԱԳ = ճ : ծոց բ
ԱԲ : ԲԳ = ճ : ծոցակ. բ
ԲԳ : ԱԳ = ճ : շօշ. բ
ԱԳ : ԲԳ = ծոց բ : ծոցակ. բ ,

Գ. Որովհետեւ ա եւ բ միահամուռ գործեն մի ուղիղ անկիւն ուրեմն մին է բովանդակումն միւսոյն. եւ շօշ. ա = խճշօշ. բ, եւ շօշ. բ = խճշօշ. ա. ուստի եւ

ԱԳ : ԲԳ = ճ : խճշօշ. բ, եւ
ԲԳ : ԱԳ = ճ : խճշօշ. ա :

84. Յամենայն եռանկիւնս ԱԲԳ (Ձեւ 12.) բովանդակութիւն երկուց կողմանց համեմատի ընդ այլակերպութեան նոյին իսկ կողմանց, որպէս միանգամ շօշափող կիսոյ բովանդակութեան անկեանցն՝ (որ կան դէմ յանդիման կողմանցն այնոցիկ) կշռիցի առ շօշափող կիսոյ այլակերպութեան նոյին անկեանց, այս ինքն է

$$\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ} : \text{ԱԲ} - \text{ԱԳ} = \text{շօշ.}\left(\frac{\text{գ} + \text{բ}}{2}\right) : \text{շօշ.}\left(\frac{\text{գ} - \text{բ}}{2}\right) :$$

գ եւ բ ցուցանիցեն զանկիւնս յանդիմանակացս ԱԲ եւ ԱԳ կողմանց:

ՅԱ կիտէ իբրեւ ի միջավայրէ ԱԳ կէս երկակրտով ձգեա բոլորակ ինչ, որոյ շրջապատն հատանիցէ զկողմն ԱԲ ի Դ: Երկայնեա զկողմն ԲԱ մինչեւ ցԵ, ձգեա զուղիղ գիծսն ԳԴ եւ ԳԵ, եւ ի կէտն Դ ի վերայ ԳԴ գծի կանգնեա զուղղորդն ԴԶ:

ՅԱԳԴ եռանկեան անկիւնն ԱԴԳ = ԱԳԴ, որովհետեւ ԱԳ = ԱԴ. նմին իրի եւ ԱԳԲ = ԱԳԴ +

ԲԳԴ = ԱԴԳ + ԲԳԴ։ Դարձեալ որովհետեւ անկիւնն ԱԴԳ է արտաքին անկիւն ԲԳԴ երեքանկեան, նմին իրի է ԱԴԳ = ԱԲԳ + ԲԳԴ, կամ ԱԲԳ = ԱԴԳ — ԲԳԴ։ Արդ առ համառօտիւք դրոշմելոյ, գրեսցուք անկիւն ԱԲԳ = բ, անկ. ԱԴԳ = մ, եւ անկ. ԲԳԴ = ն, ուստի եւ մ + ն = է, եւ մ — ն = բ։ Բովանդակութիւն այսոցիկ հաւասարութեանց տայ

$$\text{մ} = \frac{\text{է} + \text{բ}}{2}, \text{ խոկ այլակերպութիւն առնէ } \text{ն} = \frac{\text{է} - \text{բ}}{2}։$$

Անկիւնն ԳԴԵ որպէս անկիւն ի կէս բոլորակի, է ուղիղ, ուրեմն յուղղանկիւն ԳԴԵ երեքանկեան է ԳԴ : ԳԵ = Ճ : շօշ. մ, եւ ի ԳԴԶ ուղղանկիւն երեքանկեան ԳԴ : ԴԶ = Ճ : շօշ. ն. կամ որովհետեւ յերկոսին համեմատութիւնս եւս հաւասար են առաջնորդքն, նմին իրի եւս ԳԵ : ԴԶ = շօշ. մ : շօշ. ն։

Դարձեալ ի ԲԳԵ երեքանկեան ԴԶ գիծն հաւասար հեռաւոր է ի ԳԵ կողմանէ, քանզի երկոքեանքն եւս ուղղորդ են ի ԳԴ. ուստի եւ ԲԵ : ԲԴ = ԳԵ : ԴԶ. նմին իրի եւս

$$\text{ԲԵ : ԲԴ} = \text{շօշ. մ : շօշ. ն, կամ}$$

$$\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ : ԱԲ} - \text{ԱԳ} = \text{շօշ.}\left(\frac{\text{է} + \text{բ}}{2}\right) : \text{շօշ.}\left(\frac{\text{է} - \text{բ}}{2}\right).$$

քանզի ԲԵ = ԱԲ + ԱԵ = ԱԲ + ԱԳ, եւ ԲԴ = ԱԲ — ԱԴ = ԱԲ — ԱԳ։

85. Երկակտուրն բոլորակին՝ որ զերեքանկեամբ խիք ձգիցի արտաքոյ, հաւասար է միոյ կողման նորին բաժանելոյ ընդ ծոց յանդիմանակաց անկեան։

Շուրջ զԱԲԳ երեքանկեամբ ձգեալ իցէ արտաքոյ բոլորակն՝ որոյ կենդրոն իցէ Կ (Ձեւ 13.)։ Ըստ Հ. 72, կէսն ԱԲ լարին է ծոց կիսոյ ԱԲ աղեղան, կամ կիսոյ նմին պատշաճեալ ԱԿԲ կենդրոնական անկեան, եթէ դիցի ԱԿ կէս երկակտուր պաշտօնաւորաց անկիւնաչափութեան։ Իսկ արդ յայամ արուեստական ծոցոյ, ըստ. Հ. 74. Տեղեկ. 6, գտանի ծոցն ընական յորժամ արուեստականն կատարեսցի ընդ կէս երկակատուրն ԱԿ․ որով եւ ծոց $\frac{1}{2}$ԱԿԲ $= \frac{\frac{1}{2}\text{ԱԲ}}{\text{ԱԿ}} = \frac{\text{ԱԲ}}{2\text{ԱԿ}}$, յորմէ $2\text{ԱԿ} = \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ծոց } \frac{1}{2}\text{ԱԿԲ}}$։ Իսկ արդ $\frac{1}{2}$ ԱԿԲ $=$ ԱԳԲ, ուրեմն $2\text{ԱԿ} = \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ծոց ԱԳԲ}}$։

Զատացելոցս զհետ գայ, զի եթէ զկողմանս երեքանկեան Ա, Բ, Գ նշանագրովք նշանակիցեմք, եւ զնոցին յանդիմանակաց անկիւնս ա, բ, գ նշանագրովք, եւ զկէս երկակատուր բոլորակին, որ արտաքոյ ձգիցի, դնիցեմք $=$ ձ, յայնժամ $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = 2\text{ձ}$, $\frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}} = 2\text{ձ}$, $\frac{\text{Գ}}{\text{ծոց գ}} = 2\text{ձ}$․ ուստի եւ $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}} = \frac{\text{Գ}}{\text{ծոց գ}}$։ Այս ինքն, իւրաքանչիւր կողմն երեքանկեան բաժանեալ ընդ ծոց յանդիմանակաց անկեան, տանէ զնոյն քանորդ։ Եւ կամ թէ Ա : Բ : Գ $=$ ծոց ա : ծոց բ : ծոց գ․ այսինքն Յամենայն երեքանկիւնս կողմանքն այնպէս համեմատին ընդ միմեանս, որպէս ծոցք նոցին յանդիմանակաց անկեանց։

86․ **Խնդիր**։ Ի կողմանց ինչ ծանուցելոց եւ յանկեանց միոյ երեքանկեան, զտարածութիւն երեսաց նորին գտանել։

Լուծումն։ Յ ԱԲԳ երեքանկեան (Երկր․ Ձեւ 68․) իցէ ԱԲ $=$ Ա, ԲԳ $=$ Բ, ԱԲԳ $=$ գ, եւ տարածութիւն երեսաց $=$ Տ։ Արդ է (Երկ․ Հ․ 180․) Տ $= \frac{1}{2}$Բ․ԱԴ։ Իսկ արդ ըստ․ Հ․ 85, յԱԲԴ ուղղանկիւն երեքանկեան $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ծոց } 90^{0}} = \frac{\text{ԱԴ}}{\text{ծոց ԱԲԴ}}$, յորմէ եւ վասն ծոց $90^{0} = 1$, ԱԲ $=$ Ա, եւ ԱԲԴ $=$ ԱԲԳ $=$ գ լինելոյ, ծագէ ԱԴ $=$ Ա ծոց գ․ ուստի եւ Տ $= \frac{1}{2}$ Ա․ Բ․ ծոց գ։

Հաւասարութիւնքն, որք ի Հ. 85, 86, եւ յերկրաչափութեան Հ. 76. ցուցան, են գլխաւոր հաստատակաց օրինակք բուն երեքանկիւնաչափութեան, քանզի նոքօք կարեմք յամենայն առանձինն դէպս ամենեւին կատարեալ զերեքանկիւնն հաշուել: Քանզի առ հասարակ զօրէն հաւասարութիւնքն $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}} = \frac{\text{Գ}}{\text{ծոց գ}}$, $\text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{Ա}\cdot\text{Բ ծոց գ}$, եւ $\text{ա} + \text{բ} + \text{գ} = 2\text{Ո} = 180^0$, որով չորք յեւթն մասանցս Ա, Բ, Գ, ա, բ, գ, Տ կարեն գտանել, եթէ մնացեալ երեք մասունքն ծանուցեալ իցեն, միայն թէ ծանուցեալքն չիցեն երեք անկիւնքս ա, բ, գ, ապա թէ ոչ հաւասարութիւնն $\text{ա} + \text{բ} + \text{գ} = 180^0$ լինիցի նոյնութեան, եւ յանձնէ իսկ ի բաց ջնջիցի: Արդ կամք են մեզ զառաջինն զդիւրագոյն դէպսն, այս ինքն զհաշուել ուղղանկիւն եւ հաւասարասրուն երեքանկեանց հարկանել ի գրի, եւ ապա յետ այնորիկ անցանել ի հաշիւս այլոց երեքանկեանց առ հասարակ:

87. Խնդիր: Զուղղանկիւն ինչ երեքանկիւն հաշուել:

Լուծումն: Իցեն Ա եւ Բ էջք ուղղանկիւն երեքանկեան, իսկ Գ ներքնաձիգ նորին. հարկ է զի իցէ $\text{գ} = 90^0$, եւ $\text{ծոց գ} = 1$. յորմէ եւ հաւասարութիւնքն՝ որ ի Հ. 85, եւ 86 ի հաշուել զուղղանկիւն երեքանկիւնս իցեն $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}} = \text{Գ}$, $\text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{Ա}\cdot\text{Բ}$, եւ $\text{ա} + \text{բ} = 90^0$:

Առաջին դէպք: Ծանուցեալ իցէ Գ ներքնաձիգն, եւ մի սուր անկիւն ա:

Ի յետին հաւասարութենէ անտի ելանէ $\text{բ} = 90 - \text{ա}$, ուստի եւ $\text{ծոց բ} = \text{ծոցձ. ա}$: Դարձեալ ի $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \text{Գ}$ հաւասարութենէ գտանի $\text{Ա} = \text{Գ ծոց ա}$, եւ ի $\frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}} = \text{Գ.}$ հաւասարութենէ $\text{Բ} = \text{Գ. ծոց բ} = \text{Գ. ծոցակ. ա}$: Իսկ ի կատարած փոխանակելով զզօրութիւնս Ա եւ Բ քանիօնութեանց ի $\text{S} = \frac{1}{2}\,\text{Ա} \cdot \text{Բ}$, ելանէ $\text{S} = \frac{1}{2}\,\text{Գ. ծոց ա} \cdot \text{Գ. ծոցակ. ա} = \frac{1}{2}\,\text{Գ.}^2\,\text{ծոց ա} \cdot \text{ծոցակ. ա} = \frac{1}{4}\,\text{Գ.}^2\,\text{ծոց 2ա}$ (Հ. 77.):

Երկրորդ դէպք: Ծանուցեալ իցէ մին յիջից Ա, եւ նմին յանդիմանակաց անկիւնն ա.

Յ $\text{ա} + \text{բ} = 90^0$ հաւասարութենէ ծագէ $\text{բ} = 90 - \text{ա}$, ուստի եւս $\text{ծոց բ} = \text{ծոցակ. ա}$: Դարձեալ է $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \text{Գ.}$, եւ զայսր $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութեան զհետ գայ $\text{Բ} = \frac{\text{Ա ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Ա ծոցակ. ա}}{\text{ծոց ա}}$, կամ $\text{Բ} = \text{Ա խ.շօշ. ա}$: Իսկ ի կատարած $\text{S} = \frac{1}{2}\,\text{Ա} \cdot \text{Ա խ.շօշ. ա} = \frac{1}{2}\,\text{Ա}^2\,\text{խ.շօշ. ա}$:

Երրորդ դէպք: Իցէ ծանուցեալ Ա էջքն, եւ նմին մօտակաց սուր անկիւնն բ.

Յ $\text{ա} + \text{բ} = 90^0$ հաւասարութենէս ծագէ $\text{ա} = 90 - \text{բ}$, եւ նմին իրի եւս $\text{ծոց ա} = \text{ծոցակ. բ}$: Դարձեալ է $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \text{Գ.}$, կամ $\text{Գ.} = \frac{\text{Ա}}{\text{ծոցակ. բ}}$, եւ ի $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութենէ ելանէ $\text{Բ} = \frac{\text{Ա ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Ա ծոց բ}}{\text{ծոցակ. բ}} = \text{Ա շօշ. բ}$: Իսկ ի կատարած $\text{S} = \frac{1}{2}\,\text{Ա} \cdot \text{Ա շօշ. բ} = \frac{1}{2}\,\text{Ա}^2\,\text{շօշ. բ}$:

Չորրորդ դէպք: Ծանուցեալ իցէ ներքնաձիգն Գ., եւ մին յիջից Ա.

Յ $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \text{Գ.}$ հաւասարութենէ ելանէ $\text{ծոց ա} = \frac{\text{Ա}}{\text{Գ.}}$, յորմէ կարեմք հասանել ի վերայ սուր անկեանս ա: Ապա յետ այնորիկ գտանեմք $\text{բ} = 90 - \text{ա}$, ուստի եւ

$\text{ծոցաձ}\cdot\text{բ} = \text{ծոց ա} = \frac{\text{Ա}}{\text{Գ}}$: Դարձեալ յ $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութենէ գտանի $\text{Բ} = \frac{\text{Ա ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Ա ծոցաձ}\cdot\text{ա}}{\text{ծոց ա}}$ $= \text{Ա ձմշօշ}\cdot\text{ա}$: Իսկ արդ ըստ Հ. 73, 4, $\text{ձմշօշ}\cdot\text{ա} = \frac{\sqrt{(1-(\text{ծոց ա})^2)}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{\text{Ա}^2}{\text{Գ}^2}\right)}}{\frac{\text{Ա}}{\text{Գ}}}$, կամ $\text{ձմշօշ}\cdot\text{ա} = \frac{\sqrt{(\text{Գ}^2-\text{Ա}^2)}}{\text{Ա}}$ զորս դնեա, գայ $\text{Բ} = \text{Ա}\cdot\frac{\sqrt{(\text{Գ}^2-\text{Ա}^2)}}{\text{Ա}}$ $= \sqrt{(\text{Գ}^2-\text{Ա}^2)}$: Եւ ի կատարած գտանի $\text{Տ} = \frac{1}{2}\text{Ա}\cdot\sqrt{(\text{Գ}^2-\text{Ա}^2)}$:

Չորրորդ դէպք: Ծանուցեալ իցեն երկուքին էջքն Ա եւ Բ.

Ի հաւասարութենէս $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ յառաջ գայ $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{ծոց բ}} = \frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$. Իսկ արդ, վասն $\text{ա} + \text{բ} = 90^0$ լինելոյ, եւ եւս $\text{ծոց բ} = \text{ծոցաձ}\cdot\text{ա}$, ուստի եւ $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{ծոցաձ}\cdot\text{ա}} = \frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$ կամ $\text{շօշ}\cdot\text{ա} = \frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}$, յորմէ եւս գտանի սուր անկիւնն ա :

Դարձեալ է $\text{Գ} = \frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}}$: Իսկ արդ (Հ·73·Ա·6·) $\text{ծոց ա} =$

$$\frac{\text{շօշ}\cdot\text{ա}}{\sqrt{(1+\text{շօշ}\cdot^2\text{ա})}} = \frac{\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}}{\sqrt{1+\frac{\text{Ա}^2}{\text{Բ}^2}}}$$, կամ $\text{ծոց ա} =$

$\frac{\text{Ա}}{\sqrt{(\text{Ա}^2+\text{Բ}^2)}}$, ուստի եւ $\text{Գ} = \frac{\text{Ա}\sqrt{(\text{Ա}^2+\text{Բ}^2)}}{\text{Ա}} = \sqrt{(\text{Ա}^2+\text{Բ}^2)}$: Եւ ի կատարած $\text{Տ} = \frac{1}{2}\text{Ա}\cdot\text{Բ}$:

88. Խնդիր: Զհաւասարասրուն երեքանկիւն ինչ հաշուել:

Լուծումն: Իցէ Բ խարիսխ, Ա մին յերկուցունց հաւասար սրունից հաւասարասրուն երեքանկեանս. ուստի եւ ի Հ. 85 դիցուք Գ = Ա, եւ գ = ա. ատրատին վասն զհաւասարասրուն երեքանկիւն ինչ հաշուելոյ ելանեն հաւասարութիւնքս $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$, $\text{Տ} = \frac{1}{2}\text{Ա}\cdot\text{Բ ծոց ա}$, եւ $2\text{ա} + \text{բ} = 180^0$:

Առաջին դէպք: Ծանուցեալ իցէ Բ խարիսխն եւ նմին առնթերակաց անկիւնն ա.

Յ $2\text{ա} + \text{բ} = 180^0$ հաւասարութենէ ծագէ $\text{բ} = 180 - 2\text{ա}$, եւ $\text{ծոց բ} = \text{ծոց } 2\text{ա}$: Դարձեալ ի $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութենէ յառաջ գայ $\text{Ա} = \frac{\text{Բ ծոց ա}}{\text{ծոց բ}} = \frac{\text{Բ ծոց ա}}{\text{ծոց } 2\text{ա}}$, կամ $\text{Ա} = \frac{\text{Բ ծոց ա}}{2\,\text{ծոց ա ծոցակ. ա}} = \frac{\text{Բ}}{2\,\text{ծոցակ. ա}}$: Վասն զտարածութիւն երեսացն հաշուելոյ գտանի $\text{Տ} = \frac{1}{2}\text{Բ}\cdot\frac{\text{Բ}}{2\,\text{ծոցակ. ա}}\cdot\text{ծոց ա} = \frac{1}{4}\frac{\text{Բ}^2\,\text{ծոց ա}}{\text{ծոցակ. ա}} = \frac{1}{4}\text{Բ}^2\,\text{շօշ. ա}$:

Երկրորդ դէպք: Ծանուցեալ իցեն խարիսխն Բ, եւ նմին յանդիմանակաց անկիւնն բ.

Զ $2\text{ա} + \text{բ} = 180^0$ հաւասարութենէս զհետ գայ $\text{ա} = \frac{180 - \text{բ}}{2} = 90 - \frac{\text{բ}}{2}$, նմին իրի եւ $\text{ծոց ա} = \text{ծոցակ.}\,\frac{\text{բ}}{2}$: Դարձեալ ի $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութենէ

գտանի $\text{Ա} = \frac{\text{Բ}\cdot\text{ծոց ա}}{\text{ծոց բ}} = \frac{\text{Բ ծոցակ.}\cdot\frac{\text{բ}}{2}}{\text{ծոց բ}}$, կամ, վասն ծոց բ

$= 2\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2} \cdot \text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}$ լինելոյ, եւ $Ա =$

$$\frac{Բ\,\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}}{2\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}\,\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}} = \frac{Բ}{2\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}}:$$ Եւ ի կատարած $Տ =$

$$\tfrac{1}{2}Բ \cdot \frac{Բ}{2\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}} \cdot \text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2} = \tfrac{1}{4}Բ^2 \cdot \frac{\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}}{\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}} = \tfrac{1}{4}Բ^2\,\text{էմշօշ.}\,\frac{բ}{2}:$$

Երրորդ դէպք: Տանուցեալ իցեն հաւասար սրունքն, եւ անկիւնն բ, որ ի նոցանէն փակիցի:

Ի $2ա + բ = 180$ հաւասարութեանս զհետ գայ $ա = 90 - \frac{բ}{2}$, նմին իրի եւ $\text{ծոց}\,ա = \text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}$:

Դարձեալ ի $\frac{Ա}{\text{ծոց}\,ա} = \frac{Բ}{\text{ծոց}\,բ}$ հաւասարութենէ ելանէ $Բ = \frac{Ա\,\text{ծոց}\,բ}{\text{ծոց}\,ա} = \frac{Ա\,\text{ծոց}\,բ}{\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}}$, կամ քանզի $\text{ծոց}\,բ = 2\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}$

$\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}$ է, եւ $Բ = \frac{2Ա\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}\,\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}}{\text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2}} = 2Ա\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2}$:

Եւ ի կատարած $Տ = \tfrac{1}{2}Ա \cdot 2Ա\,\text{ծոց}\,\frac{բ}{2} \cdot \text{ծոցակ.}\,\frac{բ}{2} =$ $\tfrac{1}{2}Ա^2\,\text{ծոց}\,բ$:

Չորրորդ դէպք: Տանուցեալ իցեն հաւասար սրունքն եւ յանդիմանակաց անկիւնն ա:

Ի $2ա + բ = 180^0$ հաւասարութեանս զհետ գայ $բ = 180 - 2ա$, նմին իրի եւ $\text{ծոց}\,բ = \text{ծոց}\,2ա$: Դարձեալ ի $\frac{Ա}{\text{ծոց}\,ա} = \frac{Բ}{\text{ծոց}\,բ}$ հաւասարութենէ գտանի $Բ =$

$\frac{Ա \text{ ծոց } բ}{\text{ծոց } ա} = \frac{Ա \text{ ծոց } 2ա}{\text{ծոց } ա}$, կամ $Բ = \frac{2 Ա \text{ ծոց } ա \text{ ծոցակ. } ա}{\text{ծոց } ա}$ $= 2 Ա \text{ ծոցակ. } ա$։ Իսկ ի կատարած տարածութիւնն երեւայ $Տ = \frac{1}{2} Ա \cdot 2Ա \cdot \text{ծոցակ. } ա \text{ ծոց } ա = \frac{1}{2} Ա^2 \text{ ծոց } 2ա$։

Հինգերորդ դէպք։ Ծանուցեալ իցէ հաւասար սրունքն Ա, եւ խարիսխն Բ։

Վասն $2ա + բ = 180^0$ լինելոյ է $\text{ծոց } բ = \text{ծոց } 2ա$. եւ ի $\frac{Ա}{\text{ծոց } ա} = \frac{Բ}{\text{ծոց } բ}$ հաւասարութենէ ելանիցէ $\frac{\text{ծոց } բ}{\text{ծոց } ա} = \frac{Բ}{Ա}$, կամ $\frac{\text{ծոց } 2ա}{\text{ծոց } ա} = \frac{Բ}{Ա}$. իսկ արդ $\text{ծոց } 2ա = 2 \text{ ծոց } ա \text{ ծոցակ. } ա$, ուստի $\frac{2 \text{ ծոց } ա \text{ ծոցակ. } ա}{\text{ծոց } ա} =$ $2 \text{ ծոցակ. } ա = \frac{Բ}{Ա}$, եւ $\text{ծոցակ. } ա = \frac{Բ}{2Ա}$։ Դարձեալ է $բ = 180 - 2ա$. ուրեմն $\frac{բ}{2} = 90 - ա$, վասն որոյ եւ $\text{ծոց} \frac{բ}{2}$ $= \text{ծոցակ. } ա = \frac{Բ}{2Ա}$։ Իսկ ի կատարած $Տ = \frac{1}{2} Ա \cdot Բ \sqrt{(1 - \text{ծոցակ.}^2 ա)} = \frac{1}{2} Ա \cdot Բ \sqrt{\left(1 - \frac{Բ^2}{4Ա^2}\right)}$ կամ թէ եւս $Տ = \frac{1}{4} Բ \sqrt{(4Ա^2 - Բ^2)}$։

89. Վասն հաշուելոյ զհաւասարակող երեքանկիւնս, ունիմք ի ձեռին $Բ = Ա$, եւ $բ = ա = 60^0$. վասն որոյ միայն առ ի հաշուել տարածութիւնն երեւայ $Տ = \frac{1}{4} Ա \sqrt{(4Ա^2 - Ա^2)} = \frac{1}{4} Ա \sqrt{(3Ա^2)} = \frac{Ա^2 \sqrt{3}}{4}$։

90. Խնդիր։ Հաշուել զերեքանկիւն ինչ, եթէ երկու անկիւնքն, եւ կողմն որ կայցէ ի մէջ նոցա, ծանուցեալ իցեն։

Լուծումն։ Համարեսցուք եթէ ի հաւասարութեան՝ որ ի Հ. 86., ծանուցեալ իցեն երկոքին անկիւնքն ա եւ բ, եւ կողմն Գ։ Յ $ա + բ + գ = 180^0$

հաւասարութենէ ելանէ $գ = 180 - (ա + բ)$, ուստի եւ $ծոց\ գ = ծոց\ (ա + բ)$։ Դարձեալ վասն $\frac{Գ}{ծոց\ գ} = \frac{Ա}{ծոց\ ա}$ լինելոյ, է եւս $Ա = \frac{Գ \cdot ծոց\ ա}{ծոց\ գ}$, կամ $Ա = \frac{Գ \cdot ծոց\ ա}{ծոց\ (ա + բ)}$։ Ըստ նմին օրինակի զհետ գայ $Բ = \frac{Գ \cdot ծոց\ բ}{ծոց\ (ա + բ)}$ զհաւասարութեան $\frac{Բ}{ծոց\ բ} = \frac{Գ}{ծոց\ գ}$։ Եւ ի կատարած գտանի $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{Գ \cdot ծոց\ ա}{ծոց\ (ա + բ)} \times \frac{Գ \cdot ծոց\ բ}{ծոց (ա + բ)} \times ծոց\ (ա + բ) = \frac{Գ^2\ ծոց\ ա\ ծոց\ բ}{2\ ծոց\ (ա + բ)}$ ըստ Հ. 86։

91. Խնդիր։ Հաշուել զերեքանկիւն ինչ, որոյ երկու անկիւնքն եւ մի յանդիմանակաց կողմն ծանուցեալ իցեն։

Լուծումն։ Եթէ ծանուցեալ իցեն անկիւնքն ա եւ բ, եւ կողմն Ա, զհետ գայ $գ = 180^0 - (ա + բ)$։ Յայնժամ է $\frac{Ա}{ծոց\ ա} = \frac{Բ}{ծոց\ բ}$, ուստի եւ $Բ = \frac{Ա\ ծոց\ Բ}{ծոց\ ա}$. դարձեալ ի $\frac{Գ}{ծոց\ գ} = \frac{Ա}{ծոց\ ա}$ հաւասարութենէս գտանի $Գ = \frac{Ա\ ծոց\ գ}{ծոց\ ա}$, կամ $Գ = \frac{Ա\ ծոց\ (ա + բ)}{ծոց\ ա}$։ Եւ ի կատարած՝ տարածութիւնն երեսաց գտանի $S = \frac{1}{2}\ Ա \cdot \frac{Ա\ ծոց\ բ}{ծոց\ ա} \cdot ծոց\ (ա + բ) = \frac{Ա^2 \cdot ծոց\ բ \cdot ծոց\ (ա + բ)}{2\ ծոց\ ա}$։

92. Խնդիր։ Հաշուել զերեքանկիւն ինչ, որոյ երկու կողմանքն, եւ անկիւնն որ ի նոցանէն փակիցի, ծանուցեալ իցեն։

Լուծումն։ Ծանուցեալ իցեն կողմանքն Ա եւ Բ եւ անկիւնն գ։ Ի $\frac{Ա}{ծոց\ ա} = \frac{Բ}{ծոց\ բ}$ հաւասարութեանս գնեաւ զայ $\frac{\text{ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{Բ}}{\text{Ա}}$. Իսկ արդ՝ վասն $\text{բ} = 180 - (\text{ա} + \text{գ})$ լինելոյ, է եւս $\text{ծոց բ} = \text{ծոց}\ (\text{ա} + \text{գ}) = \text{ծոց ա ծոցաձ. գ} + \text{ծոցաձ. ա ծոց գ}$, ուստի եւ $\frac{\text{ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \frac{\text{ծոց ա ծոցաձ. գ} + \text{ծոցաձ. ա ծոց գ}}{\text{ծոց ա}}$, կամ թէ $\frac{\text{ծոց բ}}{\text{ծոց ա}} = \text{ծոցաձ. գ} + \text{ծոց գ. էմշօշ. ա}$. ուրեմն եւ $\text{ծոցաձ. գ} + \text{ծոց գ} \times \text{էմշօշ. ա} = \frac{\text{Բ}}{\text{Ա}}$, յորմէ $\text{էմշօշ. ա} = \frac{\text{Բ} - \text{Ա ծոցաձ. գ}}{\text{Ա ծոց գ}} = \frac{\text{Բ}}{\text{Ա ծոց գ}} - \text{էմշօշ. գ}$, նմին իրի եւ $\text{շօշ. ա} = \frac{1}{\text{էմշօշ. ա}} = \frac{\text{Ա ծոց գ}}{\text{Բ} - \text{Ա ծոցաձ. գ}}$: Սովին օրինակաւ եւ վասն հաշուելոյ զանկիւնն բ ծագեն համարակաց օրինակքս $\text{էմշօշ. բ} = \frac{\text{Ա} - \text{Բ ծոցաձ. գ}}{\text{Բ ծոց գ}} = \frac{\text{Ա}}{\text{Բ ծոց գ}} - \text{էմշօշ. գ}$, եւ շօշ $\text{բ} = \frac{\text{Բ ծոց գ}}{\text{Ա} - \text{Բ ծոցաձ. գ}}$: Իսկ ի հաշուել զկողմն Գ, ի $\frac{\text{Գ}}{\text{ծոց գ}} = \frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}}$ հաւասարութենէ գտանի $\text{Գ} = \frac{\text{Ա ծոց գ}}{\text{ծոց ա}}$. Իսկ արդ ըստ Հ. 73 Ա. 6. 1. 3. է $\frac{1}{\text{ծոց ա}} = \sqrt{(1 + \text{էմշօշ}^2.\ \text{ա})} =$

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\text{Բ}^2 - 2\,\text{ԱԲ ծոցաձ. գ} + \text{Ա}^2\ \text{ծոցաձ}^2.\ \text{գ}}{\text{Ա}^2\ \text{ծոց}^2\ \text{գ}}\right)},\ \text{կամ}\ \frac{1}{\text{ծոց ա}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Ա}^2\,(\text{ծոց}^2\ \text{գ} + \text{ծոցաձ.}^2\ \text{գ}) + \text{Բ}^2 - 2\,\text{ԱԲ ծոցաձ. գ}}{\text{Ա}^2\ \text{ծոց}^2\ \text{գ}}\right)}$$

կամ ի կատարած $\frac{1}{\text{ծոց ա}} =$

$\frac{\sqrt{(\text{Ա}^2 + \text{Բ}^2 - 2\text{ԱԲ ծոցաձ. գ})}}{\text{Ա ծոց գ}}$. ուստի եւ $\text{Գ} =$

$\frac{\text{Ա ծոց գ}\ \sqrt{(\text{Ա}^2 + \text{Բ}^2 - 2\,\text{ԱԲ ծոցաձ. գ})}}{\text{Ա ծոց գ}} = \sqrt{(\text{Ա}^2 + \text{Բ}^2 - 2\,\text{ԱԲ ծոցաձ. գ})}$:

