[illegible]

[illegible]

ՏԱՐԵՐՔ
ՉԱՓԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ

ՏԱՐԵՐՔ

ՁԱՓԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ

Ի ՊԷՏՍ ԱԶԳԱՅԻՆ ՎԱՐԺԱՐԱՆԱՑ

ՅՕՐԻՆԵԱՑ

Հ. ՀՄԱՅԵԱԿ Վ. ՊԱՊԻԿԵԱՆ

Ի ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ ՈՒԽՏԷՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՄԱՍՆ Ա.

Ի ՎԵՆԵՏԻԿ

Ի ՏՊԱՐԱՆԻ ՄԽԻԹԱՐԵԱՆՑ

1858

ՏԱՐԵՐՔ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ

ՆԱԽԱՇԱՒԻՂ

1. Երկրաչափութիւնն է գիտութիւն չափելոյ տարածութիւն:

2. Տարածութեան երրեակ գլխաւոր ուղղութիւնք են. երկայնութիւն, լայնութիւն, և բարձրութիւն կամ խորութիւն, որ և երեք չափմունք ասին:

3. Եթէ տարածութիւնն իցէ ըստ միում ևեթ չափման, ըստ երկայնութեան, ասի գիծ:

4. Եթէ տարածութիւնն իցէ ըստ երկուց ևեթ չափմանց, ըստ երկայնութեան և ըստ լայնութեան, ասի մակերևոյթ կամ մակերևութիւն:

5. Եթէ տարածութիւնն իցէ ըստ երից չափմանց միանգամայն, ըստ երկայնութեան, ըստ լայնութեան և ըստ բարձրութեան կամ ըստ խորութեան, ասի մարմին:

6. Գծից, մակերևութից և մարմնոց է առ միմեանս փոխանակաւ կցորդութիւն:

Մարմին է միջոց յամենայն կողմանց շուրջ փակեալ. սահմանք մարմնոյ են մակերևոյթք. սահմանք մակերևութի են գիծք. սահմանք գծի կոչին կէտ, ուրեմն կէտն չունի տարածութիւն:

7. Գիծք, մակերեւոյթք և մարմինք 'ի շարունակ շարժմանէ ծնանին :

Եթէ կէտ մի 'ի միջոցի ուրեք շարժիցի, տեղին ընդ որ անցանիցէ և հետքն զոր զկնի իւր թողուցու, է գիծ :

Եթէ գիծ մի 'ի միջոցի ուրեք շարժիցի, ոչ ըստ իւրում ուղղութեան, տեղին ընդ որ անցանիցէ և հետքն զոր զկնի իւր թողուցու, է մակերեւոյթ :

Եթէ մակերեւոյթ մի 'ի միջոցի ուրեք շարժիցի, ոչ ըստ իւրում ուղղութեան, տեղին ընդ որ անցանիցէ, և հետքն զոր զկնի իւր թողուցու, է մարմին :

8. Ասա ուրեմն յառաջեկոյս իմացեալ տեսանի եթէ զերիս ազգս տարածութեան 'ի քննին առնուցու երկրաչափութիւն. զգիծս, զմակերեւոյթս և զմարմինս, որով և յերիս մասունս բաժանիցի. յուսումն գծից, յուսումն մակերեւութից, և յուսումն մարմնոց : Բայց սակայն առ միմեանս փոխանակաւ կցորդութիւն գծից, մակերեւութից և մարմնոց հարկեցոյց զնախնեացս բաժանել զերկրաչափութիւն 'ի Տափարակ և 'ի Հաստատուն. առաջինն ճառէ զհանգամանաց գծից որ 'ի վերայ միոյ մակարդակի կայցեն, զձեւոյ մակարդակ մակերեւութից, և զչափս երկայնութեան և երեսաց նոցա, և կոչի Մակարդակաչափութիւն. երկրորդն ճառէ զհանգամանաց գծից և զմակերեւութից որ ոչ 'ի միում մակարդակի գտանիցին, զձեւոյ մարմնոց և զչափս երեսաց և տարածոցաց նոցա, և կոչի Հաստատաչափութիւն :