Տարածութիւն երեւացն է $Տ = \frac{1}{2}\,ԱԲ\,\text{ծոց}\,գ$։

93. Թէպէտեւ այս ձեւք, կամ օրինակք հասարակաց ի ձեռն ծանուցեալ մասանց տան կամ ածեն զանծանօթսն, բայց սակայն ի բաց առեալ ըղջեալինն, չեն դիւրինք յարկանել ի կիր, եթէ ոք արդեամբք խոկ ի հաշուելն զերեքանկիւնս զլոգարիթմս ի գործ ածիցէ. վասն որոյ պարտ եւ պատշաճ է մեզ գտանել այլ եւս հասարակաց օրինակս, որ յայս գործ վարիցին։

Ի $\frac{Ա}{\text{ծոց}\,ա} = \frac{Գ}{\text{ծոց}\,գ}$, եւ $\frac{Բ}{\text{ծոց}\,բ} = \frac{Գ}{\text{ծոց}\,գ}$ հաւասարութեանց գտանի $Ա\,\text{ծոց}\,գ = Գ\,\text{ծոց}\,ա$, եւ $Բ\,\text{ծոց}\,գ = Գ\,\text{ծոց}\,բ$։ Հանելով ի միմեանց, եւ յաւելով ի միմեանս զհաւասարութիւնս, գտանին $(Ա - Բ)\,\text{ծոց}\,գ = Գ\,(\text{ծոց}\,ա - \text{ծոց}\,բ)$, եւ $(Ա + Բ)\,\text{ծոց}\,գ = Գ\,(\text{ծոց}\,ա + \text{ծոց}\,բ)$ յորոց եւ բաժանելով $\frac{Ա-Բ}{Ա+Բ} = \frac{\text{ծոց}\,ա - \text{ծոց}\,բ}{\text{ծոց}\,ա + \text{ծոց}\,բ}$։ Իսկ արդ ըստ Հ. 81. Բ, է

$$\frac{\text{ծոց}\,ա - \text{ծոց}\,բ}{\text{ծոց}\,ա + \text{ծոց}\,բ} = \frac{\text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)}{\text{շօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)}$$ ուստի եւ

$$\frac{\text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right)}{\text{շօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)} = \frac{Ա-Բ}{Ա+Բ}$$, եւ $\text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right) = \left(\frac{Ա-Բ}{Ա+Բ}\right)\text{շօշ.}\left(\frac{ա+բ}{2}\right)$։ Արդ եթէ ի սմին փոխանակ $ա+բ$ քանիօնութեան, զիւր նշանակութիւնն $180 - գ$ փոխանակեսցեմք, ելանէ ի կատարած օրինակս հասարակաց $\text{շօշ.}\left(\frac{ա-բ}{2}\right) = \left(\frac{Ա-Բ}{Ա+Բ}\right)\text{շօշ.}\left(90 - \frac{գ}{2}\right) = \left(\frac{Ա-Բ}{Ա+Բ}\right)\text{էմշօշ.}\,\frac{գ}{2}$։ Նաեւ ի սմին,

որպէս տեսանի շօշափօղն $\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}$ քանիօնութեանս ծանուցեալ մասամբք գրեալ է, յորմէ եւ անկիւնն $\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}$ ի գլխովին գտանի: Եդեալ եթէ ի գլուխ ելեալ իցէ այս, եւ իցէ $\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}=\text{ս}$, յայնժամ իցէ $\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}=90-\frac{\text{գ}}{2}$, յորմէ ի ձեռն հանման եւ յաւելման գտանի $\text{ա}=90-\frac{\text{գ}}{2}+\text{ս}$ եւ $\text{բ}=90-\frac{\text{գ}}{2}-\text{ս}$: Եթէ գտանիցին միանգամ անկիւնքս, յայնժամ $\text{Գ}=\frac{\text{Ա ծոց գ}}{\text{ծոց ա}}$ իցէ, զոր դիւրին իսկ է հաշուել ղօգարիթմօք:

94. Խնդիր: Հաշուել զերեքանկիւն ինչ, որոյ երկու կողմանքն, եւ մի յանդիմանակաց անկիւնն ծանուցեալ իցեն:

Լուծումն: Յայտնի իցեն կողմանքն Ա եւ Բ, եւ անկիւնն ա: Ի $\frac{\text{Ա}}{\text{ծոց ա}}=\frac{\text{Բ}}{\text{ծոց բ}}$ հաւասարութենէ ծագէ $\text{ծոց բ}=\frac{\text{Բ ծոց ա}}{\text{Ա}}$, վասն որոյ եւ $\text{ծոցակ}.\,\text{բ}=\pm\sqrt{\left(1-\frac{\text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա}}{\text{Ա}^2}\right)}$, կամ $\text{ծոցակ}.\,\text{բ}=\pm\frac{\sqrt{(\text{Ա}^2-\text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{Ա}}$: Վասն $\text{ա}+\text{բ}+\text{գ}=180^0$ լինելոյ է եւս $\text{գ}=180-(\text{ա}+\text{բ})$, ուստի եւ $\text{ծոց գ}=\text{ծոց}(\text{ա}+\text{բ})=\text{ծոց ա ծոցակ}.\,\text{բ}+\text{ծոցակ}.\,\text{ա ծոց բ}$. ապա ուրեմն $\text{ծոց գ}=\frac{\text{Բ ծոց ա ծոցակ}.\,\text{ա}}{\text{Ա}}\pm\frac{\text{ծոց ա}\sqrt{(\text{Ա}^2-\text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{Ա}}$, կամ թէ եւս $\text{ծոց գ}=\frac{\text{ծոց ա}\,(\text{Բ ծոցակ}.\,\text{ա})\pm\sqrt{(\text{Ա}^2-\text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{Ա}}$:

Առաջին գտանի դարձեալ $\text{Գ} = \frac{\text{Ա ծոց ք}}{\text{ծոց ա}} = \text{Բ ծոցակ. ա} \pm \sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}$։ Եւ ի կատարած $\text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{ԱԲ}\left(\frac{\text{Բ ծոց ա ծոցակ. ա}}{\text{Ա}} \pm \frac{\text{ծոց ա}\sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{Ա}}\right)$ կամ $\text{Տ} = \frac{1}{2}\,\text{Բ ծոց ա}\,(\text{Բ ծոցակ. ա}) \pm \sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\text{ծոց}^2\,\text{ա})}$։

Այսէն պարտ եւ պատշաճ է առնուլ ի միտ, եթէ անկիւնն բ գտանի եւ ճանաչի միայն ի ձեռն ծոցոյ իւրոյ։ Եւ արդ որովհետեւ իւրաքանչիւր հաստատուն ծոցոյ պատշաճին երկու անկիւնք, որք կան յառաջին եւ յերկրորդ չորրորդս, որք եւ առ հասարակ կարեն լինել երկուքին եւս անկիւնք միոյ եռանկեան, նմին իրի եւս ելանեն երկու նշանակութիւնք բ անկեան. յորոց մին փոքր է, եւ միւսն մեծ քան զ90^0, յորմէ եւս ք, Գ, եւ Տ ստանան երկուս նշանակութիւնս, յորժամ ի յառաջագոյն գտեալ օրինակս համարակաց վերին կամ ստորին նշանն, ըստ բ $< 90^0$ եւ կամ բ $> 90^0$ լինելոյ, զօրիցէ։ Ապեթէ յոր զինչ եւ իցէ առանձինն ինչ նշանաց ծանիցի, եթէ բ իցէ սուր կամ թէ բութ անկիւն, յայնժամ առ բ, որպէս եւ առ ք, Գ եւ Տ պատշաճի մի եւեթ նշանակութիւն, եւ եռանկիւնն սահմանի վերագոյնեդեալ ձեւովք։ Զոր օրինակ հանդիպի այս, յորժամ բ չիցէ մեծագոյն անկիւնն յանկեանց անտի, եւ կամ թէ Բ չիցէ մեծագոյնն ի կողմանց անտի, քանզի յայնժամ հարկ է, զի բ իցէ սուր։

Դարձեալ ի հաշուելն արդեամբք զեռանկիւն ինչ, չէ պարտ յիւրաքանչիւր մասունս ի կիր արկանել զվերագոյն եդեալ օրինակս համարակաց, քանզի սոքա դժուարին իմն գործեն զհաշիւսն որ ղոգարիթմօք կատարին. այլ հարկ է զառաջինն ի $\text{ծոց բ} = \frac{\text{Բ ծոց ա}}{\text{Ա}}$ ձեւոյ գտանել զանկիւնն բ. անդստին ծագէ

$\text{գ} = 180 - (\text{ա} + \text{բ})$. դարձեալ է $\text{Գ} = \frac{\text{Ա ծոց գ}}{\text{ծոց ա}}$, եւ $\text{Տ} = \frac{1}{2}\text{ԱԲ ծոց գ}$: Զայս օրինակ կարճագոյն ճանապարհաւ ի դէմ եգեալ կէտն հասանիցեմք:

95. Խնդիր: Հաշուել զերեքանկիւն ինչ, յորժամ ծանուցեալ իցեն երեք կողմանքն նորին միանգամայն:

Լուծումն: Գիտեմք եթէ $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{Ա}} = \frac{\text{ծոց բ}}{\text{Բ}}$, եւ $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{Ա}} = \frac{\text{ծոց գ}}{\text{Գ}}$: Յառաջին հաւասարութենէ անտի ելանէ $\text{ծոց բ} = \frac{\text{Բ ծոց ա}}{\text{Ա}}$, նմին իրի եւ $\text{ծոցակ. բ} = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա}}{\text{Ա}^2}\right)}$, կամ $\text{ծոցակ. բ} = \frac{\sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{Ա}}$. իսկ ի միւս հաւասարութենէ վասն $\text{ծոց գ} = \text{ծոց}\,(\text{ա} + \text{բ})$ լինելոյ, գտանի $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{Ա}} = \frac{\text{ծոց}\,(\text{ա} + \text{բ})}{\text{Գ}} = \frac{\text{ծոց ա ծոցակ. բ} + \text{ծոցակ. ա ծոց բ}}{\text{Գ}}$, յորմէ եւ փոխանակելով զնշանակութիւնս ծոց բ եւ ծոցակ. բ քանիօնութեանց, գտանեմք $\frac{\text{ծոց ա}}{\text{Ա}} = \frac{\text{ծոց ա}\sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}}{\text{ԱԳ}} + \frac{\text{Բ ծոց ա ծոցակ. ա}}{\text{ԱԳ}}$: Բազմացուցանելով ԱԳ իւ եւ կտրելով ընդ ծոց ա, ելանէ $\text{Գ} = \sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})} + \text{Բ ծոցակ. ա}$, ուստի $\text{Գ} - \text{Բ ծոցակ. ա} = \sqrt{(\text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա})}$, եւ $(\text{Գ} - \text{Բ ծոցակ. ա})^2 = \text{Ա}^2 - \text{Բ}^2\,\text{ծոց}^2\,\text{ա}$: Իբրեւ առաջին մասն հաւասարութեանս համբառնայցէ յերկրորդ կարողութիւն, եւ յերկրորդում մասին դիցի $\text{ծոց}^2\,\text{ա} = 1 - \text{ծոցակ}^2.\,\text{ա}$, յայնժամ ծագէ $\text{Գ}^2 - 2\text{ԲԳ ծոցակ. ա} + \text{Բ}^2\,\text{ծոցակ}^2.\,\text{ա}$

$= \text{Ա}^2 - \text{Բ}^2 + \text{Բ}^2\,\text{ծոցաձ}^2.\,\text{ա}$ կամ $\text{Գ}^2 - 2\text{ԲԳ}\,\text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \text{Ա}^2 - \text{Բ}^2$, յորմէ ի կատարած $\text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \dfrac{\text{Բ}^2 + \text{Գ}^2 - \text{Ա}^2}{2\text{ԲԳ}}$։

Այս ձեւս դիւրագոյն իմն օրինակաւ գտանէր, եթէ ի հաւասարութենէ անտի որ ի Հ. 91. վասն Գ. կողման գտաւ, գնշանակութիւնն ծոցաձ. ա որոնեալ էր մեր։

Ամենեւին նման նշանակութիւնք նովին օրինակաւ գտանին եւ վասն ծոցաձ. բ եւ ծոցաձ. գ քանիօնութեանց, այս ինքն $\text{ծոցաձ}.\,\text{բ} = \dfrac{\text{Ա}^2 + \text{Գ}^2 - \text{Բ}^2}{2\text{ԱԳ}}$, եւ $\text{ծոցաձ}.\,\text{գ} = \dfrac{\text{Ա}^2 + \text{Բ}^2 - \text{Գ}^2}{2\text{ԱԲ}}$։ Առ ի գտանել ի ձեռն կողմանց զտարածութիւն երեսաց երեքանկեան, պարտ է եւս զծոց միոյ յանկեանց նորին գտանել։ Արդ ըստ Հ. 73. 1. է $\text{ծոց ա} = \sqrt{(1 - \text{ծոցաձ}^2.\,\text{ա})} = \sqrt{[(1 + \text{ծոցաձ}.\,\text{ա})(1 - \text{ծոցաձ}.\,\text{ա})]}$. իսկ արդ $1 + \text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \dfrac{2\text{ԲԳ} + \text{Բ}^2 + \text{Գ}^2 - \text{Ա}^2}{2\text{ԲԳ}} = \dfrac{(\text{Բ} + \text{Գ})^2 - \text{Ա}^2}{2\text{ԲԳ}}$, կամ $1 + \text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \dfrac{(\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ})(\text{Բ} + \text{Գ} - \text{Ա})}{2\text{ԲԳ}}$. ըստ նմին օրինակի $1 - \text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \dfrac{2\text{ԲԳ} - \text{Բ}^2 - \text{Գ}^2 + \text{Ա}^2}{2\text{ԲԳ}} = \dfrac{\text{Ա}^2 - (\text{Բ} - \text{Գ})^2}{2\text{ԲԳ}}$ կամ $1 - \text{ծոցաձ}.\,\text{ա} = \dfrac{(\text{Ա} + \text{Բ} - \text{Գ})(\text{Ա} + \text{Գ} - \text{Բ})}{2\text{ԲԳ}}$. ուրեմն եւ

$$\text{ծոց ա} = \sqrt{\left(\frac{(\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ})(\text{Բ} + \text{Գ} - \text{Ա})(\text{Ա} + \text{Գ} - \text{Բ})}{4\text{Բ}^2\text{Գ}^2} \times (\text{Ա} + \text{Բ} - \text{Գ})\right)}$$

։ Վասն համառօտիւք իմն գրելոյ զայս օրինակս հաւասարակաց, զկէս բովանդակութեան երից կողմանցն նշանակեսցուք ը նշանագրով, այս ինքն իցէ

$\frac{\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ}}{2}=\text{բ}$, յայնժամ $\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ}=2\text{բ}$, եւ $\text{Բ}+\text{Գ}-\text{Ա}=2\text{բ}-2\text{Ա}=2(\text{բ}-\text{Ա})$, $\text{Ա}+\text{Գ}-\text{Բ}=2\text{բ}-2\text{Բ}=2(\text{բ}-\text{Բ})$, եւ $\text{Ա}+\text{Բ}-\text{Գ}=2\text{բ}-2\text{Գ}=2(\text{բ}-\text{Գ})$։ Փոխանակելով զզօրութիւնս զայսոսիկ եղանէ ծոց ա $=\sqrt{\left(\frac{2\text{բ}\cdot 2(\text{բ}-\text{Ա})\cdot 2(\text{բ}-\text{Բ})\cdot 2(\text{բ}-\text{Գ})}{4\text{Բ}^2\text{Գ}^2}\right)}$ կամ ծոց ա $=\frac{2}{\text{ԲԳ}}\sqrt{[\text{բ}(\text{բ}-\text{Բ})(\text{բ}-\text{Ա})(\text{բ}-\text{Գ})]}$։ Զայսորիկ դնեա դայ $\text{S}=\frac{1}{2}\text{ԲԳ}$ ծոց ա $=\sqrt{[\text{բ}(\text{բ}-\text{Ա})(\text{բ}-\text{Բ})(\text{Բ}-\text{Գ})]}$ (Համեմ. ընդ 201 համ. Երկր.), որ է այնպիսի իմն ձեւ, որ դիւրաւ իսկ ի ձեռն լոգարիթմեայց կարէ հաշուել։ Ըստ նմին օրինակի եւ ձեւն ծոց ա, եւ ձեւքն՝ որ կարեն նոյնին օրինակաւ եւ վասն ծոց բ եւ ծոց գ քանիօնութեանց գտանել, մարթեն օգնականութեամբ լոգարիթմեայց հաշուել, այլ այս միայն է յայսմ, զի անորոշ իմն է, թէ անկիւնն ա որ պատշաճի ծոց ա քանիօնութեան, յառաջին արդեւք, եթէ յերկրորդում չորրորդի կայցէ որ ի նշանակութեան ծոցաձ. ա քանիօնութեան ոչ պատահէ։ Բայց սակայն մարթ է գտանել համարական օրինակս յորում չդիպիցի այս անհաստատութիւն, եւ դիւրաւ հաշուիցի լոգարիթմոսիւք։ Քանզի ըստ Հ. 81. Ա, է ծոց $\frac{\text{ա}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1-\text{ծոցաձ. ա}}{2}\right)}$, եւ ծոցաձ. $\frac{\text{ա}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1+\text{ծոցաձ. ա}}{2}\right)}$. արդ յառաջագոյն իսկ գտեալ է մեր $1-\text{ծոցաձ. ա}=\frac{(\text{Ա}+\text{Գ}-\text{Բ})(\text{Ա}+\text{Բ}-\text{Գ})}{2\text{ԲԳ}}$ $=\frac{2(\text{բ}-\text{Բ})(\text{բ}-\text{Գ})}{\text{ԲԳ}}$, եւ $1+\text{ծոցաձ. ա}=$ $\frac{(\text{Ա}+\text{Բ}+\text{Գ})(\text{Բ}+\text{Գ}-\text{Ա})}{2\text{ԲԳ}}=\frac{2\text{բ}(\text{բ}-\text{Ա})}{\text{ԲԳ}}$, ուստի եւ $\text{ծոց}\,\frac{\text{ա}}{2}=\sqrt{\left(\frac{(\text{բ}-\text{Բ})(\text{բ}-\text{Գ})}{\text{ԲԳ}}\right)}$, եւ $\text{ծոցաչ}\cdot\frac{\text{ա}}{2}=\sqrt{\left(\frac{\text{բ}\,(\text{բ}-\text{Ա})}{\text{ԲԳ}}\right)}$, յորում անկիւն $\frac{\text{ա}}{2}$ կայ ի հարկէ յառաջին չորրորդի բոլորակին:

Ցայս վայր տացեալքս են գլխաւոր դէպք հարթ երեքանկիւնաչափութեան, բայց սակայն մարթ է այլ եւս բազում դէպս ի հաշիւսն, որք ծառեցան, ի վերայ յաւելուլ, յորժամ կամ տարածութիւն երեսաց երեքանկեան ծանուցեալ համարիցի, եւ կամ թէ, բաց ի գլխաւոր հաւասարութեանց անտի, որ ի Հ. 86. եդան, այլ եւս հաւասարութիւնք գտանիցին ի մէջ մասանց երեքանկեան: Լիցի մեզ օրինակ խնդիրս՝ որ առաջիս կայ:

96. Խնդիր: Եդեալ թէ ծանուցեալ իցեն բովանդակութիւն երկուց կողմանց երեքանկեան, եւ անկիւնն՝ որ յայնց կողմանց փակիցի, եւ տարածութիւն երեսաց երեքանկեանն, հաշուել զերեքանկիւնն:

Լուծումն: Դիցուք $\text{Ա}+\text{Բ}=\text{բ}$, եւ բ, է, եւ Տ իցեն ծանուցեալ մասունքն: Ի $\text{Տ}=\frac{1}{2}\text{ԱԲ}\,\text{ծոց}\,\text{է}$ հաւասարութենէ գտանի $\text{ԱԲ}=\frac{2\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{է}}$. իսկ արդ է $(\text{Ա}-\text{Բ})^2=(\text{Ա}+\text{Բ})^2-4\,\text{ԱԲ}$, ուստի եւ $(\text{Ա}-\text{Բ})^2=\text{բ}^2-\frac{8\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{է}}$, եւ $\text{Ա}-\text{Բ}=\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{է}}\right)}$: Զայսորիկ եւ զ$\text{Ա}+\text{Բ}=\text{բ}$ հաւասարութեան զհետ գայ $\text{Ա}=\frac{\text{բ}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\text{բ}^2}{4}-\frac{2\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{է}}\right)}$, եւ $\text{Բ}=\frac{\text{բ}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\text{բ}^2}{4}-\frac{2\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{է}}\right)}$: Առ ի վերայ հասանելոյ երրորդ Գ կողման, ունիմք ի ձեւին ըստ 92 համարոյ $\text{Գ}=\sqrt{(\text{Ա}^2+\text{Բ}^2-2\,\text{ԱԲ}\,\text{ծոցաչ}\cdot\text{է})}$, յորում եթէ հաստատիցեմք զնշանակութիւնս Ա եւ Բ կողմանց, եւ համառօտիցեմք, լինիցի $\text{Գ}=\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{4\text{Տ}^2(1+\text{ծոցաչ}\cdot\text{է})}{\text{ծոց}\,\text{է}}\right)}$:
Զայս ձեւս մարթ է համառօտիւք եւս դրոշմել, քան-

զի է $1+\text{ծոցակ.}\,\text{Է}=2\left(\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{Է}}{2}\right)^2$, (Հ. 76. Ա.) եւ $\text{ծոց}\,\text{Է}=2\,\text{ծոց}\,\frac{\text{Է}}{2}\,\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{Է}}{2}$, ուստի եւ $\frac{1+\text{ծոցակ.}\,\text{Է}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}=$

$$\frac{2\left(\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{Է}}{2}\right)^2}{2\,\text{ծոց}\,\frac{\text{Է}}{2}\,\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{Է}}{2}}=\frac{\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{Է}}{2}}{\text{ծոց}\,\frac{\text{Է}}{2}}=\text{էնշօշ.}\,\frac{\text{Է}}{2}\cdot$$ զորոյ

դհեա գայ $\text{Գ}=\sqrt{\left(\text{բ}^2-4\,\text{Տ}^2\,\text{էնշօշ.}\,\frac{\text{Է}}{2}\right)}$: Իսկ յ89 համարոյ վասն ա եւ բ անկեանց դհեա գայ էնշօշ. ա $=$

$$\frac{\text{Բ}}{\text{Ա}\,\text{ծոց}\,\text{Է}}-\text{էնշօշ.}\,\text{Է}=\frac{\text{բ}-\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}}{\left[\text{բ}+\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}\right]\,\text{ծոց}\,\text{Է}}-$$

էնշօշ. Է, եւ էնշօշ. բ $=$

$$\frac{\text{բ}+\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}}{\left[\text{բ}-\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}\right]\,\text{ծոց}\,\text{Է}}-\text{էնշօշ.}\,\text{Է}:$$ Բաւել

դիւրագոյն կարեն վարել ձեւք 93 համարոյ, այս ինքն

$$\text{շօշ.}\left(\frac{\text{ա}-\text{բ}}{2}\right)=\frac{\sqrt{\left(\text{բ}^2-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}}{\text{բ}}\cdot\text{էնշօշ.}\frac{\text{Է}}{2}=$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{8\,\text{Տ}}{\text{բ}^2\,\text{ծոց}\,\text{Է}}\right)}\cdot\text{էնշօշ.}\frac{\text{Է}}{2}:$$

97. Խնդիր: Գտանել զկէս երկակտուր բոլորակին որ շուրջ զերեքանկեամբ ձգիցի ներքոյ կամ արտաքոյ:

Լուծումն: Իցէ ձ կէս երկակտուր բոլորակին ձգելոյ արտաքոյ, իսկ ծ կէս երկակտուր բոլորակին ձգելոյ ներքոյ շուրջ զբոլորակաւ: Ըստ 85 համարոյ

$\frac{Ա}{\text{ծոց } ա} = 2Ճ$, ուստի եւ $Ճ = \frac{Ա}{2\,\text{ծոց } ա}$։ Դարձեալ զ186 համարոյ երկրաչափութեան գտեալ զայ $Տ = \frac{1}{2}(Ա + Բ + Գ)\cdot ճ$, ուստի եւ $ճ = \frac{2\,Տ}{Ա + Բ + Գ}$, կամ $ճ = \sqrt{\left(\frac{(բ - Ա)(բ - Բ)(բ - Գ)}{բ}\right)}$, եթէ փոխանակ Տ տարածութեան դիցի նշանակութիւնն յ95 համարոյ։

Յատագելոցս մարթեմք ի մտաց իմանալ, եթէ ի մէջ Ա, Բ, Գ, ա, բ, գ, Տ, Ճ եւ ճ քանիօնութեանց կան վեց հաւասարութիւնք ըստ 86 եւ 97 համարոց, յորոց զվեց մասունս, յորժամ այլ երեքն ծանուցեալ իցեն, կարեմք գտանել. յորմէ եւ բազմնման դէպքն վասն հաշուելոյ զերեքանկիւնս։ Զոր օրինակ, եթէ գիտիցեմք զանկիւնս ա եւ բ, եւ զկէս երկակսուրն Ճ, յայնժամ գտանիցի $գ = 180 - (ա + բ)$, $Ա = 2Ճ\,\text{ծոց } ա$, $Բ = 2Ճ\,\text{ծոց } բ$, $Գ = 2Ճ\,\text{ծոց } գ = 2Ճ\,\text{ծոց }(ա + բ)$, դարձեալ $Տ = \frac{1}{2}\cdot 2Ճ\,\text{ծոց } ա \cdot 2Ճ\,\text{ծոց } բ \cdot \text{ծոց }(ա + բ)$, կամ $Տ = 2Ճ^2\,\text{ծոց } ա\,\text{ծոց } բ\,\text{ծոց }(ա + բ)$, եւ ի կատարած $ճ = \frac{2Ճ\,\text{ծոց } ա\,\text{ծոց } բ\,\text{ծոց }(ա + բ}{\text{ծոց } ա + \text{ծոց } բ + \text{ծոց }(ա + բ)}$, կամ $ճ = 4Ճ\,\text{ծոց } \frac{ա}{2} \times \text{ծոց } \frac{բ}{2} \cdot \text{ծոցակ.} \left(\frac{ա + բ}{2}\right)$։ Այս վերջին օրինակս ճ գտանի այսու օրինակաւ։ Էչ $\text{ծոց }(ա + բ) + \text{ծոց } բ = 2\,\text{ծոց } \left(\frac{ա + 2բ}{2}\right) \text{ծոցակ.} \frac{ա}{2}$, եւ $\text{ծոց } ա = 2\,\text{ծոց } \frac{ա}{2} \text{ծոցակ.} \frac{ա}{2}$, ուստի եւ $\text{ծոց } ա + \text{ծոց } բ + \text{ծոց }(ա + բ) = 2\,\text{ծոցակ.} \frac{ա}{2} \left[\text{ծոց } \left(\frac{ա + 2բ}{2}\right)\right] + \text{ծոց } \frac{ա}{2}$. դարձեալ $\text{ծոց } \left(\frac{ա + 2բ}{2}\right) + \text{ծոց } \frac{ա}{2} = 2\,\text{ծոց } \left(\frac{ա + բ}{2}\right) \text{ծոցակ.} \frac{բ}{2}$, ղորոց գտեալ զայ $\text{ծոց } ա + \text{ծոց } բ + \text{ծոց }(ա + բ) =$

$4\,\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{ա}}{2}\;\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{բ}}{2}\;\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)$. իբրեւ գնշանակութիւնս հաստատիցեմք յանուանիչն, եւ գնիցեմք ի համարիչն $\text{ծոց}\,\text{ա}=2\,\text{ծոց}\,\frac{\text{ա}}{2}\;\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{ա}}{2}$, $\text{ծոց}\,\text{բ}=2\,\text{ծոց}\,\frac{\text{բ}}{2}.\;\text{ծոցակ.}\,\frac{\text{բ}}{2}$, եւ $\text{ծոց}\,(\text{ա}+\text{բ})=2\,\text{ծոց}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)\text{ծոցակ.}\left(\frac{\text{ա}+\text{բ}}{2}\right)$, գտանի յետին զօրութիւն ճ քանիօնութեան ։

ՀԱՏԱԾՔ ԿՈՆԻ

ՃԱՏԱԾՔ ԿՈՆԻ

ԳԼՈՒԽ Ա

ՎԱՍՆ ԿՈՆԱԳԾԻ

98. Կոնագիծն է կոր ինչ գիծ, որոյ իւրաքանչիւր կէտն նոյնչափ ինչ հեռի է ի կիտէ իմեքէ, որչափ ինչ միանգամ հեռագոյն կայցէ յուղիղ ինչ գծէ։ Որպէս ինչ (Ձեւ 14.) ԱՄՄ′Մ″ է կոնագիծ ինչ, եթէ ուղղորդ գիծն ՄՌ ձգեալ յոր զինչ եւ իցէ Մ կիտէ ի վերայ ԳԴ ուղիղ գծի, հաւասար իցէ ՀՄ ուղիղ գծի, որ ի նմին Մ կիտէ անտի առ Հ կէտ ինչ ձգիցի։ Առանց կատարածի կամ եզերաց գիծն ԳԴ՝ անուանեալ կոչի գիծ Ուղղիչ, իսկ կէտն Հ Հնոց կոնագծի։ Ուղղորդ գիծն՝ որ ի Հ հնոցէ անտի անկանիցի ի վերայ ԳԴ կողմանն, եւ արտաքս քան զառանց կատարածի երկայնեալ, այս ինքն է գիծն ԲՀՔ, ասի Առանցք կոնագծի. իսկ Ա միջավայրն ԲՀ ուղիղ գծի, որ եւ հաւասար հեռի կայ եւ յուղղչէ եւ ի հնոցէ անտի, է Գագաթն նորին։ Ուղիղ գիծքն որ ի Հ հնոցէ անտի յոր զինչեւ իցէ կէտ կոնագծին ձգիցին, որպէս ինչ է գիծն ՀՄ, անուանեալ կոչին Բառնալի ճառագայթք։ Ուղղորդ գիծն ՄՊ, որ յոր զինչ եւ իցէ Մ կիտէ կոնագծին անկանիցի ի վերայ ԲՔ առանցից, անուանեալ կոչի Կարգած այնր կիտի, եւ հատածն առանցից որ կայ ի միջի կարգածոյն եւ գագաթան, այս ինքն է ուղիղ գիծն ԱՊ, ասի Յապաւած այնր կիտի։ Կարգածն եւ յապաւածըն, որ միում կիտի պատշաճիցին, կոչին Ի միասին կարգածք այնր կիտի։

99. Խնդիր: Հաստատուն եղեալ կամ յայտնի են ԳԴ ուղղիչ գիծն, եւ հնոյն Հ. առաջի կայ գտանել զբազում կէտս կոնագծի:

Լուծումն: Ընդ հնոյն Հ ձգեա զգիծն ԲՀՔ ուղղորդ ի ԳԴ, որ եւ լինիցի իսկ առանցք կոնագծին. իսկ Ա միջավայրն ԲՀ գծին՝ լինիցի եւս գագաթն կոնագծին: Արդ առջիր որ զինչեւիցէ ԱՊ յապաւած մի, ընդ կէտն Պ ձգեա զՄՆ ուղղորդ ի վերայ առանցից, եւ ի Հ կիտէ անտի իբրեւ ի կենդրոնէ ՀՄ=ԲՊ կէս երկակարով ձգեա բոլորակ մի, որ զուղղորդ գիծն ՄՆ հատանիցէ յերկուս Մ եւ Ն կէտս, որք կանն ի գլխովին ի կոնագծին: Եւ զայս մարթէ զայս օրինակ ցուցանել: Ի Մ կիտէ անտի հատանելոյ, ի վերայ ԳԴ գծի ձգեա զուղղորդ գիծն ՄԹ: Արդ ըստ ձեւոյն է ՄՀ=ԲՊ, իսկ արդ եւս եւ ՄԹ=ԲՊ քանզի են յանդիմանակաց կողմանք ՄԹԲՊ ուղղանկեան, ուրեմն եւ ՄԹ=ՀՄ, ուրեմն կէտն Մ կայ ի կոնագծին: Վասն նորին իսկ պատճառաց եւ Ն է կէտ մի ի կիտից կոնագծի: Նովին օրինակաւ հնար է բազում կէտս որչափ եւ կամիցի ոք, Մ′Մ″.... Ն′Ն″... ընդ որս անցանիցէ կոնագիծն, գտանել:

Ա. Որովհետեւ ՄՆ է լար բոլորակին, որ ՀՄ կէս երկակարով ի Հ կենդրոնէ գրոշմեալ իցէ, եւ դարձեալ ի Հ կիտէ ձգեալ է ուղղորդ գիծն ՀՊ ի վերայ այնր լարի, նմին իրի ՄՊ=ՆՊ, եւ վասն նորին իսկ պատճառաց Մ′Պ′=Ն′Պ′, Մ″Պ″=Ն″Պ″, այլովքն հանդերձ: Ապա ուրեմն եթէ ԱՊ″Ն″ մասն, որ կայ ի ներքոյ առանցից, այնպէս իմն զետեղեալ դիցի ի վերայ վերագոյն ԱՊ″Մ″ մասին, որպէս զի ԱՊ″Ն″ ուղիղ անկիւնն ծածկիցէ զուղիղ անկիւնն ԱՊ″Մ″, յայնժամ հարկ է եւս զի կէտքն Ն, Ն′, Ն″.. ի միասին ի միում վայրի գտանիցին ընդ կէտս Մ, Մ′, Մ″..., որովհետեւ ՆՊ=ՄՊ, Ն′Պ′=Մ′Պ′, Ն″Պ″=Մ″Պ″, այլովքն հանդերձ: Ապա ուրեմն ԱՔ առանցքն բաժանէ զկոնագիծն յերկուս հաւասար եւ միմեանց պատշաճական մասունս։

Բ. Ամենայն ուղիղ գիծ ձգեալ հաւասար հեռաւոր յառանցից անտի, հատանէ զկոնագիծն։

Ի ԳԴ գծի անդ դիցուք կէտ մի Ռ, եւ ընդ այն ձգեսցուք զգիծն ՌԲ′ հաւասար հեռաւոր ի ԲԲ առանցից։ Ի Ժ միջավայրի ՀՌ ուղիղ գծին կանգնեա զուղղորդ գիծն ԺՄ, որ ի կէտն Մ ընդհարկանիցի ՌԲ′ ուղիղ գծի. ապա յետ այնորիկ ձգեա զուղիղ գիծն ՀՄ։ Արդ ի ՀԺՄ եւ ԺՄՌ երեքանկիւնս, կողմն ՀԺ = ԺՌ, եւ կողմն ԺՄ = ԺՄ, եւ անկ. ՀԺՄ = անկ. ՌԺՄ, ուստի եւ Δ ՀԺՄ ≅ Δ ԺՄՌ, կողմն ՀՄ = ՌՄ, եւ կէտն Մ կայ ի վերայ կոնագծի։

Գ. Ապա ուրեմն կոնագիծն է կոր ինչ գիծ առանց եզերաց եւ սահմանաց, որ հանապազ հեռանայ յառանցից իւրոց. քանզի յամենայն գծէ որ հաւասար հեռաւոր ձգեալ իցէ յառանցից անտի, յանհնարին եւ անբաւ հեռաւորութեան հատանի։

Դ. Ամենայն կէտ որ արտաքոյ կայցէ կոնագծի զոր օրինակ Ի, առաւել բացարձակ է ի հնոցէ անտի, քան եթէ յուղղիչ գծէ. իսկ կէտ ինչ Ի′ որ կայցէ ի կոնագծին, մերձաւորագոյն է ի հնոյն, քան եթէ ի գիծն ուղղիչ։ Արդ ձգեսցուք ընդ Ի զգիծն ՌԻ հաւասար հեռաւոր յառանցից, որ ի Մ հատանիցէ զկոնագիծն։ Արդ ձգեալ զուղիղ գիծ անՀԻ եւ ՀՄ, լինիցի յΔ ՀԻՄ բովանդակութիւնն ՀԻ + ԻՄ > ՀՄ, կամ որովհետեւ ՀՄ = ՌՄ եւս ՀԻ + ԻՄ > ՌՄ, եւ յերկոցունց կողմանց հանեալ զԻՄ, լինիցի ՀԻ > ԻՌ։ Ապա եթէ ի ներքս ի կոնագծին իցէ կէտն Ի′, յայնժամ իցէ ՀՄ + ՄԻ′ > ՀԻ′, իսկ արդ ՀՄ + ՄԻ′ = ՌՄ + ՄԻ′ = ՌԻ′. ուրեմն եւ ՌԻ′ > ՀԻ′։

100. Լարն ՆԷ, որ ընդ Հ հնոյն ձգիցի ուղղորդ ի վերայ առանցից, անուանեալ կոչի Աւընթերաչափ կոնագծի եւ որովհետեւ ՆՀ = ՀԷ, ուրեմն կարգածն հնոցին հաւասար է կիսոյ աւընթերաչափի։

Ա. Ի կոնագծի հեռաւորութիւն հնոցի ի գագաթանէ անտի, կամ բացարձակութիւն գագաթան յուղղչէ անտի, հաւասար է չորրորդ մասին առընթերաչափի:

Յե կիսէ ձգեա զԵԸ ուղղորդ ի ԳԴ, եւ իցէ ըստ Հ. 98. ԵԸ $=$ ԵՀ. իսկ արդ եւ ԵԸ $=$ ԲՀ, քանզի ուղղանկիւն է ԵԸԲՀ, ուրեմն ԲՀ $=$ ԵՀ $= \frac{1}{2}$ ԵԷ, եւ $\frac{1}{2}$ ԲՀ $= \frac{1}{4}$ ԵԷ. եւ քանզի $\frac{1}{2}$ ԲՀ $=$ ԱՀ $=$ ԱԲ, ուրեմն եւ ԱՀ $=$ ԱԲ $= \frac{1}{4}$ ԵԷ:

Բ. Ի կոնագծի բառնալի ճառագայթն իւրաքանչիւր կիտի հաւասար է յապաւածոյ նորին կիտի, յոր յաւելուցու եւ չորրորդ մասն առընթերաչափին: Քանզի ՀՄ $=$ ՄՌ $=$ ԲՊ $=$ ԱՊ $+$ ԱԲ. իսկ արդ ԱՊ է յապաւած Մ կիտի, եւ ԱԲ $= \frac{1}{4}$ ԵԷ (ըստ Ա). ուրեմն եթէ զբառնալի ճառագայթն դնիցեմք ծ, զառընթերաչափն ա եւ զյապաւածն ք, յայնժամ բառնալի ճառագայթն $\text{ծ} = \text{ք} + \frac{\text{ա}}{4}$:

101. Խնդիր: Գտանել հաւասարութիւնս ի միասին կարգածոյ:

Լուծումն: Յապաւածն ԱՊ $=$ ք իցէ, եւ կարգածն ՄՊ $=$ ջ, եւ առընթերաչափն ԵԷ $=$ ա: Արդ ի ՀՄՊ ուղղանկիւն երեքանկեան $\overline{\text{ՄՊ}}^2 = \overline{\text{ՀՄ}}^2 - \overline{\text{ՀՊ}}^2$

$= (\text{ՀՄ} + \text{ՀՊ})(\text{ՀՄ} - \text{ՀՊ})$, իսկ արդ $\text{ՀՄ} = \text{ք} + \frac{\text{ա}}{4}$,

$\text{ՀՊ} = \text{ԱՊ} - \text{ԱՀ} = \text{ք} - \frac{\text{ա}}{4}$, ուստի եւ $\text{ՀՄ} + \text{ՀՊ} =$

2ք, եւ $\text{ՀՄ} - \text{ՀՊ} = \frac{\text{ա}}{2}$, վասն որոյ եւ $\overline{\text{ՄՊ}}^2 = \text{ջ}^2 = \text{աք}$:

Ապա ուրեմն ի կոնագծի Երկրորդ կարողութիւն կարգածոյն հաւասար է ուղղանկեանն որ կազմիցի ի յապաւածոյ եւ յառընթերաչափէ:

Ա. Այսուիկ կարեմք գտանել զբազում կէտս կոնագծի, որչափ եւ կամք իցեն, եթէ ԱԲ առընթերաչափն յայտնի իցէ (Ձեւ 15.)։ Դնիջիր եթէ Ա իցէ գագաթն կոնագծի, եւ յերկայնութենէ անտի ԲԱ գծին հատ ԱԳ յապաւած իցէ։ Ի վերայ ԲԳ երկակորոյ դրոշմեա բոլորակ մի, որոյ շրջապատն հատանիցէ ի Ր, եւ Ս զուղղորդ գիծն կանգնեալ յԱ կիտի ի վերայ ԲՔ առանցից։ Ընդ կէտս այսոսիկ ձգեա զգիծս ՐՄ եւ ՄՆ հաւասար հեռաւորս ի ԲՔ առանցից, եւ կէտքն Մ եւ Ն, յորս գիծքս հատանեն զուղղորդ գիծն կանգնեալ ի Գ կէտ առանցից, կան ի վերայ կոնագծի։ Քանզի $\overline{ԱՐ}^2 = ԱԲ \times ԱԳ$, եւ որովհետեւ $ՄԳ = ԱՐ$, ուրեմն եւ $\overline{ՄԳ}^2 = ԱԲ \cdot ԱԳ$, եւ կէտն Մ կայ ի կոնագծին, որոյ առընթերաչափն $= ԱԲ$ (Հ. 101)։

Բ. Որովհետեւ $\overline{ՄԳ}^2 = ա \cdot ԱԳ$, եւ $\overline{Մ'Գ'}^2 = ա \cdot ԱԳ'$ (Ձեւ 15.), ուրեմն $\overline{ՄԳ}^2 : \overline{Մ'Գ'}^2 = ԱԳ : ԱԳ'$. ապա ուրեմն ի կոնագծի երկրորդ կարողութիւնք կարգածոյ ընդ յապաւածս ուղիղ համեմատին։

Գ. Զհաւասարութենէս $ք^2 = աբ$ գտեալ զայս $ք = \pm\sqrt{աբ}$. ապա ուրեմն իւրաքանչիւր $բ = ԱԳ$ յապաւածոյ պատշաճին երկու կարգածք. այս ինքն $ԳՄ = +\sqrt{աբ}$ եւ $ԳՆ = -\sqrt{աբ}$, յորս նշանքն $+$ եւ $-$ նշանակեն զհակառակ դիրս երկոցունց կարգածոց, ի վերայ եւ ի ներքոյ քան զառանցս։

Արդ եթէ առաջի կայցէ զկարգածս իրիք հաստատուն կիտի կոնագծին գտանել, պարտ է միայն ի $ք = \pm\sqrt{աբ}$ հաւասարութեան զնշանակութիւն $բ$ յապաւածոյ որ նմին կիտի պատշաճիցի, հաստատել։ Զոր օրինակ վասն Ա գագաթան է $բ = 0$, եւ $ք = \pm\sqrt{ա \cdot 0} = 0$, ապա ուրեմն գագաթն կոնագծի կայ յառանցսն։ Իսկ վասն Հ հնոցին է $բ = \frac{ա}{4}$, ուստի եւ $ք = \pm\sqrt{ա \cdot \frac{ա}{4}} = \pm\frac{ա}{2}$։ Ապա ուրեմն կարգածն ի հնոցին հաւասար է կիսոյ առընթերաչափի (Հ. 100.)։ Դարձեալ այնչափ ինչ մեծագոյն լինիցի կարգածն $\ddagger$, որչափ միանգամ մեծագոյն լինիցի $+$, եւ եթէ $+ = \infty$ դնիցեմք, յայնժամ $\ddagger = \pm\sqrt{- \cdot \infty}$, այս ինքն կարգածն եւս ի գլխովին լինիցի անհնարին եւ յանբաւս մեծ:

Ապա ուրեմն կոնագիծն է կոր ինչ գիծ, որ յերկոսին կողմանս յառաջիցի անտի առանց կատարածի հեռանայ:

Դ. Եթէ չիցէ ծանուցեալ հնոյն կոնագծի, մարթ է զայն մերձաւոր օրինակաւ, առընթերաչափիւ հանդերձ գտանել: ՅԱ գագաթանէ (Ձեւ 14.) ձգեա զգիծ ինչ ԱՄ ըստ հաճոյից, ի վերայ նորին ի կէտն Մ կանգնեա զուղղորդ գիծն ՄՐ, եւ դրոշմեա զկարգածն ՄՊ, յայնժամ հատածն առանցին, որ կայցէ միջին վայրի այնր ուղղորդ գծի եւ այսր կարգածոյ, այս ինքն է ՊՐ է հաւասար առընթերաչափի: Վասնզի յԱՄՐ երեքանկեան, ի գագաթանէ ուղիղ անկեան ուղղորդ ձգի գիծն ՄՊ ի վերայ ներքնաձգին. ուրեմն $\overline{ՄՊ}^2 =$ ԱՊ · ՊՐ, կամ ՊՐ $= \frac{\ddagger^2}{+}$. իսկ արդ ի հաւասարութենէ անտի $\ddagger^2 = -+$ ծագէ $\frac{\ddagger^2}{+} = -$, ուրեմն եւ ՊՐ $= -$:

Արդ իբրեւ հատանիցի ԱՀ $= \frac{1}{4}$ ՊՐ, յայնժամ Հ լինիցի հնոյ կոնագծին (Հ. 100. Ա.):

102. Խնդիր: Ձգել գիծ ինչ ուղիղ, որ շօշափիցէ զկոնագիծն ի կէտ ինչ ծանուցեալ Մ (Ձեւ 16.):

Լուծումն: Ի Մ կիտէ ի վերայ ուղղիչ գծի ձգեա զուղղորդ գիծն ՄՌ, ձգեա եւ զՀՌ, հատանեա զայն ի կէտն Ժ, եւ դրոշմեա զգիծն ԺՄ, որ եւ իցէ խնդրեալ շօշափօղն: Վասնզի առցուք արտաքոյ Մ կիտի յուղիղ գիծն ԺՄ, այլ որ զինչ եւ իցէ կէտ մի Ֆ, հարկ է այժմ Ֆ կիտի արտաքոյ կալ կոնագծի: Ձգեա զգիծն ՖՌ եւ ՖՀ, եւ եւս զՖ− ուղղորդ ի վերայ ուղղիչ գծի: Արդ ի կէտն Մ դրոշմեա զբառնալի ճառագայթն ՀՄ, յայտ է թէ ՀՄ = ՄՌ, եւ

ՀՄՌ է հաւասարասրուն երեքանկիւն, ուստի եւ ՄԺ ուղիղ գիծն ձգեալ ի Մ գագաթանէ ի վերայ Ժ միմիջավայրի ՀՌ խարսխին է ուղղորդ ի վերայ ՀՌ խարսխի։ Արդ որովհետեւ անկ. ՀԺՏ = ՌԺՏ, կողմն ՀԺ = ԺՌ, եւ կողմն ԺՏ = ԺՏ, ուրեմն ΔՀԺՏ ≅ ԺՏՌ, եւ ՀՏ = ՏՌ. իսկ արդ ՏՌ > ՏՒ, որովհետեւ անկ. ՏՒՌ = Ո = 90°, ուրեմն եւ ՀՏ > ՏՒ, եւ Տ կէտն կայ արտաքոյ կոնադծի (Հ. 99. Դ.)։ Նոյս մարթ է զայս օրինակ եւ վասն այլոց կիտից ԺՄ գծի, որ կայցեն արտաքոյ Մ կիտի, յայտ արարեալ ցուցանել. ապա ուրեմն ի Մ կէտն միայն շօշափէ գիծն այն ըզկոնադիծն։

Ա. Ի ՀՄՌ հաւասարասրուն երեքանկեան ուղիղ գիծն ՄԺ հատարակէ զանկիւնն գագաթան։ Ապա ուրեմն շօշափօղն կոնադծի իւիք հատարակէ զանկիւնն, որ կազմի ի կէտն շօշափման ի ՀՄ բառնալի ճառագայթէ եւ ի ՄՌ ուղղորդ գծէ։

Բ. Իբրեւ երկայնիցի ուղիղ գիծն ՌՄ մինչեւ ի Ք′, յայնժամ անկիւնն ԷՄՔ′ = ԺՄՌ = ՀՄԺ. ապա ուրեմն եթէ յոր զինչ եւ իցէ կիտի կոնադծի, ձգիցի շօշափօղ ինչ, եւ գիծ ինչ հաւասար հեռաւոր յառանցից, եւ ճառագայթն բառնալի, յայնժամ անկիւնքն, զոր յեռին երկու գիծքն ընդ շօշափողն կազմիցեն միմեանց հաւասարք են։

Գ. Եթէ առաջի կայցէ ի Ր կիտէ (Ձեւ 17.) ձգել շօշափօղ ինչ ի կոնադիծն, ձգեա նախ զգիծն ՀՐ, եւ նովաւ ի Ր միջոցէ ՀՐ կէօ երկակորով դրոշմեա բոլորակ ինչ, որոյ շրջապատն հատանիցէ զուղղիչ գիծն ի կէտսն Ռ եւ Ւ։ Յետ այնորիկ զգիծսն ՐՌ եւ ՐՒ, եւ հատարակեա զանկիւնսն ՀՐՌ եւ ՀՐՒ ի ձեռն ՐՄ եւ ՐՏ ուղիղ գծից որք շօշափիցեն զկոնագիծն։ Ցուցումն։ Որովհետեւ Ր կայ արտաքոյ կոնադծին, հարկ է զի բացարձակութիւն նորին ի հնոյէ անտի մեծագոյն իցէ քան զհեռաւորութիւնն յուղղիչ գծէ, ուստի եւ հարկ ի վերայ կայ զի բոլորակն, *որ ի Ր կիտէ ՀՐ կէս երկակողմ դրօշմիցի, յերկուս կէտս հատանիցէ զգիծն ուղղէչ: Արդ իբրեւ ընդ այս կէտս ձգիցին գիծքն ՌՄ եւ ՌՆ հաւասար հեռաւորք յառանցից, որք եւ ընդհարկանիցին ՐՄ եւ ՐՆ գծից ի կէտս Մ եւ Ն, դարձեալ եւ բառնալի ճառագայթքն ՀՄ, եւ ՀՆ, յայնժամ իցէ ΔՀՄՐ ≅ ΔՄՐՌ, քանզի կողմն ՀՐ = ՌՐ, կողմն ՐՄ = ՐՄ, եւ անկ. ՀՐՄ = անկ. ՄՐՌ, զորոյ զհետ գայ, եթէ ՀՄ = ՄՌ, եւ Մ կայ ի կոնագծի (Հ. 98.). եւ որովհետեւ անկ. ՀՄՐ = ՐՄՌ, ուրեմն ուղիղ գիծն ՐՄ շօշափէ զկոնագիծն ի Մ (Հ. 102. Ա.): Այնդունակ մարթ է ցուցանել, թէ եւ ուղիղ գիծն ՐՆ շօշափէ զկոնագիծն ի կէտն Ն:*

Դ. *Ձգեա* (Ձեւ 16.) *զուղիղ գիծն* ԱԺ: *Արդ որովհետեւ* ԱՀ = ԱԲ, *եւ* ՀԺ = ԺՌ, *ուրեմն* ԱԺ *հաւասար հեռաւոր է ի* ԲՌ *գծէ, ուստի եւ ուղղորդ ի վերայ* ԲՔ *առանցից, եւս է* ԱԺ : ԲՌ = ԱՀ : ԲՀ = 1 : 2. *զորոյ զհետ գայ* ԱԺ = ½ ԲՌ = ½ ՄՊ: *Ապա ուրեմն եթէ ձգիցի յԱ գագաթանէ ուղղորդ ինչ գիծ ի վերայ* ԱՔ *առանցից, եւ հատանիցի ի նմանէ մասն ինչ* ԱԺ = ½ ՄՊ, *յայնժամ ուղիղ գիծն* ԺՄ *ձգեալ ընդ* Ժ *ի* Մ *կոյս, շօշափիցէ ի* Մ *զկոնագիծն:*

103. *Երկպատիկ երկրորդ կարողութիւն ուղղորդ գծի, որ ի հնոյէ անտի կոնագծին ի վերայ շօշափողի միոյ* Մ *կիտի ձգիցի, հաւասար է արդեանց կիսոյ առընթերաչափի եւ բառնալի ճառագայթի այնր կիտի:*

Յ ԱՀԺ *երեքանկեան* (Ձեւ 16.) *է* $\overline{ՀԺ}^2 = \overline{ԱՀ}^2 + \overline{ԱԺ}^2$: *Արդ* ԱՀ *է չորրորդ մասն առընթերաչափին, զոր եթէ* $\frac{ա}{4}$ *քանիօնութեամբ նշանակիցեմք, լինիցի* $\overline{ԱՀ}^2 = \frac{ա^2}{16}$: *Դարձեալ* ԱԺ $= \frac{ֆ}{2}$ (Հ. 102. Դ.). *ուստի եւ* $\overline{ԱԺ}^2 = \frac{ֆ^2}{4}$ *եւ քանզի* $ֆ^2 = աք$, *ուրեմն* $\overline{ԱԺ}^2 = \frac{աք}{4}$:

Արդ եթէ ՀԺ = Ո դնիցեմք, եւ զհաւասարումն փոխանակիցեմք ի $\overline{ՀԺ}^2 = \overline{ԱՀ}^2 + \overline{ԱԺ}^2$ հաւասարութեան լինիցի $Ո^2 = \frac{ա^2}{16} + \frac{աբ}{4}$: Իսկ արդ $ճ = \frac{ա}{4} + բ$ (Հ. 100. Բ.), յորմէ եւ $բ = ճ - \frac{ա}{4}$, ուրեմն $Ո^2 = \frac{ա^2}{16} + \frac{աճ}{4} - \frac{ա^2}{16} = \frac{աճ}{4}$, յորմէ եւ $2Ո^2 = \frac{ա}{2} . ճ$:

104. Մասն առանցից, որ կայ ի մէջ կարգածոյ եւ շօշափողի Մ կիտին, այս է գիծն ՇՊ (Ձեւ 16.) անուանեալ կոչի Շօշափօղ ի ներքոյ՝ Մ կիտի, որպէս եւ ուղիղ գիծն ՄՇ Շօշափօղ նորին կիտի: Եթէ ի կէտն Մ ի վերայ շօշափողին կանգնիցի ուղղորդ ինչ գիծ, յայնժամ մասն նորին, որ կայ ի մէջ շօշափողի եւ առանցից, այս ինքն է ուղիղ գիծն ՄՆ, ասի Ուղղորդ գիծ, իսկ մասն ՊՆ, որ յուղղորդ գծէն եւ ի կարգածոյն հատանիցի յառանցսն՝ կոչի Ուղղորդ ի ներքոյ՝ Մ կիտի:

105. Ի կոնագծի շօշափօղն ի ներքոյ՝ հաւասար է երկպատկի յապաւածոյն, իսկ ուղղորդն ի ներքոյ՝ հաւասար կիսոյ առընթերաչափի:

Ի ՄՊՇ երեքանկեան (Ձեւ 16.) ԱԺ հաւասար հեռաւոր է ի ՄՊ գծէ, ուստի եւ ՇԱ : ՇՊ = ԱԺ : ՄՊ = 1 : 2, որովհետեւ (ըստ 102. Դ համարոյ) ԱԺ : ՄՊ = 1 : 2. ապա ուրեմն ՇԱ = ½ՇՊ, եւ ՇՊ հատարակեալ ի կէտն Ա, լինիցի ՇՊ = 2ԱՊ = 2բ:

Հաւասար հեռաւոր են գիծքն ՄՆ եւ ՀՌ, քանզի ուղղորդք կան ի վերայ ՇՄ շօշափողի. իսկ արդ ՀՆ եւ ՄՌ գիծքն եւս ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, ուրեմն ձեւն ՀՌՄՆ է հաւասար հեռաւոր ձեւ, եւ ՀՆ = ՄՌ. իսկ արդ ՄՌ = ԲՊ, ուրեմն եւս ՀՆ = ԲՊ. յորոյ իբրեւ յերկոցունց կողմանց հանցի ՀՊ, մնայ մնացորդ ՊՆ = ԲՀ, այս ինքն եթէ ուղղորդն ի ներքոյ հաւասար է կէս առընթերաչափի, քանզի (Հ. 100. Ա.) $ԲՀ = \frac{ա}{2}$ ։

Ա. Իբրեւ յառանցյան հատանիցի հատածն ԱՃ = ԱԳ յապաւածոյ, եւ կէտն Ճ յօդիցի ընդ Մ, յայնժամ ուղիղ գիծն ՃՄ շօշափէ զկինագիծն ի կէտն Մ ։

Բ. (Ձեւ 16.) է $\overline{ՄՃ}^2 = \overline{ՄԳ}^2 + \overline{ՃԳ}^2 = ք^2 + 4բ^2 = աբ + 4բ^2 = (ա + 4բ)\, բ$ ։ Ուրեմն նշանակութիւն շօշափողին՝ որ պատշաճիցի բ յապաւածոյ, գտանի ի հաւասարութենէս $ՄՃ = \sqrt{(ա + 4բ)\, բ}$ ։

Արդ որովհետեւ (Հ. 100. Բ.) $ճ = \frac{ա}{4} + բ$, եւ $4ճ = ա + 4բ$, ուրեմն $ՄՃ = \sqrt{4ճբ} = 2\sqrt{ճբ}$ ։

Գ. Դարձեալ է $\overline{ՄՆ}^2 = \overline{ՄԳ}^2 + \overline{ՆԳ}^2 = ք^2 + \frac{ա^2}{4} = աբ + \frac{ա^2}{4} = \left(բ + \frac{ա}{4}\right) ա$ ։ Ապա ուրեմն ուղղորդըն, որ պատշաճիցի բ յապաւածոյ է

$$ՄՆ = \sqrt{\left(բ + \frac{ա}{4}\right) ա} = \sqrt{աճ},$$

որովհետեւ (Հ. 100. Բ.) $ճ = բ + \frac{ա}{4}$ ։ Յայսորիկ զհետ գայ եւս, թէ ուղղորդն իցէ միջին համեմատական գիծ ի մէջ առընթերաչափի եւ բառնալի ճառագայթին ։

Դ. Հատածք առանցին՝ որ կան ի մէջ հնոցի եւ շօշափողի, եւ ի մէջ հնոցի եւ ուղղորդին, հաւասար են բառնալի ճառագայթի այնր կիտի ։ Ցուցումն ։ Որովհետեւ (Ձեւ 16.) գիծն ՌՔ՛ հաւասար հեռաւոր է ի ՃՔ գծէ, յայտ է եթէ անկիւնն ՌՄՃ = ՄՃՀ, իսկ արդ անկիւնն ՌՄՃ = ՃՄՀ, ուրեմն եւ անկ. ՄՃՀ = անկ. ՃՄՀ, եւ ի ՀՄՃ երեքանկեան կողմն ՃՀ = ՄՀ = ճ ։ Դարձեալ ի ՌՀՆՄ հաւասար հեռաւոր ձեւս կողմն ՀՆ = ՌՄ. իսկ արդ ՌՄ = ՀՄ, ուրեմն ՀՆ = ՀՄ = ք ։

Ապա ուրեմն յորժամ ի Հ հնոցէ ՀՄ կէս երկակտրով դրօշմիցի բոլորակ ինչ, շրջապատ նորին հատանիցէ զառանցս ի կէտս Շ և Ն, և յայսմանէ ծագէ այլ իմն պարզ և դիւրին օրինակ վասն դրօշմելոյ շօշափող ինչ և ուղղորդ ի Մ կէտ ինչ ի կիտից կոնագծի:

106. Խնդիր: Եթէ (Ձև 18.) ընդ կէտն Ս ձգեալ իցեն շօշափող ՇՍ և գիծն ՍՔ՛ հաւասար հեռաւոր յառանցից, և առցին հատածքն ՍՌ, ՍՌ՛ ի ՍՔ՛ գծի, որպէս յապաւածք, և դարձեալ գիծքն ՄՌ, Մ՛Ռ՛ հաւասար հեռաւորք ի շօշափողէ անտի որպէս կարգածք Մ, Մ՛ կիտից, առաջի կայ գտանել հաւասարութիւնս այսոցիկ ի միասին կարգածոց կոնագծին:

Լուծումն: Դիցուք $\text{ՄՌ} = \text{ա}$, և $\text{ՍՌ} = \text{բ}$. ի Ս և ի Մ կիտից ձգեսցուք զուղղորդ գիծսն ՍՐ և ՄՊ ի վերայ առանցից, և իցէ $\text{ԱՐ} = \text{գ}$, և բառնալի ճառագայթն $\text{ՀՍ} = \text{դ}$. յայնժամ (Հ. 101. Գ.) $\text{ՍՐ} = \sqrt{\text{ագ}}$, $\text{ՇՐ} = 2\text{գ}$ (Հ. 105.) և $\text{ՍՇ} = 2\sqrt{\text{գդ}}$ (. 105. Բ.):

Միմեանց նման են երեքանկիւնքն ՄՌՏ և ՍՇՐ, որովհետև հաւասար հեռաւոր են ի միմեանց երեք կողմանքն փոխանակաւ, ուստի և $\text{ՄՏ} : \text{ՄՌ} = \text{ՍՐ} : \text{ՍՇ}$, կամ թէ $\text{ՄՏ} : \text{ա} = \sqrt{\text{ագ}} : 2\sqrt{\text{գդ}}$, և $\text{ՄՏ} = \frac{\text{ա}}{2}\sqrt{\frac{\text{ա}}{\text{դ}}}$: Դարձեալ է $\text{ՌՏ} : \text{ՄՌ} = \text{ՇՐ} : \text{ՍՇ}$, կամ $\text{ՌՏ} : \text{ա} = 2\text{գ} : 2\sqrt{\text{գդ}}$, յորմէ $\text{ՌՏ} = \text{ա}\sqrt{\frac{\text{գ}}{\text{դ}}}$: Ապա ուրեմն $\text{ՄՊ} = \text{ՄՏ} + \text{ՏՊ} = \text{ՄՏ} + \text{ՍՐ}$, կամ $\text{ք} = \frac{\text{ա}}{2}\sqrt{\frac{\text{ա}}{\text{դ}}} + \sqrt{\text{ագ}} = \left(\sqrt{\text{գ}} + \frac{\text{ա}}{2\sqrt{\text{դ}}}\right)\sqrt{\text{ա}}$: Դարձեալ $\text{ԱՊ} = \text{ԱՐ} + \text{ՐՊ} = \text{ԱՐ} + \text{ՍՏ} = \text{ԱՐ} + \text{ՍՌ} + \text{ՌՏ}$, կամ $\text{խ} = \text{գ} + \text{բ} + \text{ա}\sqrt{\frac{\text{գ}}{\text{դ}}}$: Արդ եթէ փոխանակ խ և ք քանիօնութեանց զնշանակութիւնս փոխանակ կիցեմք ի հաւասարութիւնս $է^2 = աէ$, ելանէ

$$ա\left(\sqrt{է}+\frac{ք}{2\sqrt{ճ}}\right)^2 = ա\left(է+ջ+ք\sqrt{\frac{է}{ճ}}\right), \text{ կամ}$$

$$է+ք\sqrt{\frac{է}{ճ}}+\frac{ք^2}{4ճ}=է+ջ+ք\sqrt{\frac{է}{ճ}}, \text{ կամ } ք^2=4ճջ:$$