9. Այսչափ ինչ շատ համարեալ զենթակայէ և զբաժանմանց երկրաչափութեան, յաւելցուք համառօտ զբացատրութիւն անուանց յոլովակի յիշատակելոց յընթացս երկրաչափութեանս :

ա. Սահման կոչի առաջադրութիւնն՝ յորում խնդրի բնութիւն իրի կամ նշանակութիւն անուանն :

բ. Առած ասի յատուկ և վճիռ, որ առաջի առնէ զճշմարտութիւն ինքնին յայտնի :

գ. Խնդիր, յորում պահանջի հաւանել հնարաւորութեան աներկբայելի ինչ իրի :

դ. Հայեցողութիւն և Տեսութիւն, յորում առաջի դնի ճշմարտութիւն ինչ ցուցանելի ապացուցութեամբ :

Ե. Առաջարկութիւն կամ Առարկուած է երբ առեղծուած ինչ յորում խնդրի տալ զլուծումն :

Զ. Առածն յորջորջի առաջադրութիւն նախադասեալ հայեցողութեան կամ առաջարկութեան, որ 'ի պէտս է ապացուցութեան նոցին, և 'ունի յինքեան Ճշմարտութիւն՝ զոր հարկ է ցուցանել յառաջագոյն :

Է. Առաջադրութիւն կոչին հասարակաբար հայեցողութիւնք, առաջարկութիւնք և առմունք :

Ը. Հետևանք անուանի առաջադրութիւնն որ յայտնէ զՃշմարտութիւն անընդմիջաբար 'ի հայեցողութենէ կամ յառաջարկութենէ ելեալ :

Թ. Պարագայն և Ծանօթութիւն, որ յարի 'ի հայեցողութիւն կամ յառաջարկութիւն վասն առաւել բացայայտելոյ զնոսա, կամ առ 'ի պէտս ինչ 'ի կիր արկանել :

Ժ. Վարկած կամ Ենթադրութիւն է՝ այսպիսի ինչ կամ այնպիսի համարել զիմն թէ 'ի բացատրութեան առաջադրութեն իւրեք, և թէ յընթացս ապացուցութեան :

10. Առածք. — ա. Երկու քանակութիւնք որ հաւասար են միում երրորդի, հաւասար են և միմեանց :

բ. Հաւասար քանակութիւնք 'ի հաւասար քանակութիւնս յաւելեալ կամ 'ի հաւասարից բարձեալ, բովանդակութիւնքն կամ տարբերութիւնքն կան և մնան հաւասար :

գ. Հաւասար քանակութիւնք յանհաւասար քանակութիւնս յաւելեալ կամ յանհաւասարից բարձեալ, բովանդակութիւնքն կամ տարբերութիւնքն կան և մնան անհաւասար:

դ. Հաւասար քանակութիւնք բազմապատկեալ կամ բաժանեալ հաւասար քանակութեամբք, տան արտադրեալ կամ քանորդ հաւասար :

ե. Բոլորն մեծ է քան զիւրաքանչիւր մասն իւր, և հաւասար է համօրէն մասանց իւրոց միանգամայն առելոց :

զ. Քանակութիւնք, գիծ, մակերևոյթ և մարմին, եդեալ 'ի վերայ միմեանց՝ յորժամ պատկանիցին իրերաց ըստ ամենայն տարածութեան իւրեանց, են հաւասար :

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ

ՄԱԿԱՐԴԱԿԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՍԱՀՄԱՆՔ

11. *Կէտ նշան է որ ոչ ունի տարածութիւն, այսինքն որոյ ոչ գոյ չափումն :*

12. *Գիծ է տարածութիւն ըստ երկայնութեան, առանց լայնութեան և բարձրութեան. և բովանդակութիւն իւր յերկուս կէտս, որք ասին ծագք կամ ծայրք :*