Արդ եթէ $4ճ = 4ՀՍ = տ$ դնիցեմք, յայնժամ հաւասարութիւնն ի մէջ ՍՌ եւ ՄՌ ի միասին կարգածոյն, այս ինքն $ք^2 = տջ$ իցէ նման ամենեւին հաւասարութեան որ գտանիցի վասն $ա$ եւ $է$, ի միասին կարգածոյ:

Ա. Որովհետեւ $ք = \pm\sqrt{տջ}$, ուրեմն իւրաքանչիւր յապաւածոյ $ջ = ՍՌ$, կշռին երկու կարգածք, այս ինքն $ՄՌ = +\sqrt{տջ}$, եւ $ճՌ = -\sqrt{տջ}$. որոց քանիօնութիւնքն ամենեւին հաւասարք են միմեանց, եւ միայն դրիւքն այս ինքն ի ներքոյ եւ ի վերոյ կալով քան զՍՔ՛ առանցս ի միմեանց այլակերպք են: Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն Ս·Բ՛ ձգեալ ընդ Ս կէտ հաւասար հեռաւոր յԱ·Բ առանցէն, հատանէ զլարն Մճ, Մ՛ճ՛, այլովքն հանդերձ, որք հաւասար հեռաւորք են ի շօշափողէ կոնագծին ձգելոյ ընդ կէտն Ս:

Բ. Որովհետեւ $\overline{ՄՌ}^2 = տ \cdot ՍՌ$, եւ $\overline{Մ'Ռ'}^2 = տ \cdot ՍՌ'$, ուրեմն $\overline{ՄՌ}^2 : \overline{Մ'Ռ'}^2 = ՍՌ : ՍՌ'$, այս ինքն Երկրորդ կարողութիւնք ծուռ կարգածոց նոյնպէս համեմատին ուղիղ ընդ յապաւածս իւրեանց. եւ այս հանգամանք պատշաճի առ հատարակ կոնագծի:

107. Խնդիր: Զտարածութիւն երեսաց հատածոյ կոնագծի գտանել:

Լուծումն: (Ձեւ 19.) լարն Մճ հատանիցի ի կէտն Ռ, եւ ի Մ, Ռ եւ ճ կիտից ի վերայ ԱԲ առանցէն ձգիցին ուղղորդ գիծքն ՄՊ, Ռ—, եւ ճ—, յայտ է թէ տարածութիւն երեսաց սեղանիս ՄՊ—ճ = Ռ—. Պ—: ՅԱ գագաթան կանգնեա զուղղորդ գիծն ԱԴ, եւ ի վերայ նորին ի կէտսն Մ, Ռ, եւ ֆ ձգեա զուղղորդ գիծսն ՄՆ, ՌՐ, եւ ֆՃ, եւ լինիցի սեղանս ՄՆՃֆ = ՌՐ · ՆՃ ։ Ի Ս կիտէ, յորում գիծն ՌՐ հատանէ զկոնագիծն, դրոշմեա զկարգածն ՍՏ, եւ ԱՇ = ԱՏ առնիջիր, եւ ձգեա զՇՍ, որ զկոնագիծն ի Ս շօշափիցէ, եւ (Հ. 106.) հաւասար հեռաւոր իցէ ի Մֆ լարէ ։

Ի Մֆբ եւ ՍՇՏ նման երեքանկիւնս է Մբ : ֆբ = ՍՏ : ՇՏ, եւ Մբ × ՇՏ = ֆբ × ՍՏ ։ Իսկ արդ Մբ = ՆՃ, ՇՏ = 2ԱՏ = 2ՐՍ = 2 (ՌՐ — ՍՌ), ֆբ = Պպ, եւ ՍՏ = Ռռ. զորոյին զհետ գայ եւս Ռռ × Պպ = 2 (ՌՐ — ՍՌ) · ՆՃ = 2ՌՐ · ՆՃ — 2ՍՌ · ՆՃ ։ Արդ իբրեւ առնուցումք յանձն, եթէ անհնարին եւ յանբաւս փոքր իցէ լարն Մֆ, յայնժամ մարթ ինչ իցէ ՍՌ = 0 դնել, եւ լինիցի Ռռ · Պպ = 2 ՌՐ · ՆՃ, այս է ՄՊպֆ = 2ՄՆՃֆ ։ Արդ համարեսցուք եթէ տարածութիւնն երեսաց, ԱֆՄԳԲ եւ ԱֆՄԳԴ բովանդակ ի սոյնպիսի անհնարին փոքր սեղանս բաժանեալ իցէ, յայտ է եթէ սեղանն ՄՊպֆ երկպատիկ մեծ է քան զսեղանն ՄՆՃֆ որ նմին կշռիցի, վասն որոյ եւ ողջոյն իսկ անջրպետութիւնն ԱՍԳԲ = 2ԱՍԳԴ ։ Յաւելեալ յերկոսին կողմանս զանջրպետութիւնն ԱՍԳԴ, ելանէ ԱՍԳԲ + ԱՍԳԴ = 3ԱՍԳԴ, այս է ուղղանկիւնն ԱԲԳԴ = 3ԱՍԳԴ, զորոյ զհետ գայ ԱՍԳԴ = $\frac{1}{3}$ ԱԲԳԴ, եւ ԱՍԳԲ = $\frac{2}{3}$ԱԲԳԴ ։ Որեմն. Տարածութիւն երեսաց հատածոյ կոնագծի, որ կայ ի մէջ ԱԲ յապաւածոյ եւ ԲԳ կարգածոյ հաւասար է երկուց երրորդ մասանց ուղղանկեանն՝ որ կազմի յԱԲ եւ ի ԲԳ ի միասին կարգածոյ ։

ԳԼՈՒԽ Բ

ՅԱՂԱԳՍ ԵՐԿԱՅՆԱՁԻԳ ԲՈԼՈՐԱԿԻ

108. Երկայնաձիգ բոլորակն է կոր ինչ գիծ, յորում բովանդակութիւն հեռաւորութեանց իւրաքանչիւր կիտի յերկուց հաստատուն կիտից, հաւասար է իրիք հաստատուն գծի. որպիսի ինչ (Ձեւ 20.) են հեռաւորութիւնք Մ կիտի ի Հ եւ Ջ կիտից, որոց բովանդակութիւն ՀՄ + ՋՄ = ԹԻ: Կէտքն Հ եւ Ջ անուանեալ կոչին Հնոցք երկայնաձիգ բոլորակին, իսկ ուղիղ գիծքն ՀՄ եւ ՋՄ Բառնալի ճառագայթք Մ կիտի:

Յասացելոյս զհետ գայ, եթէ բացարձակութիւնք հնոցացն, այս ինքն է ուղիղ գիծն ՀՋ հարկ է զի ցանդ փոքրագոյն իցէ քան զԹԻ. քանզի յΔՀՋՄ է ՀՋ < ՀՄ + ՋՄ, ուրեմն ՀՋ < ԹԻ:

109. Կենդրոն կամ միջավայր երկայնաձիգ բոլորակի է Կ կէտն՝ որ հաւասար հեռի կայ ի հնոցաց, իսկ բացարձակութիւն հնոցաց ի կենդրոնէ անտի, այս ինքն է ԿՀ = ԿՋ, անուանեալ կոչի Այլակենդրոնութիւն երկայնաձիգ բոլորակին: Եթէ ընդ երկոսին կողմանս երկայնիցի գիծն ՀՋ, եւ առնիցի ԿԱ = ԿԲ = ½ ԹԻ, յայնժամ Ա եւ Բ կէտքն կայցեն յերկայնաձիգ բոլորակին, որք եւ կոչին Գագաթունք երկայնաձիգ բոլորակին: Քանզի ԱԿ = ԲԿ, ՀԿ = ՋԿ, ուրեմն եւս ԱՀ = ԲՋ. իբրեւ յերկոսին կողմանս եւս յաւելցի ԱՋ, իցէ ԱՀ + ԱՋ = ԲՋ + ԱՋ = ԱԲ = ԹԻ. սոյնգունակ եթէ յերկոսին կողմանս եւս յաւելցի ԲՀ, ծագէ ԲՋ + ԲՀ = ԱՀ + ԲՀ = ԱԲ = ԹԻ. ուրեմն Ա եւ Բ կէտքն կան յերկայնաձիգ բոլորակին: Ուղիղ գիծն ԱԲ, որ ընդ միմեանս յօդէ զգագաթունս Ա եւ Բ, անուանեալ կոչի Մեծագոյն առանցք երկայնաձիգ բոլորակին:

110. Յամենայն բառնալի ճառագայթս, որ ի միոյ հնոցէ յերկայնաձիգ բոլորակ անդր ձգել կարի-

ցեն, այն՝ որ ի մերձաւոր գագաթն ձգիցի, քան զայլն կարճագոյն է, իսկ որ ի նմին հնոցէ առ մեւս գագաթն ձգիցի, երկայնագոյն է քան զայլն:

Որովհետեւ ԱԲ $=$ ՄՁ $+$ ՀՄ, ուրեմն ԱԿ $= \frac{\text{ՄՁ}+\text{ՀՄ}}{2}$. իսկ արդ ՀՁ $>$ ՄՁ $-$ ՀՄ (քանզի յΔՀՁՄ իւրաքանչիւր կողմն մեծագոյն է քան զայլակերպութիւն այլոց երկուց կողմանց), վասն այնորիկ եւս ԿՀ $> \frac{\text{ՄՁ}-\text{ՀՄ}}{2}$, եւ ԱԿ$-$ԿՀ $< \frac{\text{ՄՁ}+\text{ՀՄ}}{2} - \frac{\text{ՄՁ}-\text{ՀՄ}}{2}$. կամ ԱՀ $<$ ՀՄ:

Նոյնպէս եւ երկրորդ մասն: Որովհետեւ ԲԿ $= \frac{\text{ՀՆ}+\text{ՁՆ}}{2}$, եւ ՀԿ $> \frac{\text{ՀՆ}-\text{ՁՆ}}{2}$, ուրեմն ԲԿ $+$ ՀԿ $> \frac{\text{ՀՆ}+\text{ՁՆ}}{2} + \frac{\text{ՀՆ}-\text{ՁՆ}}{2}$, այս ինքն ԲՀ $>$ ՀՆ:

111. Խնդիր: Ծանուցեալ զմեծագոյն առանցս եւ զերկոսին հնոցս երկայնաձիգ բոլորակին, գտանել զկէտս երկայնաձիգ բոլորակին, բազումս որչափ եւ կամք իցեն:

Լուծումն: Ձեւ 20, իցէ ԱԲ մեծագոյն առանցքն, եւ Հ եւ Ձ իցեն հնոցքն, եւ Ա եւ Բ գագաթունք երկայնաձիգ բոլորակին: Արդ ի մէջ Հ եւ Ձ կիտից առցուք որ զինչ եւ իցէ կէտ մի Ր ըստ մերոյ հաճոյից զայսոր դհետ գայ ԱՐ $>$ ԱՀ, եւ ԲՐ $<$ ԲՀ (Հ. 110.), եւ ի Հ միջոցէ ՀՄ $=$ ԱՐ կէս երկակորով ձգեսցուք բոլորակ ինչ: Նոյնգունակ ի Ձ կենդրոնէ ՁՄ $=$ ԲՐ կէս երկակորով դրոշմեսցուք մեւս եւս բոլորակ. շրջապատք նոցին հատանիցեն զմիմեանս ի Մ եւ Տ կէտս, որք եւ կան յերկայնաձիգ բոլորակին: Ցուցումն: Քանզի ՀՄ $=$ ԱՐ եւ ՁՄ $=$ ԲՐ, ուստի եւ ՀՄ $+$ ՁՄ $=$ ԱՐ $+$ ԲՐ $=$ ԱԲ. նոյն օրինակաւ ցուցանի եւս ՀՏ $+$ ՁՏ $=$ ԱԲ. ուրեմն Մ եւ Տ կէտքն կան յերկայնաձիգ բոլորակին:

Ա. Որովհետեւ մեծագոյն առանցքն ԱԲ անցանէ ընդ երկոսին Հ եւ Չ կենդրոնս երկոցունց դրոշմեալ բոլորակաց, նմին իրի ուղղորդ հատանէ զՄ՛ հասարակաց լար այսոցիկ բոլորակաց, եւ գործէ ՄՊ = Պ՛, եւ որովհետեւ այս զօրէ եւս վասն Ն՛Ն՛ իւրաքանչիւր լարի, որ ձգեալն է ընդ երկուս կէտս սոյնն օրինակաւ դրոշմելոյ, նմին իրի ԱԲ մեծագոյն առանցքն հատանէ զերկայնաձիգ բոլորակն յերկուս հաւասար եւ պատշաճական մասունս:

112. Դ՛Ե լարն՝ որ ձգիցի ընդ կէտն Կ ուղղորդ ի վերայ մեծագոյն առանցից, կոչի Փոքրագոյն առանցք երկայնաձիգ բոլորակին, եւ է եւս ԴԿ = ԿԵ (Հ. 111. Ա.):

Ի Կ կենդրոնէ ՀՆ = ՉՄ կէս երկակորով, եւ ի Չ կենդրոնէ ՉՆ = ՀՄ կէս երկակորով դրոշմեա երկուս բոլորակս, եւ զկէտս հատմանցս շրջապատոյ նոցին զմիմեանս յօդեա Ն՛Ն՛ ուղիղ գծիւ, յայտ է եթէ Ն եւ Ն՛ կէտքն կան յերկայնաձիգ բոլորակին, քանզի ՀՆ + ՉՆ = ՉՄ + ՀՄ = ԱԲ. նոյնպէս եւ ՀՆ՛ + ՉՆ՛ = ԱԲ: Դարձեալ որովհետեւ ΔՀՉՄ ≅ ՀՉՆ, ուրեմն ՄՊ = ՆՌ, եւ ՀՊ = ՉՌ, ուստի եւ ԿՊ = ԿՌ: Արդ իբրեւ ձգիցի Մ՛Ն, լինիցի Մ՛Ն # ՊՌ. եւ քանզի ՄՊ # ՆՌ է, եւ որովհետեւ փոքրագոյն առանցքն ԴԵ հաւասար հեռաւոր է ի ՄՊ եւ ՆՌ գծից, եւ զՊՌ հատանէ ի Կ, ուրեմն հատանէ եւս զլարն Մ՛Ն, եւ է ուղղորդ ի վերայ նորին: Իսկ արդ սոյնն օրինակաւ մարթեմք ցուցանել, եթէ ամենայն լար հաւասար հեռաւոր ի մեծագոյն առանցից հատանի ի փոքրագոյն առանցից: Ապա ուրեմն փոքրագոյն առանցքն եւս բաժանէ զերկայնաձիգ բոլորակն յերկուս հաւասար եւ միմեանց պատշաճական մասունս:

113. Եւ ոչ մի կէտ ի կիտից երկայնաձիգ բոլորակին, արտաքոյ երկուց գագաթանց կամ երկուց ծայրից մեծագոյն առանցից կալ կարէ:

Դնիցուք եթէ կէտ մի Ս կայցէ յերկայնաձիգ բոլորակին, յորմէ մարթիցի ձգել գիծն ՍՔ ուղղորդ ի վերայ երկայնութեան ԱԲ մեծագոյն առանցից, հարկ է զի իցէ ՀՍ + ՋՍ = ԱԲ: Իսկ արդ ՀՔ = ԲՀ + ԲՔ, եւ ՋՔ = ԲՋ + ԲՔ = ԱՀ + ԲՔ. ուրեմն ՀՔ + ՋՔ = ԱԲ + 2ԲՔ: Դարձեալ ի ՀՍՔ ուղղանկիւն երեքանկեան ներքնաձիգն ՀՍ > ՀՔ, եւ ի ՋՍՔ ուղղանկիւն երեքանկեան եւս ՋՍ > ՋՔ. ուստի եւ ՀՍ + ՋՍ > ՀՔ + ՋՔ, կամ թէ եւս ՀՍ + ՋՍ > ԱԲ + 2ԲՔ: Ապա ուրեմն չկարէ ՀՍ + ՋՍ = ԱԲ լինել, եւ ոչ իսկ Ս կէտն յերկայնաձիգ բոլորակի կալ:

114. Կէսն փոքրագոյն առանցից է միջին համեմատական ի մէջ մեծագոյն եւ փոքրագոյն բառնալի ճառագայթից, կամ ի մէջ հեռաւորութեանց իւրաքանչիւր հնոցի յերկոցունց գագաթանց երկայնաձիգ բոլորակին:

Ի ԿԴՀ եւ ԿԴՋ ուղղանկիւն երեքանկիւնս ԿՀ = ԿՋ, ԿԴ = ԿԴ, ուստի եւ կողմն ԴՀ = ԴՋ եւս. եւ որովհետեւ ԴՀ + ԴՋ = ԱԲ, ուրեմն եւ ԴՀ = ԴՋ = ½ԱԲ = ԱԿ: Ապա ուրեմն ի ԿԴՀ ուղղանկիւն երեքանկեան $\overline{\text{ԿԴ}}^2 = \overline{\text{ԴՀ}}^2 - \overline{\text{ԿՀ}}^2 = \overline{\text{ԱԿ}}^2 - \overline{\text{ԿՀ}}^2 = (\text{ԱԿ} + \text{ԿՀ})(\text{ԱԿ} - \text{ԿՀ})$: Իսկ արդ ԱԿ − ԿՀ = ԱՀ, եւ ԱԿ + ԿՀ = ԲԿ + ԿՀ = ԲՀ, ուրեմն եւ $\overline{\text{ԿԴ}}^2 = \text{ԱՀ} \cdot \text{ԲՀ}$, եւ ԱՀ : ԿԴ = ԿԴ : ԲՀ:

Ա. Զկէս մեծագոյն առանցից, զկէս փոքրագոյն առանցից, զայլակենդրոնութիւնն նշանակեսցուք կարգաւ **ա**, **բ**, եւ **ե** նշանագրովք, յայտ է եթէ ի ԿԴՀ երեքանկեան իցէ $\text{ա}^2 = \text{բ}^2 + \text{ե}^2$, $\text{բ}^2 = \text{ա}^2 - \text{ե}^2$, եւ $\text{ե}^2 = \text{ա}^2 - \text{բ}^2$:

Բ. Եթէ ծանուցեալ եւ յայտնի իցեն երկոքին առանցքն, զհնոցսն մարթ է մերձաւոր օրինակաւ գտանել: Ի Կ միջոցի անդ կանգնեա զկէս փոքրագոյն առանցից զԿԴ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ մեծագոյն առանցից, ի Դ միջոցէ անտի ԱԿ կէս երկակըտրով դրոշմեա բոլորակ մի, որ զմեծագոյն առանցս հատանիցէ ի կէտս Հ եւ Ձ, ուք եւ իցեն խնդրեալ հնոցքն երկայնաձիգ բոլորակին:

115. Լարն ԸԺ կամ Ը′Ժ′ որ ընդ Հ եւ Ձ հնոյս ձգիցի ուղղորդ ի վերայ մեծագոյն առանցից, է Առընթերաչափ երկայնաձիգ բոլորակին. եւ որովհետեւ (Հ. 112.) $ԸԺ = Ը'Ժ'$ (քանզի $ԿՀ = ՀՁ$), վասն որոյ կէս առընթերաչափն $ԸՀ = Ը'Ձ$ նշանակի $ը$ նշանագրաւ:

116. Կէս առընթերաչափն է երրորդ անքակ համեմատական կէս մեծագոյն առանցից եւ կէս փոքրագոյն առանցից:

Քանզի է $ԸՁ + ԸՀ = ԱԲ$, եւ $ԸՁ = ԱԲ - ԸՀ = 2ա - ը$: Ի ԸՀՁ ուղղանկիւն երեքանկեան է $\overline{ԸՁ}^2 = \overline{ԸՀ}^2 + \overline{ՀՁ}^2 = ը^2 + 4ե^2$. զորոյ զհետ գայ $(2ա - ը)^2 = ը^2 + 4ե^2$ կամ $4ա^2 - 4աը + ը^2 = ը^2 + 4ե^2$: Իբրեւ յերկոցունց անդամոց հաւասարութեանս հանցի $ը^2$, եւ այլակերպութիւնքն բաժանիցին ընդ 4, յայնժամ ծագէ $աը = ա^2 - ե^2 = բ^2$ (Հ. 114.), ուստի եւս $ա : բ = բ : ը$, կամ $ԱՀ : ՀԴ = ՀԴ : ԸՀ$, եւ $ը = \frac{բ^2}{ա}$:

117. Խնդիր: Գտանել զհաւասարութիւն վասն իւրաքանչիւր տանելի ճառագայթի (Ձեւ 20.):

Լուծումն: Ի Մ կիտէ ձգեա զՄՊ ուղղորդն կամ զկարգածն ի վերայ մեծագոյն առանցից, եւ նմին կշռեալ յապաւածն՝ իցէ մասն որ կայ ի մէջ այսր կարգածի եւ Կ կենդրոնի. այս ինքն է մասն $ԿՊ = դ$: Արդ ի ՁՄՊ եւ ՀՄՊ ուղղանկիւն երեքանկիւնս է $\overline{ՁՄ}^2 = \overline{ՄՊ}^2 + \overline{ՁՊ}^2$, եւ $\overline{ՀՄ}^2 = \overline{ՄՊ}^2 + \overline{ՀՊ}^2$. զորոյ զհետ գայ $\overline{ՁՄ}^2 - \overline{ՀՄ}^2 = \overline{ՁՊ}^2 - \overline{ՀՊ}^2$, կամ $(ՁՄ + ՀՄ)(ՁՄ - ՀՄ) = (ՁՊ + ՀՊ)(ՁՊ - ՀՊ)$: Իսկ արդ $ՁՄ + ՀՄ = 2ա$, $ՁՊ = ԿՁ + ԿՊ = ե + դ$, եւ $ՀՊ = ե - դ$. ուրեմն $ՁՊ + ՀՊ = 2ե$, $ՁՊ - ՀՊ = 2դ$, եւ վասն այնորիկ $2ա(ՁՄ - ՀՄ) = 2ե \cdot 2դ = 4եդ$, կամ

$\frac{ԶՄ - ՀՄ}{2} = \frac{եզ}{ա}$: Արդ որովհետեւ կէս այլակերպութիւն, եւ գումարեալ կէս բովանդակութիւն երկոցունց բանալի ճառագայթից, այս է $\frac{ԶՄ + ՀՄ}{2} = ա$, ծանուցեալ են, տատանին մեծագոյնն ի բանալի ճառագայթիցն $ԶՄ = ա + \frac{եզ}{ա}$, իսկ փոքրագոյնն $ՀՄ = ա - \frac{եզ}{ա}$:

Ա. Ի հասարակաց օրինակէս $ՀՄ = ա - \frac{եզ}{ա}$ գտանի նշանակութիւն բանալի ճառագայթի վասն իւրաքանչիւր կիտի, միայն զի ի հաւասարութեան անդ փոխանակ զ յապաւածոյ, զնմին կիտի կշռեալ յապաւածն դնիցեմք: Զոր օրինակ եղեալ $զ = ա$, լինիցի $ՀԱ = ա - ե$. իսկ համարեալ $զ = ե = ԿՀ$, ծագէ $ՀԸ = ա - \frac{ե^2}{ա} = \frac{ա^2 - ե^2}{ա} = \frac{է^2}{ա} = ը$ (Հ. 116.): Իսկ Գ կիտի յապաւածն է $= 0$, եւ $ՀԳ = ա$:

Իսկ ի միւս կողմն կենդրոնին նոյն յապաւածքն ուրացական համարին, որպիսի ինչ վասն Ը′ կիտի յապաւածն $զ = - ե$, եւ $ՀԸ' = + \frac{ե^2}{ա}$: Վասն Թ կիտի է $զ = - ա$, եւ $ՀԹ = ա + ե$:

118. Խնդիր: Գտանել զհաւասարութիւն վասն ի միասին կարգածոյ երկայնաձիգ բոլորակին:

Լուծումն: Իցէ $ՄԳ = ժ$, եւ $ԿԳ = զ$: Յուղղանկիւն ՀՄԳ երեքանկեան է $\overline{ՄԳ}^2 = \overline{ՀՄ}^2 - \overline{ՀԳ}^2 = (ՀՄ + ՀԳ)(ՀՄ - ՀԳ$: Իսկ արդ $ՀՄ = ա - \frac{եզ}{ա}$, եւ $ՀԳ = ԿՀ - ԿԳ = ե - զ$, ուրեմն

$$ՀՄ + ՀԳ = \frac{(ա + ե)ա - (ա + ե)զ}{ա} = \frac{(ա + ե)(ա - զ)}{ա},$$

$$եւ\ ՀՄ - ՀՊ = \frac{(ա - ե)ա + (ա - ե)ի}{ա} =$$

$$\frac{(ա - ե)(ա + ի)}{ա}\ ։$$

Իբրեւ նշանակութիւնքն հաստատեցին ի վերագոյն եդեալ հաւասարութիւնս, ելանէ ի կատարած

$$զ^2 = \frac{(ա + ե)(ա - ե)(ա + ի)(ա - ի)}{ա^2} =$$

$$\frac{(ա^2 - ե^2)(ա^2 - ի^2)}{ա^2} = \frac{ք^2}{ա^2}(ա^2 - ի^2),$$ որովհետեւ $ա^2 - ե^2 = ք^2$ (Հ. 114. Ա.)։

Ա. Արդ որովհետեւ $զ = \pm \frac{ք}{ա}\sqrt{(ա^2 - ի^2)}$, ուրեմն իւրաքանչիւր յապաւածոյ ԿՊ $=$ ի, կշռին երկու կարգածք ՊՄ, եւ Պմ, ուրեմն աստի յայտ է եթէ մեծագոյն ԱԲ առանցքն հասարակէ զիւր երկայնաձիգ բոլորակն։ Դարձեալ եթէ ԿՌ $=$ ԿՊ իցէ, ուրեմն եւ վասն ԿՊ $= +$ի, եւ վասն ԿՌ $= -$ի յապաւածոյ, երկրորդ կարողութիւն յապաւածոյն նոյն իցէ, այս ինքն $ի^2$, ուստի եւ յերկոսին դէպսն եւս զնոյն նշանակիցէ $(ա^2 - ի^2)$։ Զայսր զհետ գայ եւս ՄՊ $=$ ՆՌ, եւ Պմ $=$ Ռն, յորմէ դարձեալ ի վերայ բերեմք, եթէ փոքրագոյն առանցքն ԴՆ հասարակէ զերկայնաձիգ բոլորակն յերկուս մասունս հաւասարս։

Եթէ $ի = \pm ա$ իցէ, յայնժամ $\sqrt{(ա^2 - ի^2)} = 0$, ուստի եւ $զ = 0$. զորոյ զհետ գայ, թէ երկայնաձիգ բոլորակն անցանէ ընդ գագաթունս կամ ընդ ծագս ԱԲ մեծագոյն առանցից։ Եթէ յապաւածն $ի > ա$ լինելոյ իցէ, յայնժամ $ա^2 - ի^2$ իցէ ուրացական ինչ քանակութիւն եւ $\sqrt{(ա^2 - ի^2)}$, եւ զ եւս ի գլխովին ցնորական ինչ նշանակութիւն ունիցի։ Ապա ուրեմն երկայնաձիգ բոլորակն չկարէ արտաքոյ քան զԱ եւ Բ գագաթունս ըստ երկայնեալ կողմանս ԱԲ առանցից երկայնել հեռանալ, այլ դառնալ յինքն զըլխովին, եւ ի միջի փակէ զանջրպետութիւն ինչ:

Բ. Ի Մ կիտէ, որ կայ յերկայնաձիգ բոլորակի (Ձեւ 21.) ի վերայ ԴԵ փոքրագոյն առանցից ձգեա զուղղորդ գիծն ՄՐ, համարեսջիր զՄՐ $=$ փ որպէս կարգած, եւ զԿՐ $=$ ց որպէս յապաւած Մ կիտի: Որովհետեւ ՄՐ $=$ ԿԳ կամ փ $=$ ֆ, եւ ԿՐ $=$ ՄԳ, կամ ց $=$ ք, նմին իրի (եթէ զնշանակութիւնս զայսոսիկ փոխանակիցեմք ի հաւասարութեանս $ք^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(ա^2 - ֆ^2)$, ծագէ $ց^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(ա^2 - փ^2)$, յորմէ եւ

$փ^2 = ա^2 - \frac{ա^2 ց^2}{բ^2} = \frac{ա^2}{բ^2}(բ^2 - ց^2)$. զորոյ զհետ գայ, եթէ Հաւասարութիւնն վասն ի միասին կարգածոց երկայնաձիգ բոլորակին առ համեմատութեամբ փոքրագոյն առանցից, նոյն է ընդ հաւասարութեան ի միասին կարգածոց՝ որ կշռեալ ընդ մեծագոյն առանցից վերագոյնդ գտաւ:

Գ. Որովհետեւ $\overline{ՄԳ}^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(ա^2 - \overline{ԿԳ}^2) = \frac{բ^2}{ա^2} \times (ա + ԿԳ)(ա - ԿԳ)$. իսկ արդ $ա + ԿԳ = ԲԿ + ԿԳ = ԲԳ$, եւ $ա - ԿԳ = ԱԿ - ԿԳ = ԱԳ$, ուրեմն $\overline{ՄԳ}^2 = \frac{բ^2}{ա^2} \times ԱԳ \times ԲԳ$. եւ քանզի մարթ է զայն ձեւ օրինակի ցուցանել եւս թէ $\overline{ՆՌ}^2 = \frac{բ^2}{ա^2} \times ԱՌ \times ԲՌ$. ուրեմն $\overline{ՄԳ}^2 : \overline{ՆՌ}^2 = ԱԳ \times ԲԳ : ԱՌ \times ԲՌ$:

Ըստ նմին օրինակի զհետ գայ եւս թէ $\overline{ՄՐ}^2 : \overline{ՆՍ}^2 = ԴՐ \times ԵՐ : ԴՍ \times ԵՍ$: Ապա ուրեմն Յերկայնաձիգ բոլորակի երկրորդ կարողութիւնք կարգածոց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս ուղղանկիւնք յօրինեալք ի հատածոց այնց առանցից, որ յայնմ կարգածոյ ուղղորդս հատանիցի:

Դ. Սրովհետեւ $ա^2 - բ^2 = ե^2$. ուրեմն հարկ է զի այլակերպութիւնն երկոցունց առանցից այնչափ փոքր իցէ, որչափ միանգամ փոքրագոյն իցէ այլակենդրոնութիւնն. արդ եթէ հնոցքն ի միում վայրի գտանիցին ընդ Կ կենդրոնի, յայնժամ $ե = 0$ լինիցի, վասն որոյ եւ $ա = բ$, եւ $ը = \frac{բ^2}{ա} = բ$: Նմին իրի յայս դէպս երկայնաձիգ բոլորակն լինիցի բոլորակ մի, որոյ կէս երկակտուր է $= ա$, եւ հաւասարութիւն ի միասին կարգածոյն է $յ^2 = ա^2 - խ^2$:

Ե. Եթէ ի վերայ մեծագոյն ԱԲ առանցից (Ձեւ 22.) որպէս ի վերայ երկակտրոյ գրոշմիցի բոլորակ ինչ, ՆՊ կարգածն բոլորակի համեմատի ընդ ՄՊ կարգածոյ երկայնաձիգ բոլորակի, (եթէ երկոքեանն եւս նմին ԿՊ յապաւածոյ պատշաճիցին) որպէս միանգամ կէսն մեծագոյն առանցից առ կէս փոքրագոյն առանցիցն կշռիցի: Քանզի $\overline{ՆՊ}^2 = ա^2 - \overline{ԿՊ}^2$, եւ $\overline{ՄՊ}^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(ա^2 - \overline{ԿՊ}^2) = \frac{բ^2}{ա^2} \times \overline{ՆՊ}^2$. զորոյ զհետ գայ $ՄՊ = \frac{բ}{ա} \cdot ՆՊ$, եւ $ՆՊ : ՄՊ = ա : բ$:

Զ. Եթէ ծանուցեալ եւ յայտնի իցեն երկոքին առանցքն, մարթ է զկէտս երկայնաձիգ բոլորակին որչափ եւ կամիցի ոք, որոշել մօտաւոր օրինակաւ: Ի վերայ ԱԲ մեծագոյն առանցից որպէս ի վերայ երկակտրոյ գրոշմեա զբոլորակն ԱԻԲ. ի ԿԻ ուղղորդ գծէ կանգնելոյ ի Կ կենդրոնի հատ մասն մի ԿԴ հաւասար կիսոյ փոքրագոյն առանցից, եւ յետ այնորիկ ձգեա կարգածս բազումս որպէս եւ կամք իցեն ՆՊ, Ն′Պ′, Ն″Պ″, ...: Իւրաքանչիւր ի կարգածոց աստի հատանիցի ըստ ԿԻ : ԿԴ կշռութեան, կէտքն հատանելոյ Մ, Մ′, Մ″ ... կայցեն յերկայնաձիգ բոլորակի անդ: Քանզի ըստ կազմածոյն է $ՆՊ : ՄՊ = Ն'Պ' : Մ'Պ' = Ն''Պ'' : Մ''Պ'' = ԿԻ : ԿԴ = ա : բ$:

Է․ Ընդ կէտսն Ն եւ Մ ձգեա զգիծսն Նբ եւ Մա հաւասար հեռաւորս յԱԲ առանցից, եւ ուղղանկիւնքն ՆՊպբ եւ ՄՊպա ունիցին խարիսխ նոյն, եւ ուղիղ համեմատին ընդ բարձրութիւնս իւրեանց ուստի ՆՊպբ : ՄՊպա = ՆՊ : ՄՊ = ԿԻ : ԿԴ = ա : բ :

Զմտաւ ածցուք, եթէ կարգածքն ՆՊ եւ Նպ անհնարին մերձ առ միմեանս կայցեն, յայտ է եթէ յայնժամ կարի խիստ փոքր լինիցին երեքանկիւնքն Նպբ եւ Մպա, ուստի եւ մարթ է զնոսա ի բաց թողուլ, եւ զուղղանկիւնսն ՆՊպբ եւ ՄՊպա որպէս արդեամբք իսկ կազմիչ մասունս կամ տարերս տարածութեան երեսաց բոլորակի եւ երկայնաձիգ բոլորակի համարել․ որով եւ երկոքին եւս տարածութիւնք երեսաց յանգիման կացուցանին կազմեալ ի բովանդակ այնպիսի երեսաց, եւ իւրաքանչիւր տարր բոլորակի համեմատի ընդ նմին կշռեալ տարերց երկայնաձիգ բոլորակի, որպէս ա : բ․ զորս զհետ գայ, եթէ եւ բովանդակութիւն ամենայն տարերց բոլորակի համեմատի ընդ բովանդակութեան ամենայն տարերց երկայնաձիգ բոլորակի, որպէս ա : բ : Արդ զտարածութիւն երեսաց բոլորակի դիցուք = Բ եւ զտարածութիւն երեսաց երկայնաձիգ բոլորակի = Ե․ եւ լինիցի Բ : Ե = ա : բ, եւ $Ե = \frac{Բ \cdot բ}{ա}$: Իսկ արդ $Բ = ա^2Հ$, ուրեմն եւ $Ե = աբՀ$․ եւ եթէ իցէ զոր օրինակ գ միջին համեմատական գիծ ի մէջ ա եւ բ քանիօնութեանց, ուստի եւ $գ^2 = աբ$, յայնժամ $Ե = գ^2Հ$: Տարածութիւն երեսաց իւիք երկայնաձիգ բոլորակի հաւասար է տարածութեան երեսաց բոլորակի, որոյ կէս երկակտուր է միջին համեմատականն երկուց կէս առանցից այնր երկայնաձիգ բոլորակի :

119․ Բովանդակութիւն հեռաւորութեանց իւիք կիտի, որ կայցէ արտաքոյ երկայնաձիգ բոլորակին, յերկուց հնոցաց անտի, մեծագոյն է քան զմեծագոյն առանցս երկայնաձիգ բոլորակին․ իսկ բովանդակութիւն բացարձակութեանց իւիք կիտի, որ կայցէ ի ներքս՝ յերկոցունց հնոցաց, փոքրագոյն է քան զայն առանցս (Ձեւ 23.)։

Կէտն Ժ կայցէ արտաքոյ երկայնաձիգ բոլորակին։ Իբրեւ կապիցի նա ընդ Հ հնոցին ՀԺ ուղիղ գծիւ, յայտ է թէ հատանիցէ նա զբոլորակն երկայնաձիգ ի վայրի ուրեք, որպիսի ինչ յԸ. ձգիցի եւ բառնալի ճառագայթն ՉԸ։ Արդ ի ՉԸԺ եռանկեան է ՉԺ + ԺԸ > ՉԸ, նմին իրի եւս ՉԺ + ՀԺ > ՉԸ + ՀԸ. իսկ արդ ՉԸ + ՀԸ = ԱԲ. ուրեմն եւ ՉԺ + ՀԺ > ԱԲ։

Սոյնգունակ եւ երկրորդ մասն։ Դնիցուք եթէ Ժ՛ կէտն կայցէ ի ներքս յերկայնաձիգ բոլորակին, ի սոյն դէպս յորժամ երկայնիցի գիծն Ժ՛Հ հատանէ զերկայնաձիգ բոլորակն ի կէտ ինչ Ը. ձգիցի եւ բառնալի ճառագայթն ՉԸ։ Արդ ի ՉԸԺ՛ եռանկեան կողմն ՉԺ՛ < ՉԸ + ԸԺ՛, վասն որոյ եւ ՉԺ՛ + ՀԺ՛ < ՉԸ + ՀԸ. իսկ արդ ՉԸ + ՀԸ = ԱԲ, ուրեմն եւ ՉԺ՛ + ՀԺ՛ < ԱԲ։

120. Խնդիր։ Ձգել գիծ ինչ, որ շօշափիցէ զերկայնաձիգ բոլորակն յայս ինչ որոշեալ կէտի. (Ձեւ 24.)։

Լուծումն։ Ի կէտն Մ ձգեա զբառնալի ճառագայթսն ՀՄ եւ ՉՄ եւ երկայնեա զՉՄ մինչեւ յԸ, որպէս զի լինել ՄԸ = ՀՄ։ Ապա յետ այնորիկ ձգեա զուղիղ գիծն ՀԸ, հատարակեա զայն ի Ժ, եւ ուղիղ գիծն ԺՄ ձգեալ ի Ժ կէտէ ըստ Մ կոյս է խնդրեալ շօշափողն։

Ցուցումն։ Ի գիծն ԺՄ բաց ի Մ կէտէ առցուք որ զինչեւիցէ կէտ մի ֆ, եւ ձգեսցուք զուղիղ գիծսն Հֆ, Չֆ, եւ Ըֆ։ Որովհետեւ ԸՄ = ՀՄ, յայտ է եթէ հաւասարասրուն է եռանկիւնն ՀԸՄ, եւ ուղիղ գիծն ձգեալ ի Մ գագաթանէ ի վերայ միջավայրի խարսխին է ուղղորդ ի վերայ ՀԸ խարսխի։ Արդ քանզի կողմն ՀԺ = ԸԺ, կողմն Ժֆ = Ժֆ, եւ անկիւնն ՀԺֆ = ԸԺֆ = Ո, ուրեմն ΔՀԺֆ ≅ ΔԸԺֆ, եւ կողմըն Հֆ = Ըֆ։ Իբրեւ յերկոսին կողմանս յաւելցի Զֆ, ծագէ Հֆ + Զֆ = Ըֆ + Զֆ. իսկ արդ Ըֆ + Զֆ > ԶԸ, եւ քանզի ԶԸ = ԶՄ + ՀՄ = ԱԲ, վասն այսորիկ իցէ Ըֆ + Զֆ > ԱԲ, ուստի եւ Հֆ + Զֆ > ԱԲ, եւ կէտն ֆ կայցէ արտաքոյ երկայնաձիգ բոլորակի (Հ. 119.)։ Նու. քանզի այսպիսի ցուցումն կարէ լինել եւ վասն ամենայն կիտի, որ այլակերպ իցէ ի Մ կիտէ, նմին իրի այս գիծ շօշափէ զերկայնաձիգ բոլորակն ի կէտն Մ։

Ա. Ուղիղ գիծն ՄԺ, որ ի հաւասարասրուն ՀՄԸ երեքանկեան ի գագաթանէ անտի ի վերայ միջավայրի խարսխին ձգիցի, հատանէ զանկիւնն գագաթան. ապա ուրեմն անկիւնն ՀՄԺ = ԸՄԺ. իսկ արդ ԸՄԺ = ԶՄֆ, ուրեմն եւ անկ. ՀՄԺ = ԶՄֆ։ Ապա ուրեմն ամենայն շօշափող երկայնաձիգ բոլորակին ի կէտն շօշափելոյ յօրինեալ կազմէ հաւասար անկիւնս ընդ երկուց բառնալի ճառագայթից այնր կիտի։

Բ. Եթէ ի Ր կիտէ խնդրէ (Զեւ 24.) առաջի կայցէ ձգել շօշափող ինչ առ երկայնաձիգ բոլորակն, զառաջինն յայնմ Ր կիտէ ձգեա առ մօտագոյն Զ հնոցն զգիծն ՐԶ, եւ ապա ի Ր կենդրոնէ ՐԶ կէս երկակլորով ձգեա բոլորակ մի, որ զբոլորակն ի Հ կենդրոնէ ԱԲ կէս երկակորով ձգեալ, ի Ք եւ ի Փ հատանիցէ։ Արդ ձգեա զգիծսն ՐՔ եւ ՐՓ, եւ հատորակեա զանկիւնսն ԶՐՔ եւ ԶՐՓ ուղիղ գծիւքս ՐՍ, ՐՏ. սոքա շօշափիցեն եւ զբոլորակն երկայնաձիգ։

Ցուցումն։ Ձգեա զՀՓ, որ զուղիղ գիծն ՐՍ ի Ս հատանիցէ, եւ ձգեա զԶՍ։ Որովհետեւ ԶՐ = ՐՓ, ՐՍ = ՐՍ, եւ անկիւնն ԶՐՍ = ՓՐՍ, ուրեմն ΔԶՍՐ ≅ ΔՍՐՓ, եւ կողմն ԶՍ = ՍՓ։ Իբրեւ յերկոսին կողմանսն եւս յաւելուցու ՀՍ, ծագէ ՀՍ + ԶՍ = ՀՍ + ՍՓ = ՀՓ = ԱԲ, եւ Ս կէտն կայ յերկայնաձիգ բոլորակին։ Իսկ արդ որովհետեւ եւ անկիւնն ԶՍՐ = ՐՍՓ, յայտ է եթէ ուղիղ գիծն ՐՍ շօշափէ զերկայնաձիգ բոլորակն ի Ս (Հ. 120. Ա.)։ Նովին պատճառաւ ցուցանի եւս, եթէ ուղիղ գիծն ՐՏ շօշափէ զերկայնաձիգ բոլորակն ի Տ։

Գ. Զդեա զուղիղ գիծն ԿՃ: Որովհետեւ ի ՀՁԸ երեքանկեան կողմանքն ՀՁ եւ ՀԸ հատարաւ կեալ են ի կէտսն Կ եւ Ճ, վասն այնորիկ գիծն ԿՃ հաւասար հեռաւոր է ի ՁԸ կողմանէ. եւ ԿՃ : ՁԸ = ԿՀ : ՀՁ = 1 : 2. զորոյ զհետ գայ $\text{ԿՃ} = \frac{1}{2}\text{ՁԸ} = \frac{1}{2}\text{ԱԲ}$ = ԱԿ: Արդ իբրեւ ընդ կէտն Կ ձգիցի ԿՌ հաւասար հեռաւոր ի ՇՄ շօշափողէ, յայտ է թէ ԿՃՄՌ իցէ հաւասար հեռաւոր ձեւ, եւ ՄՌ = ԿՃ = ԱԿ = ա: Իսկ արդ բանալի ճառագայթն $\text{ՁՄ} = \text{ա} + \frac{\text{եք}}{\text{ա}}$ (Հ. 117.) նմին իրի

$$\text{ՁՌ} = \text{ՁՄ} - \text{ՄՌ} = \frac{\text{եք}}{\text{ա}}:$$

Այս հաւասարութիւն $\text{ՁՌ} = \frac{\text{եք}}{\text{ա}}$, տայ ՁՌ : ե = ք : ա, կամ ՁՌ : ԿՁ = ԿՊ : ԱԿ: Իսկ արդ ի նման երեքանկիւնս ԿՁՌ եւ ԿՃՇ է ՁՌ : ԿՁ = ԿՃ : ԿՇ, զայսր զհետ գայ եւս ԿՊ : ԱԿ = ԿՃ : ԿՇ, կամ ք : ա = ա : ԿՇ, (վասն զի ԿՃ = ԱԿ = ա) վասն այսորիկ եւ $\text{ԿՇ} = \frac{\text{ա}^2}{\text{ք}}$. եւ շօշափօղն ի ներքոյ

$$\text{ՊՇ} = \frac{\text{ա}^2}{\text{ք}} - \text{ք} = \frac{\text{ա}^2 - \text{ք}^2}{\text{ք}}:$$

Իցէ ՄՆ ուղղորդն Մ կիտի, յայտ է եթէ ի ՄՆՇ ուղղանկիւն երեքանկեան ՄՊ ուղղորդ գիծն է միջին համեմատական ի մէջ ՊՇ եւ ՆՊ գծից, եւ $\text{ՆՊ} = \frac{\overline{\text{ՄՊ}}^2}{\text{ՊՇ}} = \frac{\text{յ}^2}{\text{ՊՇ}}$: Իսկ արդ

$$\text{յ}^2 = \frac{\text{բ}^2}{\text{ա}^2}(\text{ա}^2 - \text{ք}^2), \text{ եւ } \text{ՊՇ} = \frac{\text{ա}^2 - \text{ք}^2}{\text{ք}}, \text{ ուստի}$$

$$\text{ՆՊ} = \frac{\text{բ}^2\text{ք}}{\text{ա}^2} = \frac{\text{պք}}{\text{ա}}, \text{ քանզի } \text{պ} = \frac{\text{բ}^2}{\text{ա}} \text{ (Հ. 116.)}:$$

Դ. Ի ԿՄՊ ուղղանկիւն երեքանկեանէ մարթի գտանել եւ զԿՄ ուղիղ գիծն ձգեալ ի Կ կենդրոնէ առ Մ կէտ մի երկայնաձիգ բոլորակին. քանզի $\overline{\text{ԿՄ}}^2 = \overline{\text{ԿՊ}}^2 + \overline{\text{ՄՊ}}^2 = \text{ք}^2 + \text{յ}^2$, կամ որովհետեւ $\text{յ}^2 = \frac{\text{բ}^2}{\text{ա}^2} \times$

$(ա^2 - փ^2)$, եւս $\overline{ԿՄ}^2 = փ^2 + \frac{բ^2}{ա^2}(ա^2 - փ^2) =$

$\frac{ա^2 բ^2 + (ա^2 - բ^2) փ^2}{ա^2} = \frac{ա^2 բ^2 + ե^2 փ^2}{ա^2}$, եւ $ԿՄ =$

$\frac{\sqrt{(ա^2 բ^2 + ե^2 փ^2)}}{ա}$:

Ե. Երկպատիկ երկրորդ կարողութիւն իրիք գծի, որ ի կենդրոնէ երկայնաձիգ բոլորակի առ կէտ մի շրջապատին ձգիցի, հաւասար է բովանդակութեան երկրորդ կարողութեանց բառնալի ճառագայթից այնր կիտի, նուազ երկպատիկ երկրորդ կարողութեամբ չափ այլակենդրոնութեանն: Այս ինքն (Ձեւ. 24.) $2\overline{ԿՄ}^2 = \overline{ՀՄ}^2 + \overline{ՁՄ}^2 - 2\overline{ԿՁ}^2$, կամ $2Ո^2 = ճ^2 + ճ'^2 - 2ե^2$, եթէ $ԿՄ = Ո$:

Ըստ Հ. 120. Դ, է $Ո^2 = \frac{ա^2 բ^2 + ե^2 փ^2}{ա^2}$.

եւ (Հ. 116.) $ՀՄ = ճ = ա - \frac{եփ}{ա}$ իսկ $ՁՄ = ճ' = ա + \frac{եփ}{ա}$. յորոց եւս $ճ^2 = ա^2 - 2եփ + \frac{ե^2 փ^2}{ա^2}$ եւ $ճ'^2 = ա^2 + 2եփ + \frac{ե^2 փ^2}{ա^2}$: Իբրեւ յաւելուցուն ի միմեանս երկու յետին հաւասարութիւնքս, ծագէ $ճ^2 + ճ'^2 = 2ա^2 + \frac{2ե^2 փ^2}{ա^2}$, ուստի $ճ^2 + ճ'^2 - 2ե^2 = 2ա^2 + \frac{2ե^2 փ^2}{ա^2} - 2ե^2 =$

$\frac{2ա^4 + 2ե^2 փ^2 - 2ե^2 ա^2}{ա^2} = \frac{2[ա^2(ա^2 - ե^2) + ե^2 փ^2]}{ա^2}$:

Իսկ արդ $ա^2 - ե^2 = բ^2$ (Հ. 114. Ա.) ուրեմն $ճ^2 + ճ'^2 - 2ե^2 = \frac{2(ա^2 բ^2 + ե^2 փ^2)}{ա^2}$, յորմէ $\frac{1}{2}(ճ^2 + ճ'^2 - 2ե^2 = \frac{ա^2 բ^2 + ե^2 փ^2}{ա^2} = Ո^2$. զորոյ զհետ գայ

$$2Ո^2 = ճ^2 + ճ'^2 - 2ե^2:$$

ԳԼՈՒԽ Գ.

ԱՒԵԼԻ

121. ԱՒԵԼԻՆ է կոր ինչ գիծ, յորում այլակերպութիւն բացարձակութեանց իւրաքանչիւր Մ կիտի (Ձեւ 25.) յերկուց որոշեալ Հ եւ Զ կիտից, հաւասար է իրիք ԹԻ գծի ծանուցելոյ: Այս ինքն եթէ ԶՄ — ՀՄ = ԹԻ իցէ, յայնժամ կէտն Մ կայ յաւելին: Կէտքն Հ եւ Զ են Հնոցք նորին, եւ գիծն Ք՛Ք որ ձգիցի ընդ նոսին առանց եզերաց, առի Առանցք աւելոյն. իսկ ուղիղ գիծքն ՀՄ եւ ԶՄ են Բառնալի ճառագայթք Մ կիտի:

Յասացելոյս զհետ գայ, եթէ հարկ է զի բացարձակութիւն հնոցացն ի միմեանց, կամ թէ ուղիղ գիծն ՀԶ մեծագոյն իցէ քան զուղիղ գիծն ԹԻ. քանզի յ△ՀԶՄ է ՀԶ > ԶՄ — ՀՄ. իսկ արդ ԶՄ — ՀՄ = ԹԻ, ուրեմն ՀԶ եւս > ԹԻ:

122. Կէտն Կ, որ հաւասար հեռի գտանիցի ի Հ եւ ի Զ հնոցաց, անուանի Կենդրոն կամ Միջավայր աւելոյն, իսկ բացարձակութիւնն այն ի գըլխովին ԿՀ = ԿԶ առի Այլակենդրոնութիւն աւելոյն: Եթէ ի վերայ Ք՛Ք առանցից յերկոսին կողմանս Կ միջավայրին հատանիցին ԱԿ = ԲԿ = ½ ԻԹ, յայնժամ կէտքն Ա եւ Բ կան յաւելւոջ, եւ են գագաթունք նորին, քանզի ԿՀ — ԱԿ = ԿԶ — ԲԿ. այս ինքն ԱՀ = ԲԶ, եւ ԱԶ — ԱՀ = ԱԶ — ԲԶ = ԱԲ. իսկ արդ ԱԲ = ԻԹ, ուրեմն եւ ԱԶ — ԱՀ = ԻԹ: Նոյնն օրինակաւ մարթ է ցուցանել եթէ ԲՀ — ԲԶ = ԹԻ. զորոյ զհետ գայ եթէ Ա եւ Բ կան յաւելւոջ: Ուղիղ գիծն ԱԲ առի Խոտորնակ առանցք աւելոյն:

Ա. Ապա ուրեմն յաւելին այլակերպութիւն բառնալի ճառագայթից նորին կիտի, հաւասար է խոտորնակ առանցից այս ինքն ՀՄ — ԶՄ = ԱԲ:

Բ. Յամենայն բառնալի ճառագայթս, որք ի նմին հնոցէ առ աւելին ձգել կարիցեն, կարճագոյն այն է, որ ի գագաթն ձգեալ իցէ։ Ցուցումն։ Ի ՀՁՄ երեքանկեան է ՁՄ + ՀՄ > ՀՁ։ Իսկ արդ ՁՄ — ՀՄ = ԱԲ. արդ իբրեւ ի միմեանս յաւելցին բովանդակութիւն եւ այլակերպութիւն բառնալի ճառագայթից Մ կիտի, գտանի ՁՄ > ½ՀՁ + ½ԱԲ, կամ ՁՄ > ԿՁ + ԱԿ, եւ ՁՄ > ԱՁ։ Այլ իբրեւ այլակերպութիւնն այն բառնալի ճառագայթիցն հանցի ի նոցին բովանդակութենէ, ելանէ ՀՄ > ½ՀՁ — ½ԱԲ, կամ ՀՄ > ԿՀ — ԱԿ. զորս զհետ գայ ՀՄ > ԱՀ։

123. Խնդիր։ Տուեալ զխոտորնակ առանցս եւ զհնոցան զերկոսին, գտանել կէտս շրջագծի աւելւոյն, որչափ եւ կամք իցեն։

Լուծումն։ Իցեն Հ եւ Ձ հնոցքն, Կ միջավայրն եւ ԱԲ խոտորնակ առանցքն, ուստի եւ Ա եւ Բ գագաթունք աւելւոյն։ Արդ ի վերայ Ք′Ք առանցից առ ջիր կէտ մի Ը ըստ հաճոյս, որ առաւել հեռի իցէ ի գագաթանէ քան եթէ ի հնոցէ. ապա յետ այնորիկ ձգեա երկուս բոլորակս, զմին ԲԸ կէս երկակորով ի Ձ կենդրոնէ, իսկ զմեւս բոլորակն ԱԸ կէս երկակորով ի Հ կենդրոնէ, կէտքն հատանելոյ շրջագատաց նոցին զմիմեանս, այս ինքն Մ եւ ′ կան յաւելւոջ։ Ցուցումն։ Է ՁՄ = ԲԸ, եւ ՀՄ = ԱԸ. ուրեմն ՁՄ — ՀՄ = ԲԸ — ԱԸ = ԱԲ. եւ վասն սորին պատճառի եւս Ձ′ — Հ′ = ԱԲ. ապա ուրեմն երկոքին կէտքն Մ եւ ′ կան յաւելւոջ (Հ. 121.)։ Զայս մարթ է եւ զայլոց կիտից, ամէն օրինակաւ ցուցանել։

Ա. Լարն Մ′, որ հասարակ է երկոցունց բոլորակաց, որ ի Մ, ′ հատանեն զմիմեանս, հասարակի ի Ք′Ք առանցից, եւ կայ ուղղորդ ի վերայ նորին։ Արդ իբրեւ ի Ձ կենդրոնէ ՁՆ = ՀՄ կէս երկակորով, եւ դարձեալ ի Հ կենդրոնէ ՀՆ = ՁՄ կէս երկակորով դրոշմեսցին երկու բոլորակք, եւս Ն եւ Ն′ կէտքն հատանելոյ նոցա զմիմեանս, կան յաւելլին, քանզի է

Հն — Չն = ՉՄ — ՀՄ = ԱԲ. զայսորիկ զհետ գայ եւս եթէ եւ լարն ՆՂ հատանի ի Ք՛Ք առանցից, եւ թէ է ուղղորդ ի վերայ սորա: Արդ որովհետեւ ՄՊ = ՃՊ, եւ անկիւնն ԱՊՄ = ԱՊՃ. նոյնպէս եւ ՆՌ = ՂՌ, եւ անկ. ԲՌՆ = անկ. ԲՌՂ, եւ քանզի մարթ է զայս ասելն օրինակաւ եւ զամենայն կիտից ցուցանել հաստատութեամբ, ուրեմն Ք՛Ք առանցքն բաժանէ զաւելլն յերկուս հաւասար եւ պատշաճական մասունս:

Զ պատշաճականութեան ՀՉՄ եւ ՀՉՆ երեքանկեանց զհետ գայ, եթէ ՄՊ = ՆՌ, ԿՊ = ԿՌ, ուրեմն եւ ՄՃ = ՆՂ. յորմէ մարթ է ի մտաց իմանալ եթէ յերկուսին կողմանս Կ միջավայրին կան երկու ամենեւին պատշաճական աւելք, այս է ՄԱՃ եւ ՆԲՂ:

Բ. Եւ ոչ ի միոյ կիտէ աւելոյն մարթ է ի վերայ ԱԲ առանցից ուղղորդ գիծ ձգել, որ կայցէ ի մէջ Ա եւ Բ կիտից: Ցուցումն: Դիցուք դրեսցուք, եթէ իցէ կէտ մի ի կիտից աւելոյն Ր, յորմէ ձգիցի ուղղորդ գիծն ՐՍ, եւ անկանիցի ի մէջ Ա եւ Բ կիտից: Արդ ի ՉՐՍ եւ ՀՐՍ ուղղանկիւն երեքանկիւնս է $\overline{\text{ՉՐ}}^2 = \overline{\text{ՉՍ}}^2 + \overline{\text{ՐՍ}}^2$ եւ $\overline{\text{ՀՐ}}^2 = \overline{\text{ՀՍ}}^2 + \overline{\text{ՐՍ}}^2$. որոց զհետ գայ $\overline{\text{ՉՐ}}^2 - \overline{\text{ՀՐ}}^2 = \overline{\text{ՉՍ}}^2 - \overline{\text{ՀՍ}}^2$, կամ $(\text{ՉՐ} + \text{ՀՐ})(\text{ՉՐ} - \text{ՀՐ}) = (\text{ՉՍ} + \text{ՀՍ})(\text{ՉՍ} - \text{ՀՍ}) = \text{ՀՉ}\,(\text{ԲՍ} - \text{ԱՍ})$, որովհետեւ $\text{ՉՍ} - \text{ՀՍ} = \text{ԲՍ} + \text{ԲՉ} - \text{ԱՍ} - \text{ԱՀ}$, $\text{ԲՉ} - \text{ԱՀ} = 0$: Իսկ արդ եթէ Ր կայցէ յաւելլն, է $\text{ՉՐ} - \text{ՀՐ} = \text{ԱԲ}$, ուստի եւս եւ $\text{ԱԲ}\,(\text{ՉՐ} + \text{ՀՐ}) = \text{ՀՉ}\,(\text{ԲՍ} - \text{ԱՍ})$, եւ $\text{ԱԲ} : \text{ԲՍ} - \text{ԱՍ} = \text{ՀՉ} : \text{ՉՐ} + \text{ՀՐ}$. եւ քանզի յայտ համեմատութեան $\text{ԱԲ} > \text{ԲՍ} - \text{ԱՍ}$, հարկ է եւս զի $\text{ՀՉ} > \text{ՉՐ} + \text{ՀՐ}$ իցէ, որ է անհնարին:

124. Իբրեւ ի վերայ ԱԲ գծի ի միջավայրն Կ, ձգիցի ուղղորդ գիծն ԴԵ, եւ յԱ գագաթանէ ԱԴ կէս երկակտրով որ հաւասար է ԿՀ պլակենդրոնութեան, գրոշմիցի բոլորակ ինչ, որ զուղղորդ գիծն

զայն հատանէ ի Դ եւ Ե կէտս, ուղիղ գիծն ԴԵ առի Զուգեալ առանցք աւելոյն :

Ա. Որովհետեւ ԱԿ ուղղորդ կայ ի ԴԵ, ուրեմն $ԿԴ = ԿԵ$, եւ $\overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԱԿ}^2 + \overline{ԿԴ}^2$, կամ $\overline{ԿՀ}^2 = \overline{ԱԿ}^2 + \overline{ԿԴ}^2$: Արդ իբրեւ զայլակենդրոնութիւնն $ԿՀ = ե$, զկէս խոտորնակ առանցից $ԱԿ = ա$, զուգեալ առանցից $ԿԴ = բ$ դնիցեմք, լինիցի $ե^2 = ա^2 + բ^2$, $ա^2 = ե^2 - բ^2$, եւ $բ^2 = ե^2 - ա^2$:

Բ. Ապա ուրեմն է $\overline{ԿԴ}^2 = \overline{ԿՀ}^2 - \overline{ԱԿ}^2 = (ԿՀ + ԱԿ)(ԿՀ - ԱԿ) = ԱՁ \times ԱՀ$. զորոյ զհետ գայ $ԱԿ : ԿԴ = ԿԴ : ԱՁ$: Այս ինքն կէսն խոտորնակ առանցից է միջին համեմատական հեռաւորութեանց միոյ գագաթան յերկուցունց հնոցաց :

125. Լարն ԺՈ կամ Ժ՛Ո՛, որ ընդ հնոցն ձգեալ է ուղղորդ ի վերայ Բ՛Բ առանցից, անուանեալ կոչի Առընթերաչափ աւելոյն: Կէս առընթերաչափին ՀԺ նշանակեսցի ը նշանագրաւ :

126. Կէս առընթերաչափն է երրորդ անքակ համեմատական առ կէսն խոտորնակ եւ առ կէսն զուգեալ առանցից :

Որովհետեւ $ՁԺ - ՀԺ = ԱԲ$, յորմէ $ՁԺ = ԱԲ + ՀԺ = 2ա + ը$. իսկ արդ $\overline{ՁԺ}^2 = \overline{ՁՀ}^2 + \overline{ՀԺ}^2 = 4ե^2 + ը^2$, ուրեմն եւս $(2ա + ը)^2 = 4ա^2 + 4աը + ը^2 = 4ե^2 + ը^2$, կամ $աը = ե^2 - ա^2 = բ^2$, յորմէ $ա : բ = բ : ը$:

127. Խնդիր: Գտանել զհաւասարութիւն վասն բառնալի ճառագայթից աւելոյն :