13. *Ուղիղ գիծ է որ հարթ հաւասար ընդ մէջ ծագաց իւրոց ձգիցի. և կամ դարձեալ՝ ուղիղ գիծ է կարճագոյն գիծն որ 'ի մէջ երկուց կիտից անկանիցի :*

14. *Կոր գիծ է որ հարթ հաւասար ոչ ձգի ընդ մէջ ծագաց իւրոց, այլ յայսկոյս կամ յայն խոտորի յուղղութենէ նոցին. և կամ դարձեալ՝ կոր գիծ է քան զոր կարճագոյն գիծ մարթ է ձգել 'ի մէջ երկուց կիտից :*

15. *Գիծ՝ որ յուղղոյ յօդիցի, ասի ուղիղ բեկեալ. և եթէ 'ի կոր գծից յօդիցի, ասի կոր բեկեալ. իսկ եթէ յուղիղ և 'ի կոր գծից յօդիցի, ասի խառն :*

16. *Մակերևոյթ կամ մակերևութիւն է տարածութիւն ըստ երկայնութեան և ըստ լայնութեան, առանց բարձրութեան:*

17. *Մակարդակ է մակերևոյթ որ հարթ հաւասար ընդ մէջ սահմանաց իւրոց ձգիցի. և կամ դարձեալ մակարդակ է մակերևոյթ որոյ ամենայն մասանց ուղիղ գիծն յարմարի :*

18 · Ամենայն մակերևոյթ որ չէ մակարդակ, և ոչ յօդեալ 'ի մակարդակ մակերևութից, է կոր մակերևոյթ :

19 · Անկիւն է շեղութիւն երկուց ուղիղ գծից 'ի մի կէտ համարակաց (<)։ Երկու ուղիղ գիծքն ասին կողմունք կամ սրունք անկեան. իսկ համարակաց կէտն շեղութեան կամ ընդհատութեան, ասի գագաթն :

Անկիւնն նշանակի 'ի ձեռն երից տառից ԲԱԳ կամ ԳԱԲ, որոյ կողմունքն են ԱԲ և ԱԳ, և գագաթն է Ա։

Մեծութիւն անկեան չչափի յերկայնութենէ սրունիցն, այլ 'ի մտանելոյ 'ի միմեանս երկոցունց սրունից. և վասն այնորիկ այնչափ ինչ փոքրագոյն է անկիւնն, որչափ միանգամ սրունքն 'ի միմեանս մխեցին. և փոխադարձ :

Անկիւնք համգոյն այլոց քանակութեանց կարեն աճել և նուազել, բազմապատկիլ և բաժանիլ։

Որպէս անկիւնն ԵԲԳ (Ձև 2) է բովանդակութիւն ԵԲԴ և ԴԲԳ անկեանց. և անկիւնն ԵԲԴ է տարբերութիւն ԵԲԳ և ԴԲԳ անկեանց ;

20 · Եթէ ուղիղ գիծ ձգիցի 'ի վերայ այլում, առնէ ընդ նմա երկուս անկիւնս, որք ասին հետևորդ կամ յերջասար անկիւնք։

21 · Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցեն զմիմեանս, որ և է երկու անկիւնք, որ հակադրին միմեանց ըստ գագաթանց իւրեանց, ասին ընդդիմագագաթն անկիւնք :

22 · Եթէ ուղիղ գիծ անկանիցի 'ի վերայ այլում առանց ընդ կողմն ինչ խոտորելոյ և առնիցէ հաւասար զերկու մերձաւոր անկիւնսն, երկաքանչիւրքն ասին ուղիղ անկիւն (Ո) :

23 · Ամենայն անկիւն մեծ քան զուղիղ՝ կոչի բութ անկիւն, և փոքր քան զուղիղ՝ սուր անկիւն, և երկոքին միանգամայն ասին շեղ անկիւն :