Լուծումն: Իբրեւ ի Մ կէտէ ձգիցի ՄՊ ուղղորդ ի վերայ Բ՛Բ առանցից, յայտ իմն է եթէ ի ՁՄՊ եւ ՀՄՊ ուղղանկիւն երեքանկիւնս իցէ $\overline{ՁՄ}^2 = \overline{ՄՊ}^2 + \overline{ՁՊ}^2$, եւ $\overline{ՀՄ}^2 = \overline{ՄՊ}^2 + \overline{ՀՊ}^2$. ուրեմն $\overline{ՁՄ}^2 - \overline{ՀՄ}^2 = \overline{ՁՊ}^2 - \overline{ՀՊ}^2$, կամ $(ՁՄ + ՀՄ)(ՁՄ - ՀՄ) = (ՁՊ + ՀՊ)(ՁՊ - ՀՊ)$: Իսկ արդ $ՁՄ - ՀՄ = ԱԲ = 2ա$, եւ յապաւածն $ԿՊ = +$, ուստի $ՁՊ = + + ե$, եւ $ՀԳ = բ - ե$, զորս զհետ դայ $ՉԳ + ՀԳ = 2բ$, եւ $ՉԳ - ՀԳ = 2ե$: Արդ ուրեմն փոխանակելով այսոցիկ զօրութեանց, ելանէ $2ա(ՉՄ + ՀՄ) = 4եբ$, եւ $\frac{ՉՄ + ՀՄ}{2} = \frac{եբ}{ա}$. եւ որովհետեւ $\frac{ՉՄ - ՀՄ}{2} = ա$,

$$\text{ուրեմն } ՉՄ = \frac{եբ}{ա} + ա, \text{ եւ } ՀՄ = \frac{եբ}{ա} - ա:$$

128. Խնդիր: Գտանել զհաւասարութիւն վասն ի միասին կարգածոց միոյ միոյ ի կիտից աւելւոյն:

Լուծումն: Դիցուք եթէ իցէ $ՄԳ = ժ$, $ԿԳ = բ$, $ԱԿ = ԲԿ = ա$, $ԿԴ = ք$, եւ $ԿՀ = ե = \sqrt{(ա^2 + ք^2)}$: Ի ՀՄԳ ուղղանկիւն երեքանկեան է $\overline{ՄԳ}^2 = \overline{ՄՀ}^2 - \overline{ՀԳ}^2 = (ՀՄ + ՀԳ)(ՀՄ - ՀԳ)$: Իսկ արդ $ՀՄ = \frac{եբ}{ա} - ա$, եւ $ՀԳ = բ - ե$, ուրեմն $ՀՄ + ՀԳ = \frac{(ե + ա)բ - (ե + ա)ա}{ա} = \frac{(ե + ա)(բ - ա)}{ա}$, եւ $ՀՄ - ՀԳ = \frac{(ե - ա)բ + (ե - ա)ա}{ա} = \frac{(ե - ա)(բ + ա)}{ա}$. զորոյ զհետ դայ $\overline{ՄԳ}^2 = \frac{(ե^2 - ա^2)(բ^2 - ա^2)}{ա^2}$ կամ $ժ^2 = \frac{ք^2}{ա^2}(բ^2 - ա^2)$:

Ա. Արդ ուրեմն $ժ = \pm \frac{ք}{ա} \sqrt{(բ^2 - ա^2)}$: Արդ եթէ $բ < ա$ լինիցի, յայնժամ $բ^2 - ա^2$ դայցէ ուրացական, եւ $\sqrt{(բ^2 - ա^2)}$ իցէ քանիօնութիւն ինչ ցնորական: Արդ ուրեմն յայս դէպս $ժ$ ունիցի նշանակութիւն ինչ մտացածին. ուստի եւ եւ ոչ մի կէտ աւելւոյն ի մէջ Ա եւ Բ կիտից կալ կարէ: Եդեալ $բ = \pm ա$, լինի $ժ = 0$, այս ինքն Ք՛Ք առանցքն հատանի յաւելւոյն ի կէտս Ա եւ Բ: Իսկ որչափ միանգամ յապաւածն $+ > ա$ իցէ, եւ նմին պատշաճեալ կարգածն ունիցի ճշմարիտ ինչ նշանակութիւն, որ այնչափ մեծագոյն լինիցի, որչափ միանգամ մեծագոյն $+$ յապաւածն իցէ: Ապա ուրեմն աւելին՝ կոր ինչ գիծ է որ յերկոսին կողմանս առանցից անկատարած հեռացեալ գնայ: Ամենայն յապաւածոյ, թէպէտ $\text{ԿԳ} = + $ իցէ, թէպէտ $\text{ԿՌ} = -+$, կշռին հաւասար նշանակութիւնք կարգածոց, վասն որոյ $\text{ՄԳ} = \text{ՐԳ}$, եւ $\text{ՆՌ} = \text{ՆՌ}$. ուստի յայտ է թէ աւելին հաւասարակի յառանցից յապաւածոց (Հ. 123. Ա.):

Բ. Որովհետեւ $\overline{\text{ՄԳ}}^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(\overline{\text{ԿԳ}}^2 - ա^2) = \frac{բ^2}{ա^2}\cdot$ $(\text{ԿԳ} - ա)(\text{ԿԳ} + ա) = \frac{բ^2}{ա}\cdot \text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԳ}$. եւ դարձեալ վասն նոյն պատճառի եւս $\overline{\text{Մ}'\text{Գ}'}^2 = \frac{բ^2}{ա^2}\cdot\text{ԱԳ}'\cdot\text{ԲԳ}'$. զորոց զհետ գայ համեմատութիւնս

$$\overline{\text{ՄԳ}}^2 : \overline{\text{Մ}'\text{Գ}'}^2 = \text{ԱԳ}\times\text{ԲԳ} : \text{ԱԳ}'\times\text{ԲԳ}':$$

Ուրեմն յաւելին երկրորդ կարողութիւնք կարգածոյն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս միանգամ ուղղանկիւնք յօրինեալք ի հատածոց առանցից, որ կայցեն ի մէջ կարգածոյն եւ երկոցունց գագաթանց:

129. Աւելին, յորում խոտորնակ եւ զուգեալ առանցքն հաւասար իցեն միմեանց, ասի Հաւասարակող. ուրեմն $ա = բ$, եւ $է = \sqrt{2ա^2} = ա\sqrt{2}$: Յայսմ աւելւոջ կէս առընթերաչափն է $= \frac{բ^2}{ա} = ա$, եւ հաւասարութիւն ի միասին կարգածոց $ֆ^2 = +^2 - ա^2$:

130. Այլակերպութիւն բացարձակութեանց իւրաքանչիւր Ն կիտի, որ կայցէ արտաքոյ աւելւոյն, յերկոցունց հնոցաց (2եւ 26.) փոքրագոյն է քան զխոտորնակ առանցս. իսկ եթէ կէտ ինչ Ն կայցէ ի ներքս յաւելւոջ, յայնժամ այլակերպութիւն բացար-

ձակուլթեանցն ի հնոցաց, մեծագոյն է քան զխոտոր-նակ առանցս ։

Որովհետեւ Ն կայ արտաքոյ աւելուածն, նմին իրի ուղիղ գիծն ՀՆ հատանէ զաւելին ի Մ․ ձգիցին եւս ուղիղ գիծքն ՉՆ եւ ՉՄ ։ Ի ՉՆՄ եռեքանկեան ՉՆ — ՆՄ < ՉՄ է, ուստի եւս ՉՆ — ՀՆ < ՉՄ — ՀՄ, կամ ՉՆ — ՀՆ < ԱԲ․ քանզի ՉՄ — ՀՄ = ԱԲ ։

Սոյնպէս եւ երկրորդ մասնն ։ Եթէ Ն՛ կէտն կայցէ ի ներքս յաւելուածն, ուղիղ գիծն ՉՆ՛ հարկ է զի հատանիցէ զաւելին ի վայրի ուրեք Ս․ եւ ի ՀՍՆ՛ եռեքանկեան է ՀՍ + ՍՆ՛ > ՀՆ՛․ զորոյ զհետ գայ ՉՆ՛ — ՀՍ — ՍՆ՛ < ՉՆ՛ — ՀՆ՛, կամ ՉՍ — ՀՍ < ՉՆ՛ — ՀՆ՛, եւ ՉՆ՛ — ՀՆ՛ > ԱԲ, քանզի ՉՍ — ՀՍ = ԱԲ ։

131․ Խնդիր ։ Ձգել գիծ ինչ ուղիղ, որ զաւելին շօշափիցէ յայս ինչ Մ կէտի ։

Լուծումն ։ Ձգեա (Ձեւ 27.) զբառնալի ճառագայթսն ՀՄ եւ ՉՄ․ եւ ի մեծագունէ անտի, որ է ՉՄ, հատ մասն մի որ հաւասար իցէ փոքրագունին, այս ինքն է ՄԸ = ՀՄ ։ Արդ հատարակեա զուղիղ գիծն ՀԸ, եւ ի Թ միջավայրէ նորին ի Մ կոյս ձգեա զուղիղ գիծն ԹՄ, որ եւ իցէ խնդրեալ շօշափողն ։

Ցուցումն ։ Յուղիղ գիծն ԹՄ առնիր կէտ մի Ն ըստ հաճոյս, յեա այնորիկ զՀՆ, ՉՆ եւ ԸՆ, եւ իցէ ՀՆ = ԸՆ․ քանզի ի ՀՄԸ հաւասարասրուն եռեքանկեան ուղիղ գիծն ԹՄ կայ ուղղորդ ի վերայ ՀԸ խարըսխին․ եւ անկիւնն ՀԹՆ = ԸԹՆ = Ո, կողմն ՀԹ = ԸԹ, կողմն ԹՆ = ԹՆ, ուրեմն ΔՀԹՆ ≅ ΔԸԹՆ, ուստի եւ ՀՆ = ԸՆ․ յորմէ եւ ՉՆ — ԸՆ = ՉՆ — ՀՆ ։ Իսկ արդ ի ՉԸՆ եռեքանկեան ՉՆ — ԸՆ < ՉԸ, որով եւ ՉՆ — ՀՆ < ՉԸ, եւ քանզի ՉԸ = ՉՄ — ՀՄ = ԱԲ, ուրեմն եւ ՉՆ — ՀՆ < ԱԲ, եւ կէտն Ն կայ արտաքոյ աւելուածն (Հ. 130.) ։ Զայս մարթ է ցուցանել եւ զայլոց ամենայն կիտից բաց ի Մ կիտէ ԹՄ ուղիղ գծին, ուրեմն այս ուղիղ գիծ շօշափէ զաւելին ի կէտն Մ ։

Ա. ՅԸՄՀ երեքանկեան հաւասարակեալ է անկիւնն որ ի գագաթան, եւ անկիւն ՀՄԹ $=$ ԸՄԹ $=$ ԺՄԽ: Ուրեմն յաւելլով շօշափողն ընդ երկոսին բաւանալի ճառագայթս կիտի շօշափման գործէ անկիւնս հաւասարս:

Բ. Չգեա զԿԹ, եւ լինիցի հաւասար հեռաւոր ի ՁԸ կողմանէ ՀՁԸ երեքանկեան. քանզի ԿՀ $=$ ԿՁ է, եւ ԹՀ $=$ ԹԸ. եւ որովհետեւ ՁԸ $=$ ԱԲ $= 2$ա, ուրեմն վասն ԿԹ : ՁԸ $=$ ԿՀ : ՀՁ $= 1 : 2$ լինելոյ, եւս ԿԹ $= \frac{1}{2}$ՁԸ $=$ ա: Արդ ձգեա զԿՌ հաւասար հեռաւոր ի ՇՄ շօշափողէ, եւ ԿԹՄՌ իցէ հաւասար հեռաւոր ինչ ձեւ, եւ ՄՌ $=$ ԿԹ $=$ ա, եւ ՁՌ $= \frac{\text{եր}}{\text{ա}}$,

որովհետեւ ՁՄ $= \frac{\text{եր}}{\text{ա}} +$ ա: Ապա ուրեմն է

$$\text{ՁՌ} : \text{ե} = \text{ր} : \text{ա},\ \text{կամ}\ \text{ՁՌ} : \text{ԿՁ} = \text{ԿՊ} : \text{ԱԿ}:$$

Իսկ արդ ի ՁՌԿ եւ ԿԹՇ նման երեքանկիւնս ՁՌ : ԿՁ $=$ ԿԹ : ԿՇ, ուրեմն եւ ԿՊ : ԱԿ $=$ ԿԹ : ԿՇ, կամ ր : ա $=$ ա : ԿՇ, եւ ԿՇ $= \frac{\text{ա}^2}{\text{ր}}$. զորոյ զհետ գայ եթէ

շօշափողն ի ներքոյ ՇՊ $=$ ր $-$ ԿՇ $= \frac{\text{ր}^2 - \text{ա}^2}{\text{ր}}$: Իսկ ուղղորդն ի ներքոյ ՊՐ $= \frac{\overline{\text{ՄՊ}}^2}{\text{ՇՊ}} = \frac{\text{բ}^2\text{ր}}{\text{ա}^2} = \frac{\text{ը}\text{ր}}{\text{ա}}$:

132. Եթէ յԱ գագաթան (Ձեւ 28.) ի վերայ Ք՛Ք առանցից կանգնիցի ուղղորդ ինչ գիծ, եւ հատանիցի ի նմանէ ԱԸ $=$ ԱԹ $=$ ԿԴ, առանց եղերաց գիծքն ԿՆ եւ ԿՆ՜, որք ի Կ միջավայրէ ընդ Ը եւ Թ կէտս ձգիցին, յորջորջին Անանկանելիք ՄԱՏ աւելւոյն. եւ յորժամ երկայնիցի արտաքոյ քան զԿ, երկայնութիւնք նոցին լինին Անանկանելիք միւսոյ աւելւոյն որ յայսկոյս Կ միջավայրի:

133. Եթէ ընդ Մ կէտ մի ի կիտից աւելւոյն ձգիցի ուղիղ ինչ գիծ հաւասար հեռաւոր ի խոտոր-

նակ կամ ի զուգեալ առանցից, յայնժամ ուղղանկիւնն կազմեալ ի հատածոց այսց ուղիղ գծից, որ կայցեն ի մէջ Մ *կիտի եւ անանկանելեաց, հաւասար է երկրորդ կարողութեան կէս առանցից, յորմէ հաւասար հեռաւոր ձգեալ իցէ գիծն այն* (Ձեւ. 28.)։

Յուցումն Ա։ Գիծն $Մէ$ *իցէ հաւասար հեռաւոր* յԱՐ *գծէ, յայտ է եթէ ի* ԿՌՄՊ *ուղղանկեան կողմն* $ԿՌ = ՄՊ = ֆ$, *եւ* $ՄՌ = ԿՊ = ք$, *եւ որովհետեւ* $ֆ^2 = \frac{բ^2}{ա^2}(ք^2 - ա^2)$, *ուրեմն եւ* $\frac{ա^2ֆ^2}{բ^2} = ք^2 - ա^2$, *եւ* $ք^2 - \frac{ա^2ֆ^2}{բ^2} = ա^2$։ Ի ԿԴԸ *եւ* ԿՌՐ *նման երեքանկիւնս է* $ԿԴ:ԴԸ = ԿՌ:ՌՐ$ *կամ* $բ:ա = ֆ;ՌՐ$ *ուստի եւ* $ՌՐ = \frac{աֆ}{բ}$, *նմին իրի եւս* $\overline{ՄՌ}^2 - \overline{ՌՐ}^2 = ք^2 - \frac{ա^2ֆ^2}{բ^2} = ա^2$։ Իսկ *արդ* $\overline{ՄՌ}^2 - \overline{ՌՐ}^2 = (ՄՌ + ՌՐ)(ՄՌ - ՌՐ) = (ՄՌ + ՌՐ)\,ՄՐ$ *քանզի* $ՌՐ = Ռէ$ *ուրեմն եւ* $Մէ \cdot ՄՐ = ա^2$։

Բ. $Մ՚Ն \parallel ԴՆ$ *իցէ. յայտ է եթէ* յԱԿԸ *եւ* ԿՆՊ *նման երեքանկիւնս է* $ԱԿ:ԱԸ = ԿՊ:ՆՊ$, *այս ինքն* $ա:բ = ք:ՆՊ$, *եւ* $ՆՊ = \frac{բք}{ա}$։ Իսկ *արդ* $զֆ^2 = \frac{բ^2}{ա^2} \times (ք^2 - ա^2) = \frac{բ^2ք^2}{ա^2} - բ^2$ *հաւասարութեան զհետ գայ* $\frac{բ^2ք^2}{ա^2} - ֆ^2 = բ^2$, *ուստի եւ* $\overline{ՆՊ}^2 - \overline{ՄՊ}^2 = \frac{բ^2ք^2}{ա^2} - ֆ^2 = բ^2$, *եւ* $բ^2 = Մ՚Ն \cdot Մ՛Ն$, *որովհետեւ* $\overline{ՆՊ}^2 - \overline{ՄՊ}^2 = (ՆՊ + ՄՊ)(ՆՊ - ՄՊ) = (ՆՊ + ՄՊ)\,Մ՛Ն = Մ՚Ն \times Մ՛Ն$։

Ա. Զ$(ՆՊ + ՄՊ)\,Մ՛Ն = բ^2$ *հաւասարութեան զհետ գայ* $Մ՛Ն = \frac{բ^2}{ՆՊ + ՄՊ}$։ Իսկ *արդ* $բ^2$ *է անփո-*

փոխական ինչ քանիօնութիւն, իսկ ՆԳ եւ ՄԳ կարեն յանբաւս աճել, առատաբին յայտ իմն առնի, եթէ $\frac{ք^2}{ՆԳ + ՄԳ}$ կատորս, որով եւ գիծն ՄՆ այնչափ փոքր-կանայցէ, որչափ առաւել մեծ իցէ ԿԳ յարպաւածն պատշաճեալ ՆԳ եւ ՄԳ կարգածոց, առանց ամենեւին $=0$ լինելոյ։ Այս ուրեմն Աւելին եւ անանկանելիքն իւր ցանգ մերձենան առ միմեանս, եւ երբեք չպատահեն միմեանց, որչափ եւ երկայնիցին։

134. Զատածք որ զինչ եւ իցէ ուղիղ գծի ի մէջ անանկանելեացն եւ աւելւոյն, միմեանց հաւասարք են։

Ցուցումն Ա։ Դիցուք գրեացուք եթէ (Ձեւ 29.) ուղիղ գիծն ԸԹ հատանիցէ զաւելին ի կէտս Ժ եւ Մ, եւ ընդ կէտս այսոսիկ ձգիցին ուղիղ գիծքն ԻԼ եւ ՆՆ՛ հաւասար հեռաւորք ի զուգեալ յառանցից։ Յ ԸՄՆ եւ ԸԺԻ նման երեքանկիւնս է ԸՄ : ԸԺ = ՄՆ : ԺԻ. եւ ի նման երեքանկիւնս ԹՄՆ՛ եւ ԹԺԼ է ԹՄ : ԹԺ = ՄՆ՛ : ԺԼ։ Արդ եթէ երկոքին համեմատութիւնքս մի ըստ միոջէ անդամ անդամ բազմացուցանիցին, ծագէ ԸՄ . ԹՄ : ԸԺ . ԹԺ = ՄՆ . ՄՆ՛ : ԺԻ . ԺԼ։ Իսկ արդ ՄՆ . ՄՆ՛ = ԺԻ . ԺԼ = $ք^2$, ուրեմն եւ ԸԺ . ԹԺ = ԸՄ . ԹՄ, եւ ԸԺ : ԸՄ = ԹՄ : ԹԺ, կամ ԸԺ — ԸՄ : ԸՄ = ԹՄ — ԹԺ : ԹԺ, այս ինքն ԺՄ : ԸՄ = ԺՄ : ԹՄ. զորոյ զհետ գայ ԸՄ = ԹԺ։

Բ. Գիծն ԺՄ (Ձեւ 30.) հատանէ զանանկանելիսն ի կէտս Ը եւ Թ. ընդ կէտսն Ժ եւ Մ ձգեացին գիծքն ԺԻ եւ ՄՆ՛ հաւասար հեռաւորք յառանցից անտի ԱԲ։ Արդ ի ԸՄՆ եւ ԸԺԻ նման երեքանկիւնս է ԸՄ : ԸԺ = ՄՆ : ԺԻ, եւ ի նման երեքանկիւնս ԹՄՆ՛, ԹԺԼ է ԹՄ : ԹԺ = ՄՆ՛ : ԺԼ. զայսոսիկ համեմատութիւնս միմեամբք բազմացուցեալ, ելանէ ԸՄ . ԹՄ : ԸԺ . ԹԺ = ՄՆ . ՄՆ՛ : ԺԻ . ԺԼ. եւ որովհետեւ ՄՆ . ՄՆ՛ = ԺԻ . ԺԼ = $ա^2$ (Հ. 133.) ուրեմն եւ ԸՄ . ԹՄ = ԸԺ . ԹԺ, եւ ԹՄ : ԹԺ = ԸԺ : ԸՄ, կամ թէ եւս

ԹՄ + ԹԺ : ԹԺ = ԸԺ + ԸՄ : ԸՄ , այս ինքն ԺՄ : ԹԺ = ԺՄ : ԸՄ , եւ ԹԺ = ԸՄ ։

Ա. Եթէ ԲՇ գիծն (Ձեւ 29.) ձգեալ ի մէջ անանկանելեացն շօշափիցէ զաւելլն ի Ս , յայնժամ լինիցի ԲՍ = ՇՍ (Հ. 134. Ա.)։

Բ. Եթէ ընդ Կ կենդրոնն (Ձեւ 30.) ձգիցի որ զինչ եւ իցէ ուղիղ գիծ ԲՏ յաւելլն որ յերկոսին կողմանս Կ միջավայրին, յայնժամ ԿԲ = ԿՏ (Հ. 134. Բ.)։

Գ. Եթէ (Ձեւ 29.) յայտնի եւ ծանուցեալ իցեն անանկանելիքն Կա եւ Կբ, եւ գագաթն Բ, յայնժամ մարթ է մօտաւոր օրինակաւ գտանել զբազում կէտս աւելլոյն, որչափ եւ կամք իցեն։ Ի մէջ անանկանելեացն ընդ Բ գագաթն ձգեա ուղիղ գիծս աԲբ, ա′Բբ′, ..., եւ հատ ամ = Բբ, ա′մ′ = Բբ′ . . ., կէտքն մ, մ′, այլովքն հանդերձ կան յաւելլոջ. (Հ. 133.)։

134. Խնդիր։ Գտանել զհաւասարութիւնն վասն աւելլոյն առ համեմատութեամբ անանկանելեացն։

Լուծումն։ Ընդ կէտն Մ որ կայցէ յաւելլոջ (Ձեւ 31.) ձգեա գիծ մի ՄՊ հաւասար հեռաւոր ի ԿՐ անանկանելւոյ. համարեաց եթէ կարգած իմն իցէ ՄՊ, եւ զման մի ԿՍ անանկանելւոյն, որ կայցէ ի մէջ ՄՊ կարգածոյն եւ Կ միջավայրին, այս ինքն է զԿՊ դիջիր գրեաջիր որպէս յապաւած Մ կիտի։ Արդ յետ այնորիկ ընդ Ա գագաթն ձգեա ԱԸ || ԿՐ, եւ ընդ կէտն Մ զՆՌ || ԴԵ զուգեալ առանցից։ Արդ ի ԿՆՌ եռեքանկեան ՄՊ || ԿՌ է, ուրեմն ԿՊ : ՄՌ = ՆՊ : ՄՆ. իսկ արդ ի ՄՆՊ եւ ԱԵԸ նման եռեքանկիւնս է ՆՊ : ՄՆ = ԵԸ : ԱԵ , ուստի եւս ԿԸ : ՄՌ = ԵԸ : ԱԵ ։ Ի բազմացուցանելոյ երկոցունց յետին համեմատութեանց ելանէ ՆՊ × ԿՊ : ՄՆ × ՄՌ = $\overline{\text{ԵԸ}}^2 : \overline{\text{ԱԵ}}^2$. եւ եւ քանզի ՄՆ × ՄՌ = $\overline{\text{ԱԵ}}^2$ (Հ. 133.), ուրեմն եւ ՆՊ . ԿՊ = $\overline{\text{ԵԸ}}^2$ ։

Դարձեալ ի ԿԴԵ երեքանկեան ԱԸ || ԿԴ. նմին իրի եւ ԵԸ : ԱԸ = ԿԵ : ԿԴ. իսկ արդ ԿԵ = ԿԴ, ուրեմն եւ ԵԸ = ԱԸ: Նաեւ քանզի ՆՊ : ՄՊ = ԵԸ : ԱԸ, հարկ է եւս ՆՊ = ՄՊ լինել, վասն որոյ եւս ՆՊ . ԿՊ = ՄՊ . ԿՊ = $\overline{ԱԸ}^2$:

Արդ իբրեւ ՄՊ = ա, ԿՊ = բ, անփոփոխական գիծն ԱԸ = գ, յայնժամ խնդրեալ հաւասարութիւնն իցէ աբ = գ^2:

Ա. Որովհետեւ ԱԵ : ԱԴ = ԵԸ : ԿԸ, եւ ԱԵ = ԱԴ, ուրեմն եւ ԵԸ = ԿԸ. իսկ արդ ԿԵ = ԿՀ, ուրեմն ԱԸ = ԵԸ = ½ԿՀ կամ գ $= \frac{ե}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(ա^2+բ^2)}$:
Այս ուրեմն ուղղանկիւնն յօրինեալ յի միասին կարգածոյ ի վերայ անանկանելեայն հաւասար է երկրորդ կարողութեան կէս այլակենդրոնութեան, կամ թէ կէս այլակենդրոնութիւնն է միջին երկրաչափական համեմատական ի մէջ ա կարգածոյ, եւ բ յապաւածոյ, այս է ա : գ = գ : բ:

135. Համարեսցուք եթէ (Ձեւ 32, 33, 34.) ԱԳԲ երեքանկիւնն իցէ կտրուած ինչ ուղղորդ կոնի, եւ իցէ այնպէս զի կտրուածս անցանիցէ ընդ Գ գագաթն եւ ընդ ԱԲ կէս երկակատուրն խարսխին: Նաեւ հատանիցի կոնն յերկրորդ ինչ ԴՐՍ երեսաց, որ ուղղորդ իցէ ի վերայ ԱԳԲ երեքանկեան, եւ ուղիղ գիծն ԴՔ իցէ գիծն հատանելոյ երկոցունց երեսացն զմիմեանս: Անկիւնն ԲԴՔ է միութիւն ԲԴ կողման կոնին ի ԴՐՍ հատանող երեսս. իսկ գիծն հատանելոյ այսր ԴՐՍ երեսաց եւ կոնին զմիմեանս, է կոր ինչ գիծ, եւ է

Ա. Կոնագիծ, եթէ ԲԴՔ անկիւնն միութեան հաւասար իցէ ԱԳԲ անկեան գագաթան, կամ հատանող ԴՐՍ երեսքն՝ հաւասար հեռաւոր իցէ յԱԳ կողմանէ կոնին (Ձեւ 32.):

Բ. Երկայնաձիգ բոլորակ, եթէ ԲԴՔ անկիւնն՝ մեծ իցէ քան զանկիւնն ԱԳԲ որ ի գագաթան (Ձեւ 33.):

Գ. Աւելի, եթէ անկիւնն ԲԴՔ փոքրագոյն իցէ քան զԱԳԲ անկիւնն գագաթան (Ձև 34.)։

Ցուցումն առաջին մասին։ Համարեսցուք եթէ (Ձև 32.) անկիւնն ԲԴՔ = ԱԳԲ, ուստի և ԴՔ || ԱԳ։ Արդ ընդ որ գնիչ և իցէ Մ կէտ մի ի կիտից ՐԴՍ կոր գծին հաստատեսցի երեւքն ՄԸԺ հաւասար հեռաւոր ի խարսխէ անտի կոնին, ապա յայտ իմն է, եթէ է նա ուղղորդ եւս ի վերայ ԱԳԲ երեքանկեան, և կտրուածն ի գլխովին է բոլորակ ինչ, որոյ երկակտուրն ԸԺ հաւասար հեռաւոր է յԱԲ երկակորոյ, կտրուածն յորում երեւքն ԴՐՍ և ԸՄԺ հատանեն զմիմեանս, այս է ուղիղ գիծն ՄՊ՝ ուղղորդ է ի վերայ ԱԳԲ երեսաց, ուստի և ի վերայ ԴՔ ուղիղ գծի և ԸԺ ուղիղ գծի։ Արդ որովհետև ԸՄԺ է բոլորակ, և ՄՊ ուղղորդ ի վերայ ԸԺ երկակորոյ, նմին իրի $\overline{ՄՊ}^2 = ԸՊ \cdot ԺՊ$։

Ընդ կէտն Դ ձգեա զուղիղ գիծն ԴԻ || ԸԺ, և զի նման են երեքանկիւնքն ԴԺՊ և ԳԴԻ, վասն որոյ $ԺՊ : ԴՊ = ԴԻ : ԳԻ$, և $ԺՊ = \frac{ԴՊ \times ԴԻ}{ԳԻ}$. ուրեմն և $\overline{ՄՊ}^2 = \frac{ԸՊ \times ԴՊ \times ԴԻ}{ԳԻ}$. կամ (որովհետև ԸՊ = ԴԻ,) $\overline{ՄՊ}^2 = \frac{\overline{ԴԻ}^2}{ԳԻ} \cdot ԴՊ$։ Արդ արասցուք ԻՆ = ԴԻ, և ձգեսցուք ՆՌ || ԳԴ. աստի յառաջ գայ $ԳԻ : ԻՆ = ԴԻ : ԻՌ$, և $ԻՌ = \frac{ԻՆ \times ԴԻ}{ԳԻ}$, ուրեմն և (քանզի ԻՆ = ԴԻ), $ԻՌ = \frac{\overline{ԴԻ}^2}{ԳԻ}$, և $\overline{ՄՊ}^2 = ԻՌ \cdot ԴՊ$։ Արդ զյապաւածն ԴՊ դիցուք = +, զկարգածն ՄՊ = ‡, և զանփոփոխական ուղիղ գիծն ԻՌ = ╍, յայնժամ ‡² = ╍+, յորմէ մարթ է իմանալ, եթէ կոր գիծն ՐԴՄՍ է կոնադիծ, և ԻՌ առընթերաչափ նորին։

Ցուցումն երկրորդին։ Եթէ անկիւնն ԲԴԶ > ԱԴԲ իցէ (Ձեւ 33.), ուստի եւ ԱԳԴ + ԳԴԶ < 2Ո, հարկ է զի իբրեւ երկայնիցի գիծն ԴԶ հատանիցէ ուրեք զոր օրինակ յԽ, զգիծն ԱԳ։ Արդ ընդ Ի միջավայր ԴԽ գծին հաստատեսցուք երեսս ինչ հաւասար հեռաւորս ի խարսխէ կոնին, կտրուածն ՀՆՁ լինիցի բոլորակ, եւ գիծն ԻՆ, յորում ընդ մէջ հատանէ նա զԴՄՆԽ երեսս, իցէ ուղղորդ եւ ի վերայ ՀՁ եւ ի վերայ ԴԽ գծից։ Նոյնգունակ եթէ ընդ այլ որ զինչ եւ իցէ կէտ ինչ Մ հաստատիցեմք երեսս ինչ հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն, կտրուածն ԸՄԺ իցէ բոլորակ, եւ գիծն ՄՊ ուղղորդ ի վերայ ԴԽ եւ ԸԺ գծից. զորս զհետ գայ $\overline{\text{ԻՆ}}^2 = \text{ՀԻ}\cdot\text{ՁԻ}$ եւ $\overline{\text{ՄՊ}}^2 = \text{ԸՊ}\cdot\text{ԺՊ}$։ Յ ԽԸՊ եւ ԽՀԻ նման երեքանկիւնս է $\text{ԸՊ}:\text{ԽՊ} = \text{ՀԻ}:\text{ԽԻ}$, իսկ ի նման երեքանկիւնս ԴԺՊ եւ ԴՁԻ է $\text{ԺՊ}:\text{ԴՊ} = \text{ՁԻ}:\text{ԴԻ}$։ Իբրեւ երկուքին համեմատութիւնքս մի ըստ միոջէ միմեանց բազմացուցանիցին, ելանէ $\text{ԸՊ}\cdot\text{ԺՊ}:\text{ԴՊ}\cdot\text{ԽՊ} = \text{ՀԻ}\cdot\text{ՁԻ}:\text{ԴԻ}\cdot\text{ԽԻ}$. իսկ արդ $\text{ԸՊ}\cdot\text{ԺՊ} = \overline{\text{ՄՊ}}^2$, $\text{ՀԻ}\cdot\text{ՁԻ} = \overline{\text{ԻՆ}}^2$, եւ $\text{ԴԻ}\cdot\text{ԽԻ} = \overline{\text{ԴԻ}}^2$ (քանզի $\text{ԴԻ} = \text{ԽԻ}$), ուրեմն եւ $\overline{\text{ՄՊ}}^2:\text{ԴՊ}\cdot\text{ԽՊ} = \overline{\text{ԻՆ}}^2:\overline{\text{ԴԻ}}^2$, եւ $\overline{\text{ՄՊ}}^2 = \dfrac{\overline{\text{ԻՆ}}^2}{\overline{\text{ԴԻ}}^2}\cdot\text{ԴՊ}\cdot\text{ԽՊ}$։

Արդ իբրեւ զյապաւածն $\text{ԻՊ} = \text{փ}$, զկարգածն $\text{ՄՊ} = \text{ք}$, $\text{ԻՆ} = \text{բ}$, $\text{ԴԻ} = \text{ԽԻ} = \text{ա}$, $\text{ԴՊ} = \text{ԴԻ} - \text{ԻՊ} = \text{ա} - \text{փ}$, $\text{ԽՊ} = \text{ԽԻ} + \text{ԻՊ} = \text{ա} + \text{փ}$ դնիցեմք, այս զօրութիւնք հաստատեալք ի վերագոյն ասացեալ հաւասարութեան առնիցեն արդասիս

$$\text{ք}^2 = \frac{\text{բ}^2}{\text{ա}^2}(\text{ա} - \text{փ})(\text{ա} + \text{փ}) = \frac{\text{բ}^2}{\text{ա}^2}(\text{ա}^2 - \text{փ}^2)\text{։}$$

Ապա ուրեմն կոր գիծն ԴՄՆԽ է երկայնաձիգ բոլորակ յորում միջավայրն է Ի, ԴԻ կէսն մեծագոյն առանցից, եւ ԻՆ կէսն փոքրագոյն առանցից։

Ցուցումն երրորդ մասին։ Եթէ անկիւն ԲԴԶ < ԱԳԴ, յայտ է եթէ ԱԳԴ + ԳԴԶ > 2Ո, եւ հարկ է զի երկայնութիւնք ԱԳ եւ ՔԳ գծից ի վայրի ուրեք են ի վերոյ քան զԴ եւ զԳ, զմիմեանս հատանիցեն։ Հատարակեա զգիծն ԴԵ եւ ընդ միջավայրն Ի ձգեա զուգահեռ գիծն ՉԻ || ԱԲ։ Նատէն եւս յԸՄԺ բոլորակին, որ հաւասար հեռաւորն է ի խարսխէն է $\overline{ՄՊ}^2 =$ ԸՊ · ԺՊ։ Յեւ ԵԸՊ եւ ԵՀԻ նման երեքանկիւնս է ԸՊ : ԵՊ = ՀԻ : ԵԻ, եւ ի նման երեքանկիւնս ԴԺՊ եւ ԴՉԻ է ԺՊ : ԴՊ = ՉԻ : ԴԻ։ Իբրեւ բազմապատկանիցին միմեանց երկուքին համեմատութիւնքս, ելանէ ԸՊ · ԺՊ : ԴՊ · ԵՊ = ՀԻ · ՉԻ : ԴԻ · ԵԻ. իսկ արդ ԸՊ · ԺՊ = $\overline{ՄՊ}^2$, ԴԻ · ԵԻ = $\overline{ԴԻ}^2$ (քանզի ԴԻ = ԵԻ), եւ իբրեւ ձգիցի ԻՆ շօշափօղ ի կէտն Ի ի բոլորակ անդր որ ձգեալ իցէ ի վերայ ՀՉ կէս երկակարոյ, յայտ է եթէ լինիցի $\overline{ԻՆ}^2 =$ ՀԻ · ՉԻ · զորս զհետ գայ եւս $\overline{ՄՊ}^2$:

$$ԴՊ \cdot ԵՊ = \overline{ԻՆ}^2 : \overline{ԴԻ}^2,\ եւ\ \overline{ՄՊ}^2 = \frac{\overline{ԻՆ}^2}{\overline{ԴԻ}^2} \cdot ԴՊ \cdot ԵՊ :$$

Արդ դարձեալ իբրեւ զյապաւածն ԻՊ = +, զկարգածն ՄՊ = ֆ, զԴԻ = ԵԻ = ա, եւ ԻՆ = բ, ուստի եւ ԴՊ = + — ա, եւ ԵՊ = + + ա դնիցեմք. այս զօրութիւնք հաստատեալ ի վերագոյն ասացեալ հաւասարութեան, առնիցեն

$$ֆ^2 = \frac{բ^2}{ա^2}\,(+ - ա)(+ + ա) = \frac{բ^2}{ա^2}\,(+^2 - ա^2),$$

յորմէ ինքնին մարթեմք հասանել ի վերայ, եթէ կոր գիծն ՐԴՄՍ է ուսեալ։

ԱՆՈՒԱՆՔ ՈՒՍՈՂՈՒԹԵԱՆ

Աղեղն, Բ. 28, Bogen, *arc*, arcus.

Աճեցող, Ա. 59, wachsend, steigend, *croissant*, crescens.

Այլակենդրոն, Բ. 29, (արտա-կենտրոն*), excentrisch, *excentrique*, excentricus.

Այլակենդրոնութիւն, Գ. 92, Excentrität, *excentricité*, excentritas.

Այլակերպութեան հաշիւ, Ա. յուշք. Differenzialrechnung, *calcul différentiel*.

Այլակերպութիւն, Ա. 14, (տար-բերութիւն), Differenz, Unterschied, Rest, *différence*, *excès*, differentia inter minuendum et subtrahendum.

Անանկանելի, Գ. 113, Asymtote, *asymtote*, asymtotae.

Անբաւ, կամ անսահման, Ա. 148, unendlich, *infini*, infinitus.

Անբուն. Ա. 101, unecht, uneigentlich, *impropre*, spurius.

Անդամ, Ա. 43, Glied, *terme*, terminus.

Անզոյգ, Ա. 75, ungerad, *impair*, (numerus) impar.

Անկանոն կամ } Բ. 27, (մարմին,)
Անկարգ, } Բ. 244, (կոտոր,) Ա. 121, (դարախանն), unregelmäßig, irregulär, *irrégulier*, irregularis.

Անկիւն, Բ. 15, Winkel, *angle*, angulus.

Անկիւնագիծ, Բ. 27, (տրամա-նկեան), Diagonal, *diagonal*, linea diagonalis.

Անկիւնաչափութիւն, Goniometrie, *goniométrie*.

Անկիւնաւոր, Բ. 244, eckig, *angulaire*.

Անկիւն ի բոլորակի, Բ. 29, Winkel am Kreise, angulum intra circulum.

Անկիւն կողից, Բ. 231, Kantenwinkel.

Անկիւն մարմնոյ, Բ. 231. körperliche Ecke, körperlicher Winkel, Körperwinkel, *angle solide*, angulus solidus.

Անկիւն միտութեան, Բ. 206. Neigungswinkel, *angle d'incidence*, inclinatio.

Անկիւն շրջանակի կամ բազմանկեան, Բ. 26. Umfangswinkel, Polygonwinkel, *angle de contour*, anguli ad perimetrum, angulus polygoni.

Անկիւն շրջապատի, Բ. 30. (շըր-ջանակագծի անկեան), Peripheriewinkel, *angle de périphérie*, *de circonférence*, angulus ad peripheriam.

Անհնարին, Ա. 196. unmöglich, *impossible*, impossibilis.

Անյայտ հաւասարութիւն, Ա. 402. unbestimmte Gleichung, *equation indéterminée* կամ *sourde*, equatio indeterminata.

Անուանիչ, Ա. 100. (յայտարար),

---

*) Անուանքն ուսողութեան որք ներքոյ ստացեալ նշանագրովք եդան ի փակիչ գծի, են անուանքն՝ որ ոչ ըստ յատկութեան Հայերէն լեզուի յօրինեալ են, զորս ոչ պատշաճ թուեցաւ մեզ ի կիր արկանել յուսողութեանս։ Զբազմաց ի սոցանէ զպատճառ չպատշաճելոյ իւրացն՝ զորոց ասիցին, ցուցեալ եմք ի կարգին. զմնացելոցն դիւրին է ընթերցանելեացն ի միոյ իմանալ։

յարանուանօղ), Nenner, *dénominateur*, denominator: Ա-նունդ *dénominateur* նշանակէ անուանիչ, որպէս եւ զնոյն իսկ ցուցանէ յարանուանօղ, իսկ յայտարար ոչ պատշաճի այսմ. մանաւանդ զի ամենայն թիւ յայտ առնէ միութիւնս ինչ, եւ ըստ այսմ յայտարար կարեն կոչել ամենայն թիւք հնարաւորք. վասն որոյ չէ ինչ զարմանալ ընդ փոփոխումն, զոր արարաք:

Անչափական (գիծ), Բ. 66. Ա. 229. (անլաֆակիյ), unmeßbar, incommensurabel, *incommensurable*, incommensurabilis.

Անջատեալ, Ա. (տարանձատ. տարարալ), discrete, *discret*, discretus.

Անջրպետութիւն. Բ. 1. Raum, *espace*, spatium.

Անցք. Բ. 206. Durchgang, Fußpunkt, *pied*.

Անքակ կամ Աղխաղխեալ, } Ա. 2, 252. Բ. 4. (Համեմատութիւն), stetig, *continu*, continuus.

Առանց հաստատութեան, կամ անհաստատուն. Ա. 183. irrational, incommensurabel, unvollständig, unausmeßbar, unausrechenbar, *irrationel*, irrationalis.

Առանցք, Բ. 321. Achse, *axe*, axis.

Առանցք պըջելոյ, Բ. 330. Umdrehungsachse, *axe de rotation*.

Առաջնորդ, կամ նախընթաց (կշռութեան), Ա. 243. Vorderglied, Antecedens, Vorsatz, *antécédent*, antecedens.

Առաւել, Ա. 11. Plus, *plus*, plus.

Առընթերաչափ, Գ. 81. Parameter, *paramètre*, parameter.

Առնելի, Ա. 18. Faktor, *facteur*, factor.

Աստեղագիտութիւն, Ա. 2. Astronomie, *astrononomie*, astronomia.

Աստիճան, Բ. 20. Grad, *degré*, gradus.

Աստիճանք. Բ. 74. Maßstab, *échell d'arpenteur*.

Արդեանց կամ գործական, Բ. 4. Ա. 2. (ֆործնական), praktisch, angewandt, *pratique*, *appliqué*, applicatus.

Արդիւնք, Ա. 18. (արտադրեալ), Product, Factum, *produit*, productum, factum, առ նախնիս Արդիւնք թարգմանի, եւ յայլ լեզուս եւս միով անուամբ ասի:

Արմատ, Ա. 181. Wurzel, *racine*, radix.

Արմատական (քանիօնութիւն), Ա. 181. Wurzelgröße, Radicalgröße, *quantité radicale*, quantitas radicalis.

Արմատոյ կամ արմատական (նըշան), Ա. 181. Wurzelzeichen, *signe radical*, signum radicale.

Արմատոյ կամ արմատական ցուցիչ, Ա. 181. Wurzelexponent, Radical-Exponent, *exposant radical*, exponens radicalis.

Արտաքին (անկիւն), Ա. 252. äußere, *extrême*, externus.

Արտաքին կամ վերին երեսք, Բ. 2. Oberfläche, *superficie*, *surface*, superficies.

Արտաքս ստուցեալ, Բ. 27. ausspringend, *saillant*.

Աւելի, Գ. 106. Hyperbel, *hyperbole*, hyperbola.

Բազմակողմեան (անկիւն մարմնոյ). Բ. 231. 245. mehrkantig, *qui a plusieurs côtés*.

Բազմամասն, Ա. 43. Polynome, zusammengesetzte, mehrnamige, complexe (Größen), կամ vielgliedrige Ausdrücke, *polynôme*, polynomium.

Բազմանիստ, Բ. 245. Polyeder, *polyèdre*, polyedrum.

Բազմանիստ անկիւն մարմնոյ, Բ. 231. 245. körperliches Vieleck.

Բազմանկիւն, Բ. 26. Vieleck, Polygon, *polygone*, polygonum.

Բազմանկիւնաչափութիւն, Գ. 2. Polygonometrie, *polygonométrie*.

Բազմանկիւնի, Բ. 105. vieleckig, *polygone*, polygonalius.

— թիւ, Ա. 429. Polygonalzahl, vieleckige Zahl, *nombre polygone*, numerus polygonalius.

Բազմացուցանել, Ա. 18. ([illegible]), multipliciren, *multiplier*, multiplico.

Բազմացուցանելի, Ա. 18. ([illegible]), Multiplicant, *multiplicande*, multiplicandus.

Բազմացուցիչ, Ա. 18. ([illegible]), Multiplicator, *multiplicateur*, multiplicator.

Բաժանած } բոլորակի, Բ. 29.
Բաժին } Kreisausschnitt, Sector, *secteur*, sector circuli.

Բաժանարար, Ա. 23. Theiler, Divisor, *diviseur*, divisor.

Բաժանելի, Ա. 23. Dividend, *dividende*, dividendus.

Բաժանումն, Ա. 23. Division, *division*, divisio.

Բառնալի ճառագայթ, Գ. 79. Fahrstrahl, Radius vektor, Vektor, *rayon vecteur* կամ *vecteur*, radius vector.

Բարձրագոյն, Բ. 5. Ա. 2. höher, *sublime*.

Բարձրագոյն ուսողութիւն, Ա. 2. höhere Mathematik, *mathématiques sublimes*.

Բարձրացեալ կամ ուռուցեալ, Բ. 18. 28. Konvex, erhaben, erhöht, *convexe*, convexus.

Բարձրութիւն, Բ. 3. Höhe, *hauteur*, altitudo.

Բացարձակութիւն, Բ. 48. Abstand, Entfernung, *distance*, *absence*, distantia.

Բաւականութիւն (անօթոյ), Բ. 304. Capacität, *capacité*, capacitas.

Բեկեալ, Բ. 10. gebrochen, *brisé*. fractum. ուղիղ —, gerad gebrochen. կոր —, krumm gebrochen.

Բեւեռք, Բ. 332. Pol, *pole*, polus.

Բթանկիւն, Բ. 36. Stumpfwinklig, *obtusangle*, obtusangulus.

Բնական (ծոց), Գ. 43. natürlich, *naturel*, naturalis.

Բոլորակ, Բ. 28. Kreis, *cercle*, circulus.

Բոլորակին ձգել զձեւովն արտաքոյ, Բ. 35. ([illegible]), umschreiben, *circonscrire à un… tracer un cercle autour d'un (triangle, . . .)*, circulus figurae circumscriptus esse.

Բոլորակին ձգել ներքոյ զձեւովն, Բ. 35. ([illegible]), einschreiben, *inscrire*, circulus figurae inscriptus esse.

Բոլորշի (մարմին), Բ. 244. rund, *rond*.

Բովանդակութիւն, Ա. 11. Summe, *somme*, summa.

Բովանդակելի, Ա. 11. endlich, *final*.

Բովանդակումն, կամ Կատարումն, Բ. 17. Komplement, *complement*, complementum.

Բութ, Բ. 17. stumpf, *obtus*, obtusus.

Բուն, Ա. 101. echt, eigentlich, *propre*, *réel*, verus.

Բուրգն, Բ. 246. Pyramide, *pyramide*, pyramis.

Բրիգեան (ղոգարիթմոս), Ա. 302. Briggische, vulgaris (logarithmus).

Գագաթան (գիծ), Բ. 23. Vertical, *vertical*, verticalis.

Գագաթան անկիւնք, Բ. 17. ([illegible]), Scheitelwinkel, Verticalwinkel, *angles opposés au sommet*, anguli verticales.

Գագաթն, Բ. 15. (անկեան կողից), Բ. 231. Scheitel, Spitze. *sommet*, vertex.

Գիծ, Բ. 2.9. Ա. 30. Linie, *ligne*, linea.

— *կենդրոնական*, Բ. 29. Centrallinie, *ligne centrale*.

Գիտութիւն կամ ուսումն տեսանելոյ, կամ Տեսողութիւն. Ա. 2. Optik, *optique*, optica.

Գլան, Բ. 312. Cylinder, Walze, *cylindre*, cylindrus.

Գլանաձեւ, Բ. 312. cylindrisch, *cylindrique*, cylindricus.

Գլխատեալ կամ կրճատեալ (բուրգն), Բ. 247. abgestutzt, abgekürzt, *tronqué*.

Գնդական անկիւն, Բ. 332. sphärischer Winkel, *angle sphérique*, angulus sphaericus.

Գնդական բազմանկիւն, Բ. 322. sphärisches Vieleck, *polygon sphérique*, poligonum sphaericum.

Գնդական եռանկիւն, Բ. 332. sphärisches Dreieck, *triangle sphérique*, triangulum sphaericum.

Գնդակերպ, Բ. 322. Sphäroid, *sphéroïde*, sphaeroïdus.

Գոգաւոր, Բ. 18. 28. Konkav, hohl, *concave*, concavus.

Գործակից, Ա. 42. Coefficient, *coëfficient*, coefficiens.

Գումարել. տես Յաւելումն:

Գունդ, Բ. 330. Kugel, *sphère*, sphaera.

Գօտի (գնդոյ), Բ. 331. Zone, *zône*.

Դատարկ, Ա. 6. Null. *zéro*, zerus.

Երեսք, Բ. 2. (մակերեւոյթ), Fläche, *aire*, *surface*, superficies, area.

Երեսք կողմանց կամ եզերաց, Բ. 244. Gränzflächen, Seitenflächen, *surface latéral*, plana lateralia.

Եռանկիստ (անկիւն մարմնոյ), Բ. 231. 245. körperliches Dreieck, *triangle solide*, triangulum solidum.

— *բուրգն*, Բ. dreiseitig, *triangulaire*, triangularis, trilaterus.

Եռանկիւն, Բ. 26. (եռանկիւն), Dreieck, *triangle*, triangulum, trigonum.

Եռանկիւնաչափական, Գ. 4. (եռանկիւնաչափական), Trigonometrisch, *trigonométrique*, trigonometricus.

Եռանկիւնաչափութիւն. Գ. 4. Trigonometrie, *trigonométrie*, trigonometria.

Եռանկիւնի թիւ, Ա. Dreiecks- կամ Triangularzahl, dreieckige Zahl, *nombre trigonal* կամ *triangulaire*, numerus triangularius.

Եռեքիլիոն, Ա. 6. Trillion, *trillion*.

Եռեքին, Ա. 176. Terne, *terne*, ternion.

Եռեքկնեալ, Ա. 250. triplicirt, *triplé*, triplicatus.

Եռեքկողմեան (ձեւ), Բ. 26. dreiseitig, *trilatéral*, *triangulaire*, trilaterus.

Եռեքկողմեան (անկիւն մարմնոյ, մարմին), Բ. 231. 245. dreikantig, *à trois carnes*, trilaterus.

Եռեքմասնեան, Ա. 43. Trinome, dreitheilige (Größen), *trinôme*, trinomium.

Երից կանոն, Ա. 270 Regel de tri, goldene Regel, *règle de trois*, regula aurea (ոսկեղէն կանոն). regula de tribus.

Երկակտուր, Բ. 28. (տրամագիծ). Durchmesser, Diameter, *diamètre*, diameter. Այսպէս թարգմանեալ կայ յԵւկլիդեայ երկրաչափութեան, որ կշռի իսկ քաջ անուանդ diameter, իսկ անունդ տր—մ—ծէծ, թող զի չէ ըստ յատակութեան ըն-զուի տպագրել, չայ ընու-միտս, զոր յայտնեալն կամիցի:

Երկայնաձեւ խորանարդ, Բ. 245. (ղ——ֆ—հէ———ն), Parallelipipedum, *parallélipipède*, parallelipipedum.

Երկայնաձիգ բոլորակ, Գ. 92. (Յ———յէ—), Ellipse, *ellipse*, ellipsis. Որ յառաջ քան զմեզ գրեցին զերկրաչափութենէ, անուանդ *ellipse* եղին Հայերէն Զ———յէ—, բայց սակայն այս անունն ոչ պատշաճի քաջ. քանզի այլ ինչ է ձուաձեւ, զոր յայլազգի բարբառս *oval* ասեն. եւ այլ ինչ *ellipse*, եւ բազում խտիր է ի մէջ երկոցունց, որպէս յայտ է տեղեկացունիցն երկրաչափութեան: Արդ զի մի շփոթութիւն ինչ դիպեսցի յուսմանն, յորժամ երկուց իրաց հասարակ անուանս դնիցեմք, հարկ եղեւ մեզ փոփոխումն առնել: Զանունդ *ellipse*, որ գերմաներէն կոչի längliche Runde, եդաք Երկայնաձիգ բոլորակ, որպէս մեզ բարւոք թուեցաւ, իսկ Ձ———յէ—ք պահեցաք *oval* անուան:

Երկայնութիւն, Բ. 3. Länge, *longueur*, longitudo.

Երկբիլիոն, Ա. 61. Billion, *billion*.

Երկմասնեան, Ա. 43. Binome, zweitheilige (Größen), *binôme*, binomium.

Երկոտասանանիստ, Բ. 309. Dodekaeder, *dodécaèdre*, dodecaëdrum.

Երկոտասանանկիւն, Բ. 159. Zwölfeck, Dodekagon, *dodécagone*, dodecagonum.

Երկոքին, Ա. 176. Ambe, *ambe*, binion.

Երկրաչափական, Բ. 14. geometrisch, *géométrique*, geometricus.

Երկրաչափութիւն, Բ. 4. Geometrie, Erdmeßkunst, *géométrie*, geometria.

Երկրորդական վայրկեան, Ա. 32. Sekunde, *seconde*, minutum secundum.

Երկրորդք, Բ. 30. (մ—ն—ե—ե—ր—), Sekunde, *seconde*, minutum secundum.

Երկրորդ արմատ, Ա. 181. zweite Wurzel, *racine deuxième* կամ *carrée*, secunda radix.

Երկրորդ կարողութիւն, Ա. 182. zweite Potenz, *seconde puissance carré*, secunda potentia, quadratum.

Երրորդական վայրկեան, Ա. 33. կամ

Երրորդք, Բ. 30. Terz, *tierce*, minutum tertium.

Երրորդ արմատ, Ա. 18. dritte Wurzel, *racine troisième* կամ *cubique*, tertia radix.

Երրորդ կարողութիւն, Ա. 182. dritte Potenz, *troisième puissance, cube*, tertia potentia, cubus.

Եւթնանկիւն, Բ. 26. Siebeneck, Heptagon, *éptagone*, heptagonum.

Զոյգ, Ա. 75. gerade, *pair*. (numerus) par.

Զոյգ անզոյգ, Ա. gerade ungerade, pariter impar.

Զուգեալ առանցք. Գ. 109. zweite Achse, axis conjugatus.

Էջք, Բ. 37. Cathete, *cathède*, catheti.

Ընդհարկանել միմեանց, Բ. 12. zusammenstoßen, *rencontrer*.

Թիկունք, Բ. 333. Rücken.

Թիւ, Ա. 5. Zahl, *nombre*, numerus.

Թիւ համարոյ, Բ. 108. Anzahl, *nombre*, numerus.

Ժամ, Ա. 32. Stunde, *heure*.

Ի բաց բառնալ, } (ի հա-
Ի բաց հանել } ւասարութեան), Ա. 344. eliminiren, *éliminer*, elimino.

Ի միասին կարգածք, Գ. 79. Coordinaten, *coordonnées*, coordinatum.

Ի միասին հատանող, Գ. 7. Cosekant, *co-sécante*, cosecans.

Ի միասին շօշափող, Գ. 7. Cotangent, *co-tangente*, cotangens.

Ի ներքս ամփոփեալ, Բ. 27. einspringend, *rentrant*.

Լայնութիւն, Բ. 3. Breite, *largeur*, largitudo.

Լար, Բ. 28. Sehne, *corde, soustendante*, chorda, subtensa.

Լրումն, Բ. 17. Ergänzung, Supplement, *supplément*, supplementum.

Խառն, Բ. 10.12. gemischt.

Խառն կամ գործական (ուսողութիւն), Բ. 4. angewandt, praktisch, *pratique*, *appliqué*, applicata.

Խառնուած, Ա. 176. Combination, *combinaison*, combinatio.

Խարիսխ, Բ. 27. 28. Grundlinie, Grundseite, Basis, (մարմնոյ), Grundfläche, Basis, *base*, basis.

— ղոգարիթմեայց, Ա. 297. Grundzahl, Basis, *base*, basis.

Խոնարհագոյն, Բ. 5. Ա. 2. niedere, elementar, *élémentaire*, elementaris.

— ուսողութիւն, Ա. 2. niedere, elementäre Mathematik, *mathématiques élémentaires*, mathesis elementaris.

Խոտորնակութիւն, Բ. 75. Transversale, *ligne transversale*.

Խոտորնակ առանցք, Գ. 106. erste Achse, axis transversus.

Խոտորնակ համեմատութիւն, Ա. 252. verkehrte կամ indirekte Proportion, *proportion indirecte*, proportio inversa.

Խորանարդ, Բ. 245. Ա. 181. Würfel, Kubus, *cube*, *nombre cubique*, cubus.

Խորութիւն, Բ. 3. Tiefe, *profondeur*, profunditas.

Ծայր կամ գագաթն (երեքանկեան), Բ. 36. Spitze, *sommet*, *extrémité*, vertex.

Ծնանելի, Բ. 330. Generatir, beschreibende Linie, Erzeugungslinie, *génératrice*, generatrix.

Ծոց, Գ. 6. Sinus, *sinus*, sinus.

Ծոց ամբողջ, Գ. 10. Sinus totus, *sinus total*, sinus totus.

Ծոցակից, Գ. 7. Cosinus, *co-sinus*, cosinus.

Ծուռ, Բ. 16. schief, *oblique*, obliquus.

Ծուռ (սղոցած), Բ. 245. 247. (անկիւն), Բ. 16. ([illegible]), schief, *oblique*, obliquus.

Ծռանկիւն, Բ. 917. ([illegible], [illegible]), schiefwinklig, *obliquangle*, obliquangulus.

Կազմած (երկրաչափական), Բ. 24. Konstruktion, *construction*, constructio.

Կանոն, Ա. 270. Regel, *règle*, regula.

Կանոնաւոր, Բ. 27. ([illegible]), regulär, regelmäßig, *régulier*, regularis.

Կանոն զուգելոյ, Ա. 336. Alligationsregel, *règle d'alliage*.

Կանոն ընկերութեան, Ա. 284. Gesellschaftsregel, *règle de compagnie*, regula societatis.

Կատարումն, տես Բովանդակումն։

Կարկին, Բ. 11. Zirkel, *compas*.

Կարգ կամ շարք, Ա. 414. Reihe, *suite*. 2. Sisteme, *méthode*, *système*.

Կարգած, Բ. 29. Ordinate, *ordonnée*, *appliquée*, ordinata.

Կարգաւոր, Բ. 27. ([illegible]) (*Համրմին*), Բ. 244. regulär, regelmäßig, *régulier*, regularis.

Կարողութիւն, Ա. 54. Potenz, *puissance*, potentia.

Կենդրոն կամ միջավայր կամ միջոց, Բ. 28. ([illegible]), Centrum, Mittelpunkt, *centre*, centrum. *Զայս երկու անուանս ունիմք ի նախնեաց, որովք վարեցաք յուսողութեանս. մեզ լաւ թուի զերկուս միայն այս է [illegible] եւ [illegible] անուանել ի կիր, զկենդրոն վասն բոլորակի, իսկ զմիջավայր եւ վասն բոլորակի, եւ վասն միջին կիտի ուղիղ մինչ գծի. քանզի [illegible] ի Հայերէնն ասի եւ զայլ ինչ իրաց։ Թողումք ստորութեան հաստատել զերկուս ի սոցանէ։*

Կենդրոնական անկիւն, Բ. 30. ([illegible]), Centralwinkel, Mittelpunktswinkel, *angle central*, angulum ad centrum.

Կենդրոնական գիծ, Բ. 29. Centrallinie, *ligne centrale*.

Կենդրոնակից, Բ. 29. ([illegible]), Koncentrisch, *concentrique*.

Կերպարանաւոր թիւ. Ա. 426. figurirte Zahl, *nombre figuré*, numerus figuratus.

Կէս բոլորակ, Բ. 28. Halbkreis, *demi-cercle*, semicirculus.

Կէս երկակատուր, Բ. 28. ([illegible]), Halbmesser, Radius, *rayon*, *demi-diamètre*, semidiameter, radius.

Կէտ, Բ. 3. Punkt, *point*, punctum.

Կէտ կատարածի, Բ. 9. Endpunkt.

Կէտ սկզբան, Բ. 9. Anfangspunkt.

Կէտ հատանելոյ, Բ. 12. Durchschnittspunkt, *point d'intersection*.

Կէտ շօշափման կամ շօշափելոյ, Բ. 144. Berührungspunkt, *point de contact*.

Կիսագունդ, Բ. 331. Halbkugel, Hemisphäre, *hémisphère*, hemisphaerium.

Կից անկիւն, Բ. 16. Nebenwinkel, *angle adjacent*, *contigu*, *de côté*, *de contingence*, anguli deinceps positi.

Կշռեալ անկիւն, Բ. 23. korrespondirende Winkel, Gegenwinkel, angulus correspondens.

Կշիռ, Ա. 72. Maß, *mesure*, *diviseur*, *facteur*, divisor, *տես Չափ*։

Կշռութիւն, Ա. 243. Verhältniß, *rapport*, *raison*, ratio.

Կող, Բ. 231. Kante, Seitenlinie, Seite, *côté*, *arête*, latus.

Կողմն (գծին), Բ. 12. 26. } Seite,
— (*մարմնոյ*), Բ. 244. } *côté*, *carne*, latus.
— *կացեալ ի վերոյ*, Բ. 234. auffstehende Kante.

Կոճղ, Բ. 266. Trunkus, *tronc*.

Կոն, Բ. 321. ([illegible]), Kegel, *cône*, conus. *Զ[illegible] գատք վրիպակաւ մուծեալ ի Հայ լեզու եւ յամենայն գիրս առաջնոցն* Կոն *ասի, որ է ուղիղն*։

Կոնագիծ, Parabel, *parabole*.

Կոնաձեւ, Բ. 321. kegelförmig, *conique*, conicus.

Կոր, Բ. 9. krumm, *courbe*, curvus.

Կորագիծ, Բ. 26. krummlinig, *curviligne*, curvilineus.

Կոտոր, Ա. 100. ([illegible]), Bruch, *fraction*, fractio.

Կոտորեալ թիւ, Ա. 100. gebrochene Zahl, *fraction nombre rompu*, fractio.

Կտրուած, Բ. 207. Schnitt, *section*, sectio.

— անկիւնագծի, Բ. 246. Diagonalschnitt, sectio diagonalis.

Կրկնեալ, Ա. 250. duplicirt, *doublé*, duplicatus.

Հակառակ (քանակութիւն), Ա. 40. entgegengesetzte Größe, *quantité opposée*, quantitates oppositae կամ contrariae.

Համազգի, Ա. 9. gleichartig, homogen, *homogène*, homogeneus, similis.