24 · Եթէ ուղիղ գիծ անկեալ 'ի վերայ այլում առնիցէ ուղիղ անկիւն, գիծն այն կոչի ուղղահայեաց ($\perp$) այնմ գծի յորոյ վերայ անկեալ է. ապա թէ ոչ կոչի խոտորնակ կամ խոտորաձիգ ($\wedge$) :

25 · Երկու ուղիղ գիծք՝ որք գոլով 'ի միում մակարդակի հաւասարապէս հեռի լիցին 'ի միմեանց ըստ ամենայն համե-

մասնաւոր կիսոյ խորհրդոյ, այսին զուգահեռական (||), որք եթէ երկայնեսցին յամենայս յերկուց կողմանց չմերձին 'ի միմեանս ոչ յայս կոյս և ոչ յայն :

26 · Մակերևոյթ ձև է որ պարունակի 'ի գծից :

Ուղղագիծ է կամ բազմակող՝ եթէ պատեն զնա ուղիղ գիծք · կորագիծ՝ եթէ պատեն զնա կոր գիծք, և խառնագիծ՝ եթէ պատեն զնա ուղիղ և կոր գիծք : Գիծք որ պարագրեն զձևս, այսին կողք, և բովանդակութիւն նոցա շրջագիծ :

27 · Ի պարագրել զմակերևոյթ ձև գէթ երից ուղիղ գծից պէտք են :

Մակերևոյթ ձևք որք պատին յուղիղ գծից, այսին բազմանկիւնք · և 'ի նոցանէ որ զերիս ունին կողս, այսին եռանկիւն ($\triangle$) և որք չորս՝ այսին քառակողմ, և որ հինգ՝ հնգանկիւն, և որ վեց՝ վեցանկիւն, ևն :

28 · Հաւասարակող է եռանկիւն՝ որ հաւասար ունի զկողմն միմեանց · հաւասարասրուն՝ որ 'ի կողից երկուս միայն ունի հաւասարս · և անհաւասարակող՝ որ անհաւասար ունի զկողմն միմեանց :

29 · Ուղղանկիւն է եռանկիւն՝ որ ուղիղ ունի զանկիւն մի, և ստորաձիգ կամ հակուղիղ ասի կողմն հակադրեալ ուղիղ անկեան, իսկ կողմանքն որք զուղիղ անկիւնն 'ի միջի փակիցեն՝ ասին էջք · բթանկիւն՝ որ բութ ունի զանկիւն մի · և սրանկիւն՝ որ սուր ունի զանկիւնս :

30 · Մակերևոյթ ձևք որ չորս ունին կողս, կոյ 'ի նոցանէ քառակուսի՝ որ հաւասար ունի զկողս և ուղիղ զանկիւնս :

Երկայնաւոր կամ ուղղանկիւն՝ որ ուղիղ ունի զանկիւնս և անհաւասար զկողս :

Զուգահեռագիծ՝ որ զկողս ընդդէմ միմեանց ունի զուգահեռական :

Տարանկիւն՝ որ ունի կողս հաւասար և անկիւնս անուղիղս :

Տրամանկիւնային՝ որ ոչ զկողս ունի հաւասար և ոչ զանկիւնս ուղիղ :

Սեղան կամ տրապէզ՝ որ զերկուս կողս ընդդէմ միմեանց ունի զուգահեռական :

Սեղանաձեւն՝ որ ոչ զկողմն ունի զուգահեռական և ոչ զանկիւնն ուղիղ :

31․ Տրամանկիւն կամ անկիւնագիծ է գիծն որ կցէ զգագաթունս երկուց անմերձաւոր անկեանց :

32․ Հաւասարակողմն է բազմանկիւն, որ հաւասար ունի զկողմն միմեանց. և հաւասարանկիւն, որ հաւասար ունի զանկիւնսն միմեանց :