Համաչափ, Բ. 27. symmetrisch, *symétrique*.

Համարիչ, Ա. 100. Zähler, *numérateur*, numerator.

Համարողական, Ա. 241. (կրշ-ռութիւն), arithmetisch, *arithmétique*, arithmeticus.

Համարողութիւն, Ա. 1. Arithmetik, Rechenkunst, *arithmétique*, arithmetica.

Համեմատական, Ա. 252. proportional, *proportionnel*, proportionalis.

— գիծ, Բ. 64. Proportionallinie, *ligne proportionelle*, linea proportionalis.

— թիւ, Ա. 252. Proportionalzahl, *nombre proportionnel*, numerus proportionalis.

— կարկին, Բ. 79. Proportionalzirkel, *compas proportionnel*.

Համեմատութիւն, Ա. 251. Proportion, *proportion*, proportio.

Համօրէն կամ Հասարակաց, Ա. 88. gemeinschaftlich, *commun*, communis.

Հանելի (թիւ), Ա. 14. ([illegible]), Subtrahendus, numerus subtrahendus.

Հանումն, Ա. 14. Subtraktion, *soustraction*, subtractio.

Հասարակաց օրինակաւ, Ա. 154. allgemein, *en général*.

Հասարակել, Բ. 52. halbiren, *partager en deux*.

Հաստատական, Ա. 41. ([illegible]), bejahend, positiv, additiv, *positif*, affirmativus, positivus.

Հաստատաչափութիւն, Բ. 5. Stereometrie, Körpermessung, körperliche Geometrie, Geometrie des Raumes, *stéréométrie*, stereometria.

Հաստատուն (արմատ), Ա. 183. rational, commensurabel, meßbar, *rationnel*, rationalis.

Հատած, Բ. 29. Abschnitt, Segment, *segment*, segmentum.

— բոլորակի, Բ. 29. Kreisabschnitt, Kreissegment, *segment de cercle*, segmentum circuli.

— կոնի, Գ. 79. Kegelschnitt, *section conique*, sectio conica.

Հատանել զմիմեանս (գծից), Բ. 12. schneiden, *se couper*, seco.

Հատանող, Բ. 12. ([illegible]), Sekante, *sécante*, secans.

Հարթ (երես), Բ. 13. ([illegible]), eben, *plan*, planum.

— անկիւն, Բ. 15. Flächenwinkel, Geradewinkel, angulus planus. 2. — անկիւն երեսաց, Flächenwinkel, (ի հաստատաչափութեան), *angle plane*.

Հարթաչափութիւն, Բ. 5. ([illegible]), Planimetrie, ebene Geometrie, Geometrie der Ebene, *planimétrie*, planimetria.

Հարթ բեկեալ, Բ. 12. eben gebrochen.

Հաւասար, Ա. 9. gleich, *égal*, aequalis.

Հաւասարակող կամ } Բ. 27.
Հաւասարակողմ, } gleichseitig, *équilatéral*, aequilaterus.

Յեւկղիդեայ երկրաչափութեան գտաւ թարգմանեալ Հաւասարակող.

Հաւասարանկիւն, Բ. 27. gleichwinklig, *isagone*, *équiangle*, aequiangulus

Հաւասարասրուն, Բ. 36. (ἰσοσκελής), gleichschenklig, *isocèle*, aequicrurus, isosceles.

Յեւկղիդեայ երկրաչափութեան գտայք թարգմանեալ հ——————ր——ր——ն բառ բուն մտաց aequicrurus անուան, վասն որոյ աւելորդ է այսուհետեւ ի կիր արկանել զանունդ ἰσοσκελής, զոր հնարեցին յետինք։

Հաւասար հեռաւոր, Բ. 22. (παράλληλος), parallel, *parallèle*, parallelus.

— բոլորակք. Բ. 331. kleinere կամ Parallelkreise, *parallèles*, circuli paralleles.

— ձեւ, Բ. 27. (παραλληλόγραμμον), Parallelogramm, *parallélogramme*, parallelogramum.

Հաւասարութիւն, Ա. 309. Gleichung, *équation*, equatio.

— առաջնոյ աստիճանի, Ա. 318. Gleichung des ersten Grades, *équation du premier degré*, equatio primi gradus.

— երկրորդ աստիճանի, Ա. 373. Gleichung des zweiten Grades կամ quadratische Gleichung, *équation du second degré*, equatio secundi gradus կամ quadratica.

— խառն երկրորդ աստիճանի, Ա. 373. unreine quadratische Gleichung, *équation mixte* կամ *complette du second degré*, equatio quadratica completa.

— պարզ երկրորդ աստիճանի, Ա. 373. reine quadratische Gleichung, *équation pure du second degré*, equatio quadratica pura.

— զուգութեան կամ նոյնութեան, Ա. 310. Identitäts-Gleichung, identische Gleichung, *équation d'identité*, equatio identitatem habere.

Հաւասար ուղղեալ, Բ. 22. gleich gerichtet,

Հեռադիր, Բ. 247. Apothem, *apothème*.

Հեռացեալ կամ մեկնօղ, Բ. 22. ([illegible]), divergirend, divergent, *divergent*, divergens.

Հեռաւորութիւն, Բ. 48. Abstand, Entfernung, *distance*.

Հնգանկիւն, Բ. 26. Fünfeck, Pentagon, *pentagone*, pentagonum.

Հնգանկիւնի, Բ. 108. fünfeckig, *pentagone*, pentagonum.

Հնգկողմեան (ձեւ), Բ. 26. fünfseitig, *pentagone*, pentagonum.

Հնգանիստ (մարմին), Բ. 244. fünfeckig, Pentaeder, *pentaèdre*, pentaedrum.

Հնգանկիւնի թիւ, Ա. 248. Pentagonalzahl, *nombre pentagone*, numerus pentagonalius.

Հնգետասանանկիւն, Բ. Fünfzehneck, Pentedekagon, *quindécagone*, quindecagonum.

Հնոց (կոնադծի . . .), Գ. 79. Brennpunkt, Fokus, *foyer*, focus.

Հորիզոնական, Բ. 23. horizontal, *horizontal*, horizontalis.

Ձեւ, Բ. 2. Figur, *figure*, figura.

Ձգական, Բ. 206. projektirend.

Ձգումն, Բ. 206. Projektion, *projection*.

Ղոգարիթմական, Ա. 297. logarithmisch, *logarithmique*, logarithmicus.

Ղոգարիթմոս, Ա. 297. Logarithmus, *logarithme*, logarithmus.

Լուդոլֆեան թիւ. Բ. 172. ludolfische Zahl.

Ճ*առագայթ*, Բ. 28. Radius, Halbmesser, *rayon, demi-diamètre*, radius.

Մ*աթեմատիկեան կամ մաթեմատիկական*, Ա. 7. mathematisch, *mathématique*.

Մ*ասնաւոր* (*արդիւնք, կոտոր, եւ այլն*), partial, *partiel*.

Մ*ասնաւոր կոտոր*, Ա. 149. Partialbruch, *fraction partielle*.

Մ*արմին*, Բ. 1. Körper, *solide, corps*, solidum, corpus.

Մ*եծ կամ մեծագոյն համօրէն* (*հասարակաց*) *կշիռ*, Ա. 88. größte gemeinschaftliche Theiler, *le plus grand diviseur commun*, maxima communis mensura.

Մ*եծագոյն առանցք*, Գ. 92. größere Achse, axis principalis *կամ* axis major.

— *բոլորակ կամ* **Մ***իջօրեայ*, Բ. 331. größere Kreis, Meridian, *méridien*.

— *հատուած*, Բ. Բ. 115. größere Segment, segmentum major.

Մ*եկնող կամ հեռացեալ*, Բ. 22. divergirend, divergent, *divergent*, divergens.

Մ*եքենական գիտութիւն*, Բ. 331. Mechanik, *mécanique*, mechanica.

Մ*երձաւորութիւն*, Ա. 161. Näherung, *approximation*.

Մ*երձեցեալ*, Բ. 22. konvergirend, konvergent, *convergent*, convergens.

Մ*երձեցուցեալ կամ խառն կամ գործական*, (փորձնական), Բ. 4. angewandt, praktisch, *appliqué, pratique*, applicatus.

Մ*իաբան*, *կամ համախօս*, Բ. 35. (համանուն), gleichnamig, homolog, *homologue*, homologus.

Մ*իանդամ*, Ա. 43. Monome, einnamige, incomplexe (Größen), *monôme*, (quantitas) monomia *կամ* incomplexa.

Մ*իլիոն*, Ա. 6. Million, *million*.

Մ*իութիւն*, Ա. 5. Einheit, *unité*, unitas.

— *գծի*, Բ. 175. Linealeinheit.

Մ*իջին համեմատական*, Ա. 252. mittlere Proportionalzahl, *moyenne proportionnelle*, medius terminus.

Մ*իջավայր կամ* **Մ***իջոց*, Centrum, Mittelpunkt, *centre*, centrum. *տես եւ* **Կ***ենդրոն*:

Մ*իջնորդ համարողութեան*, *կամ համարողական*, Ա. 290. arithmetische Mittel, *moyen arithmétique*.

Մ*իջօրեայ*, *տես* **Մ***եծագոյն բոլորակ*:

Մ*իտեալ*, Բ. 17. geneigt, *incliné*, inclinatus.

Մ*իտութիւն*, Բ. 16. Neigung, *inclinaison*, inclinatio.

Մ*իւսանգամ բազմացուցեալ*, Ա. 250. (ստորաբազմապատկեալ), submultiplicirt, *sous-multiplié*, submultiplicatus.

— *երեքկնեալ*, Ա. 250. (ստորեռապատկեալ), subtriplicirt, *sous-triple*, subtriplicatus.

— *կրկնեալ*, Ա. 250. (ստորկրկնապատկեալ), subduplicirt, *sous-double*, subduplicatus.

Մ*ղոն*, Ա. 30. Meile, *mille*.

Մ*նացորդ*, Ա. 24. Rest, *reste, résidu*, residuum. (*ի բաժանմանն*):

Մ*տացածին*, Ա. 196. imaginär, *imaginaire*, imaginarius.

Յ*ածած*, Բ. 103. *տես* **Ռ***ոմբոս*:

Յայտնիչ, Ա. 302. Karakteristik, Kennziffer, *caractéristique*, characteristica.

Յանդիմանակաց, Բ. 38. (Հակադիր), gegenüberliegend, *opposé*, oppositus.

Յապաւած, Գ. 79. Abscisse, *abscisse*, abscissa.

Յաջորդ, Ա. 243. (ի կշռութեան), Hinterglied, Consequent, Nachsatz, *conséquent*, consequens.

Յառաջաւորութիւն, Ա. 414. Progression, *progression*, progressio.

Յաւելլի, Ա. 12. Summand, Additionsposten, *partie*.

Յաւելուած, Ա. Mantissa, *mantisse*, mantissa.

Յաւելումն, Ա. 302. Addition, *addition*, additio.

Յեռեալ կանոն, Ա. 281. Kettenregel, *règle conjointe*.

Յեռեալ կոտոր, Ա. 147. Kettenbruch, *fraction continue*.

Յօդուածոյ, Ա. 43. (Բաղադրեալ), zusammengesetzt, componirt, vieltheilig, *composé*, *complexe*, complexus, compositus.

Յօդուածոյ համեմատութիւն, Ա. 262. zusammengesetzte Proportion, *proportion composée*, proportio composita.

Նախաւոր թիւ, Ա. 72. Primzahl, Stammzahl, einfache Zahl, *nombre premier*, *nombre simple*, numerus primus կամ simplex.

Ներքին, Ա. 252. Բ. innere, mittlere, *moyen*, *intérieur*, internus.

— անկիւն, Բ. 23. innere Winkel, *angle intérieur*, angulus internus.

— Հակառակ անկիւնք, Բ. 36. innere Gegenwinkel, anguli interni oppositi.

Ներքնաձիգ, Բ. 36. (Հակաձիգ), Hypothenuse, *hypothénuse*, hypothenusa.

Նման, Բ. 14. ähnlich, *semblable*, similis.

Նմանութիւն, Բ. 14. Ähnlichkeit, *similitude*, similitudo.

Նշան, Ա. 11. Zeichen, *signe*, signum.

Նշանագիր, Ա. 40. Buchstab, *lettre*, littera.

Նշանագրովք համարողութիւն, Ա. 2, Algebra, Buchstabenrechnung, Buchstabencalcül, *algèbre*, algebra, arithmetica generalis.

Նոնիոս կամ Վեռնիէր, Բ. 84. Nonius, Vernier.

Նուազ, Ա. 14. Minus, *moins*, minus.

Նուազելի թիւ, Ա. 14. (Փոքրելի), Minuend, numerus minuendus.

Նուազող, Ա. 59. abnehmend, fallend, *décroissant*, decrescens.

Շրջան կամ շրջումն, Ա. 132. Periode, *période*, periodus.

Շրջանակ, Բ. 2. (Շրջագիծ), Umfang, Perimeter, *périmètre*, *contour*, perimetrum.

Շրջապատ, Բ. 28. Kreislinie, Peripherie, *circonference*, *périphérie*, peripheria.

Շրջեալ զօրութիւն. Ա. 149. reducirter Werth, *valeur réduite*.

Շրջմանց յեռեալ կոտոր, Ա. 148. periodischer Kettenbruch, *fraction continue périodique*.

— տասներորդական կոտոր, Ա. 132. periodischer Decimalbruch, *fraction décimal continue* կամ *périodique*, fractiones decimales periodicae.

Շրջեալ ծոց. Գ. 7. Quersinus, Sinus versus, *sinus verse*, sinus versus.

Շրջեալ ծոցակից, Գ. 7, Quercosinus, Cosinus versus, *co-sinus verse*, **cosinus versus.**

Շօշափել (զծիր) զմիմեանս, Բ. 29. berühren, *toucher*, **tango.**

Շօշափօղ երեսք, Բ. 332. tangirende, berührende Ebene, *tangent*, **tangens.**

—, Բ. 29. Tangent, Berührungslinie, *tangente*, **tangens.**

— ի ներքոյ, Գ. 87, Subtangent, **subtangens.**

Ողջոյն թիւ, կամ ամբողջ թիւ, ganze Zahl, *nombre entier.*

Ողջութեան կամ ամբողջական հաշիւ, Ա. յոջ. Integralrechnung, *calcul intégral.*

Ոսկեղէն կանոն. Ա. 270. goldene Regel. **regula aurea.**

Ոտն, Բ. 206. Fußpunkt, Durchgang, *pied.*

Ութանկիւն, Բ. 160. Achteck, *octogone*, **octaedrum.**

Ութանիստ, Բ. 308. Oktaeder, *octaèdre*, **octaedrum.**

Ուղիղ, Բ. 9. gerad, (համեմատութիւն), Ա. 267, gerad կամ direkt, *direct*, **rectus.**

— անկիւն, Բ. 16. rechter Winkel, *angle droit*, **angulus rectus.**

— առնել զշրջապատն, Բ. 168. Rectification, *rectification.*

Ուղղագիծ, Բ. 26. geradlinig, *rectiligne*, **rectilineus.**

Ուղղաձիգ կամ գագաթան (գիծ), Բ. 23. (երեսք), Բ. 23. Vertikal, *vertical*, **verticalis.**

Ուղղանկիւն, Բ. 36 245. rechtwinklig, *rectangle*, *rectangulaire*, **rectangulus:** Իբր գոյ. 2. Բ. 103. Rechteck, Oblong, *oblong*, *rectangle*, **rectangulum.**

Ուղղեչ, Բ. 321. Richtungslinie, Directrix ,*directrice*. **directrix.**

Ուղղորդ, Բ. 17. senkrecht, lothrecht, normal, perpendikulär, *perpendiculaire*, *à plomb*, **perpendicularis.**

— գիծ, Բ. 17. (ուղղահայեաց), Normale, Senkrechte, Loth, Perpendikel, *perpendicule*, **perpendiculum.**

— (ի կոնագծի), Գ. 87, Normale, *normalis.*

— կամ ուղիղ (սղոցած), Բ. 245. 247. gerade, senkrecht, *droit*, **rectus.**

— (գիծ) ի ներքոյ, Գ. 78, Subnormale, **subnormalis.**

Ուղղութիւն, Բ. 5. Richtung, *direction*, **directio.**

Ուռուցեալ, Բ. 16. 28. Konkav, erhaben, *concave*, **concavus.**

Ուսողութիւն, Ա. 1. Mathematik, *mathématiques*, **mathesis.**

Ուրացական, Ա. 41. (բացասական), negativ, subtractiv, verneinend, *negatif*, **negativus.**

Չափ, Բ. 34. Maß, *mesure*, **mensura.** 2. տես քանիօնութիւն։

Չափելի, Բ. 66. meßbar, kommensurabel, *commensurable*, **commensurabilis.**

Չափումն, Բ. 3. Abmessung, Dimension, *dimension*, **dimensio.**

Չհաւասարակող, Բ. 36. 103. ungleichseitig, *scalène*, *inéquilatère*, **scalenus.**

Չհաւասար, Ա. 9. ungleich, *inégal*, **inaequalis.**

— ուղղեալ, Բ. 22. ungleich gerichtet.

Չորեքանիստ (անկիւն մարմնոյ). Բ. 331. 245. körperliches Viereck, *carré*, *quadrangulaire*, **angulus quadrangularius.**

— մարմին, Բ. 244. viereckig, Tetraeder, *tétraèdre*, **tetraedrum.**

Չորեքանկիւն, Բ. 26. Viereck,

quadrangle, quadrangulum, tetragonum.

Զորեքանկիւնաչափութիւն, Գ. 2. Tetragonometrie, *tétragonométrie*, tetragonometria.

Զորեքանկիւնի ձեւ, Բ. Viereck, *tétragone*, quadrangulum, tetragonum.

Զորեքին, Ա. 178. Quaternen, *quaterne*, quaternion.

Զորեքկողմեան (ձեւ), Բ. 26. vierseitig, *quadrilatère*, quadrilaterus.

— (անկիւն մարմնոյ, մարմին), Բ. 231. 245. vierkantig, *quadrangulaire*, quadrangularis, quadrilaterus.

Զորեքկուսի, Ա. 182. Բ. 103. Quadrat, *nombre carré*, quadratum. 2. Quadrat, regelmäßiges Viereck, *carré*, quadratum.

Զորրորդ, Ա. 100. Viertel, *quart*, quadrans.

— բոլորակի, Բ. 28. Viertelkreis, Quadrant, *quadrant de cercle*, quadrans.

— արմատ, Ա. 181. vierte Wurzel, *racine quatrième*, quarta radix.

— կարողութիւն, Ա. 181 vierte Potenz, *quatrième puissance* կամ *carré-carré* կամ *bi-carré*, quarta potentia.

Պաշտօնակիցք, Գ. 7. Cofunktionen, cofunctio.

Պաշտօնաւոր, Գ. 2. Funktion, fonction.

Պատշաճական, Բ. 14. Congruent, congruens.

Պատշաճականութիւն, Բ. 36. Congruenz.

Պարզ կամ սուրբ, Բ. 2. einfach, *simple*, pur.

— (ուսողութիւն), Ա. 2. reine (Mathematik), theoretisch, *(mathématiques) pures*, *théorique*, mathesis pura.

Պիւթագորեան կանոն կամ հրաման, Բ. 90. Pythagoräischer Satz.

Ռոմբոս, Բ. 103. ([illegible]), Rhombus, Raute, *losange*, rhombus.

Ռոմբոսակերպ, Բ. 103. Rhomboid, *rhomboïde*, rhomboides.

Սահմանաց հաշիւ, Ա. յոչ. Fluxionsrechnung, *méthode des fluxions*.

Սեղան, Բ. 27. ([illegible]), Trapez, *trapèze*, trapezium. Զանունդ *trapèze* դասանեմք սեղան թարգմանել, վասն որոյ չէք հարկ զայն անունդ [illegible] առնուլ այսուհետեւ ի կիր։

Սեղանակերպ, Բ. 27. ([illegible]) Trapezoid, *trapézoïde*, trapezoides. Զնոյն զոր վասն սեղանի ասացաք, զմանէ եւս ասելի է։

Սեպաձեւ բաժանած գնդոյ, Բ. 332. keilförmiger Kugelausschnitt.

Սղոցած, Բ. 244. ([illegible]), Prisma, *prisme*, prisma. Լաւ թուեցաւ մեզ առնուլ Սղոցած, զի այսպէս իսկ նշանակէ ի յոյն լեզու անունդ *prisme*. զոր եւ Արաբացիք նոյնպէս կոչեն [illegible], [illegible], որ է ասել ճշգրիտ Սղոցած։

Սուր (անկիւն), Բ. 17. spitz, *aigu*, acutus.

Սուրբ կամ պարզ (ուսողութիւն...) Բ. 4. rein, theoretisch, *pur*, *théorique*, purus.

Սովորական համարողութիւն, Ա. 1. Zifferrechnung, gemeine Rechenkunst, կամ Arithmetik, Zahlenlehre, *arithmétique*, arithmetica.

Ստիգմա, Ա. 7. Punkt, *point*, punctum. տես Կէտ։

Սրանկիւն, Բ. 36. spitzwinklig, *acutangle*, acutangulus.
Սրունք, Բ. 15. Schenkel, crurum.

Վայրկեան, Բ. 20. Ա. 32. (մանրաման), Minut, *minute*, minutum.
Վաթսներորդական, Բ. 30. sechsagesimal, sechzigtheilig.
Վեռնիէր, տես Նոնիոս:
Վեցանկիւն, Բ. 108. Sechseck, Hexagon, *hexagone*, hexagonum.
Վեցանիստ (մարմին), Բ. 244. sechseckig, Hexaeder, *hexaèdre*, hexaedrum.

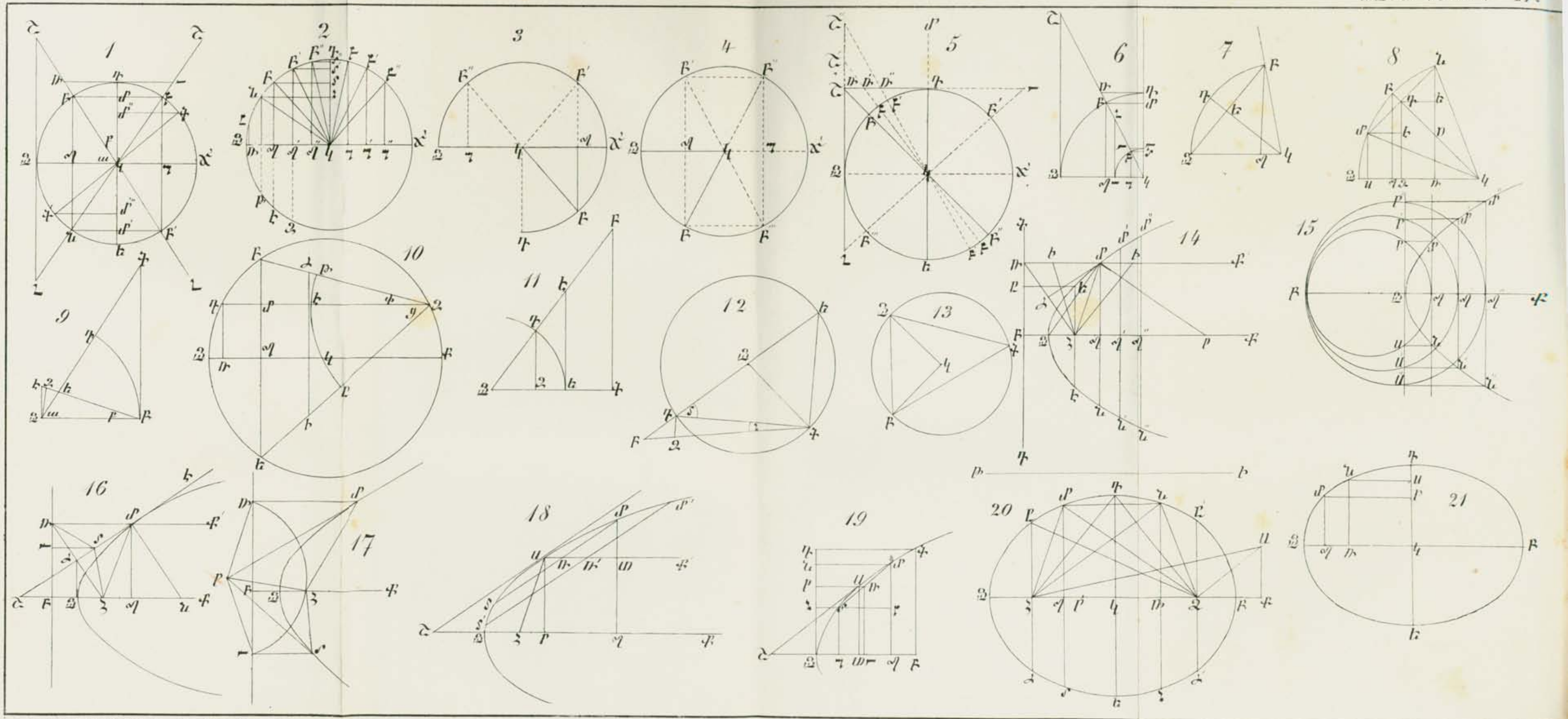
Տանելի ճառագայթ, Գ. 96. տես Բառնալի ճառագայթ:
Տասնանկիւն, Բ. 161. Zehneck, Dekagon, *décagone*, decagonum.
Տասներորդական, Բ. Decimal, zehntheilig, *décimal*, decimalis.
— կոտոր, Ա. 124. Decimalbruch, zehntheilige Brüche, *fraction décimale*, fractio decimalis.
Տասնկարգեան կամ տասներորդական (կարգ), Ա. 6. dekadisches System, Dekadik, *rang décimal*, decimalis.
Տարածութիւն կամ անջրպետութիւն երեսաց, Բ. 2. Flächeninhalt, Flächenraum, *aire*, area.
Տարածութիւն կամ անջրպետութիւն մարմնոյ, Բ. Körperinhalt.
Տարր, Բ. 54. Element.

Ցնորական, Ա. 196. (Երեւակայական), imaginär, *imaginaire*, imaginarius.
Ցուցիչ, Ա. Exponent, *exposant*, exponens.
Ցօղուն, Բ. *fuseau*.

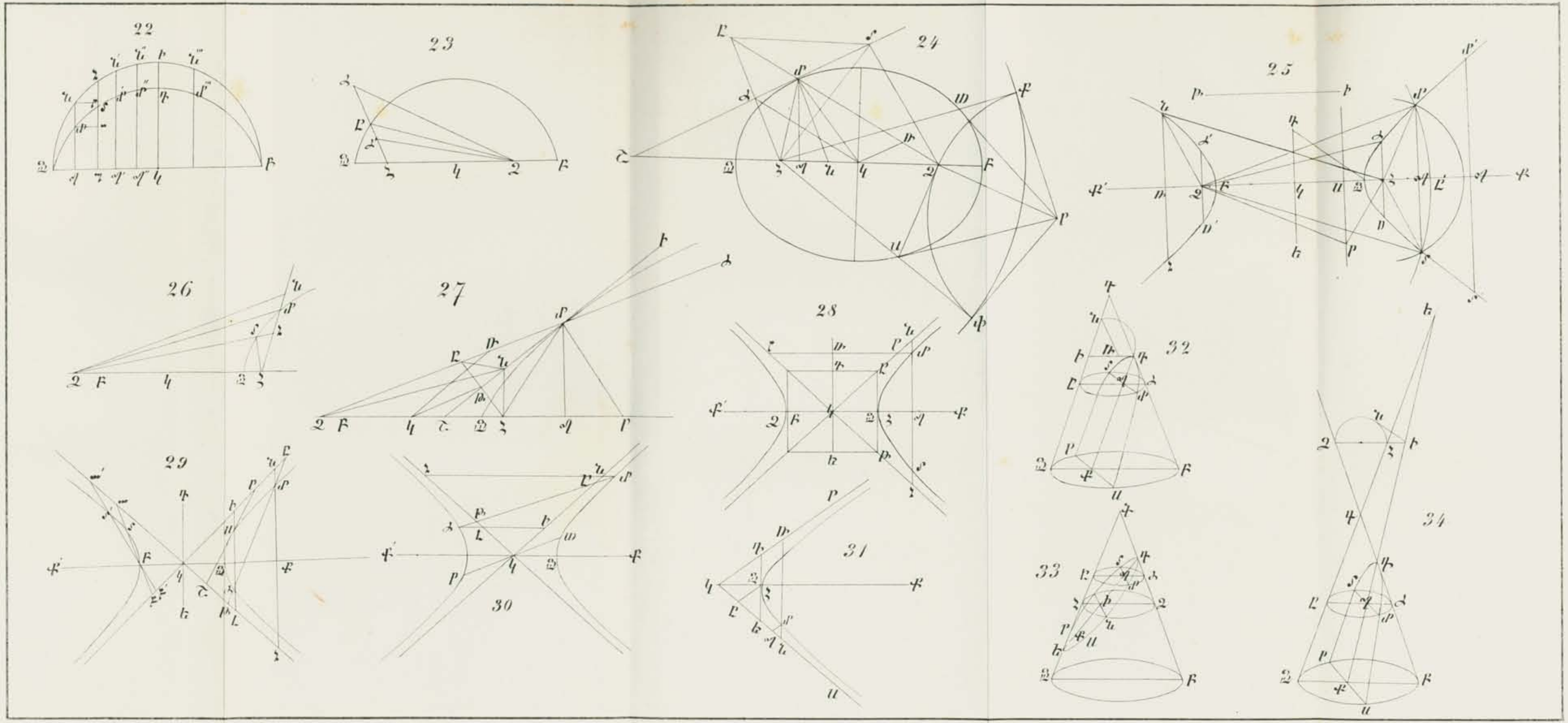
Փիւսիկեան, Ա. 2. physische, physikalisch, *physique*, physicalis. Թէպէտ եւ մարթեմք երկեամբ փոխանակ physicalis անուան վարել անուամբս Բնական, զոր օրինակ ասել Բնական գիտութիւն. բայց սակայն առ ի խարել ի մեւս բանէ որ է Naturalis, Հարկ է եւ զանունս փիւսիկեան, որ է ի նախնեաց՝ պահել. զի մի շփոթութիւն լինիցի. որպէս գիպի իսկ, յորժամ ասիցի, Բնական օրէնք, որ յերկուս միտս հարկանի, նոյնպէս Բնական գործիք, եւ այլք:
— ուսումն, փիղիսոփայութիւն, Ա. 2. Physik, *physique*, physica.
Փոխանակել, Ա. 343. Substitution, *substitution*, substitutio.
Փոխանակաւ անկիւն, } Բ. 23.
Փոփոխ անկիւն, } Wechselwinkel, *angle alterne*, anguli alterni.
Փոքրագոյն առանցք, Գ. 74. kleinere Achse, axis minor.
Փոքրագոյն հատած, Բ. 115. kleinere Segment, segmentum minor.
Փոքրկացեալ աստիճանք, Բ. 76. verjüngte Maßstab, *échelle de réduction*.

Քաներորդ, Ա. 23. (քանորդ), Quotient, Quotus, *quotient*, quotus.
Քանիօնութիւն, Ա. 1. Quantität, Größe, *quantité*, quantitas.
Քսանանիստ (մարմին), Բ. 313. Ikosaeder, *icosaèdre*, icosaedrum.

Օտարազգի, Ա. 9. ungleichartig, heterogen, *hétérogène*, dissimilis, heterogeneus.



Ի ՍՈՒՐՁՐ ՈՒՍՈՒՄՆՈՒ ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ



Ի ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ

Ի ՎԻԷՆՆԱ

Ի ՎԱՆՍ Գ· Ս· ԱՍՏՈՒԱԾԱԾՆԻ

1846