33․ Եթէ ուղիղ գիծ՝ անշարժ կացեալ ըստ միում ծայրի միւս ծայրին շրջան առեալ դառնայցէ անդրէն յառաջին կէտն յորմէ սկսաւ շարժիլ, տեղին ընդ որ անցանիցէ և հետքն զոր զկնի իւր թողուցու, ասի Բոլորակ. իսկ սահման բոլորակի, կոչի Շրջապատ կամ Շրջաբերութիւն, և իւրաքանչիւր մասն շրջապատի՝ Աղեղն :

34․ Կէտն յորում հաստատեալ կայ անշարժ ծայր ուղիղ գծին, կամ որ հաւասարապէս հեռի է յամենայն կիտից շրջապատին, կոչի Կեդրոն :

35․ Ուղիղ գիծք որ ելանեն 'ի կեդրոնէն և երթան 'ի շրջապատն, ասին Շառաւիղ: Ապա ուրեմն ըստ (34) համարոյ ամենայն շառաւիղք բոլորակի միոյ են հաւասար միմեանց :

36․ Ուղիղ գիծ որ ձգիցի 'ի միոյ կիտէ յայլ կէտ շրջապատին, ասի Լար. իսկ լար որ անցանիցէ ընդ կեդրոն բոլորակի և ձգիցի յերկուց կողմանց 'ի շրջապատն, ասի Տրամագիծ կամ Երկակտուր: Ամենայն տրամագիծ կրկնապատիկ է շառաւիղին, ապա ուրեմն ամենայն տրամագիծք միոյ բոլորակի են հաւասար միմեանց :

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ԱՆԿԵԱՆՑ ԵՒ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԳԾԻՑ

Առաջադրութիւնք :

37 · Հաւաստութիւն . — *Բովանդակութիւն երկուց մերձաւոր անկեանց հաւասար է երկուց ուղղոց :*

Ապացուցութիւն . — *Եթէ* (Ձև 1) ԱԲ *ուղղահայեաց իցէ առ* ԳԴ , *յայտ է եթէ*

ԳԱԲ=Ո ,

և

ԲԱԴ=Ո ,

հետևաբար

ԳԱԲ+ԲԱԴ=2Ո :

Ապա եթէ ԱԵ *խոտորնակ իցէ առ* ԳԴ , *անկանիցի* ԱԲ *ուղղահայեաց առ* ԳԴ *'ի կէտն* Ա , *յորմէ լինիցի*

ԳԱԵ=ԳԱԲ+ԲԱԵ=Ո+ԲԱԵ ,

և

ԵԱԴ=ԲԱԴ—ԲԱԵ=Ո—ԲԱԵ ,

ուստի

ԳԱԵ+ԵԱԴ=Ո+ԲԱԵ+Ո—ԲԱԵ=2Ո :

38 · Հաւաստութիւն . — *Եթէ 'ի մի* Բ *կէտ ուղիղ գծին* ԱԳ (Ձև 2) , *և 'ի վերայ միոյ կողման անկանիցին այլևայլ ուղիղ գիծք* ԴԲ , ԵԲ , ԶԲ , ԷԲ , . . . *բովանդակութիւն ամենայն անկեանց հաւասար է երկուց ուղղոց :*

Ապացուցութիւն . — *Քանզի*

ա+բ+գ=ԱԲԵ ,

և

ԲԳ

$$դ+ե=ԵԿԳ.$$

ապա ուրեմն

$$ա+բ+գ+դ+ե=ԱԲԵ+ԵԲԳ=2Ո \quad (37):$$

39. Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի կէտն Ա (Ձև 3) անկանիցին այլևայլ ուղիղ գիծք ԲԱ, ԳԱ, ԴԱ, ԵԱ, բովանդակութիւն ամենայն անկեանց որ 'ի նմա գտանիցին՝ հաւասար է չորից ուղղոց :

Ապացուցութիւն. — Երկայնեցի ԳԱ մինչև 'ի Զ, յորմէ և անկիւնն ԴԱԵ բաժանեցի յերկուս 'ի գ և 'ի դ : Արդ

$$դ+ե+ա=2Ո \quad (38),$$

և

$$բ+գ=2Ո \quad (37),$$

ուստի

$$դ+ե+ա+բ+գ=4Ո,$$

այսինքն

$$ԲԱԳ+ԳԱԴ+ԴԱԶ+ԶԱԵ+ԵԱԲ=4Ո :$$

40. Հայեցողութիւն. — Ընդգլխագագաթն անկիւնք հաւասար են միմեանց :

Ապացուցութիւն. — Հատանիցեն զմիմեանս ԲԳ, և ԴԵ յԱ (Ձև 4), յորմէ

$$ա+բ=2Ո \quad (37),$$

և

$$բ+գ=2Ո \quad (37),$$

վասն որոյ

$$ա+բ=բ+գ.$$

և 'ի հաւասարից բարձեալ զհաւասար անկիւնն բ, մնայ

$$ա=գ :$$

Նոյնպէս որոշեա

$$բ+գ=2Ո,$$

և

$$գ+դ=2Ո,$$

վասն որոյ

$$բ+գ=գ+դ,$$

ապա ուրեմն

Բ—Դ :

41. Ծանօթութիւն. — Առ 'ի գտանել զչափ մեծութեան անկեան պարտ է 'ի կշիռ համեմատութեան բերել զայն ընդ ուղիղ անկեան, կամ զուղիղ անկիւն իբրև զմիութիւն անկեան առնուլ: Սովորութիւն է երկրաչափից զուղիղ անկիւնն յ90 հաւասար մասունս բաժանել, զորս և աստիճան անուանեն, զիւրաքանչիւր աստիճան 'ի 60 հաւասար մասունս կամ մանրամասն, զիւրաքանչիւր մանրամասն 'ի 60 հաւասար մասունս կամ մանրերկրորդս, ևն.:

Աստիճանք, մանրամասունք, մանրերկրորդք բացատրին 'ի ձեռն նշանացս °, ′, ″, վասն որոյ 85° 56′ 45″ յայտ առնէ անկիւն մի 85 աստիճանաց, 56 մանրամասանց, և 45 մանրերկրորդաց:

Յասացելոցս իմացեալ տեսանի եթէ

ա. Բութ անկիւն մեծ է քան զ90° և փոքր է քան զ180°. սուր անկիւն փոքր է քան զ90°:

բ. Բովանդակութիւն երկուց մերձաւոր անկեանց է 180°:

գ. Բովանդակութիւն ամենայն անկեանց եղելոց 'ի միում կիտի և 'ի վերայ միոյ կողման ուղիղ գծի, է 180°:

դ. Բովանդակութիւն ամենայն անկեանց եղելոց 'ի միում կիտի, է 360°:

42. Ծանօթութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ և ԳԴ (Ձև 5) հատանիցին յերրորդ ուղիղ գծէ ԵԶ, 'ի կէտսն ընդհատութեան ծնանին ութ անկիւնք ա, բ, գ, դ, ե, զ, է, ը: Անկիւնքն գ, դ, ե, զ, որ կան 'ի մէջ հատեալ երկուց ուղիղ գծից, ասին ներքին անկիւնք. իսկ անկիւնքն ա, բ, է, ը, որ կան արտաքոյ, ասին արտաքին անկիւնք:

Անկիւն մի արտաքին և անկիւն մի ներքին որ կայցեն 'ի միում կողման հատանողին, ասին համակողմեան անկիւնք. որպէս ա և ե, բ և զ, գ և է, դ և ը են համակողմեան անկիւնք:

Երկու արտաքին անկիւնք, որպէս նաև երկու ներքին անկիւնք, որք 'ի վերայ երկու հակառակ կողմանց հատանողին կայցեն, ասին փոխադարձ անկիւնք. որպէս ա և ը, բ և է, գ և զ, դ և ե են փոխադարձ անկիւնք:

43. Հայեցողութիւն. — Ի զուգահեռական ուղիղ գիծս իւրաքանչիւր անկիւն հաւասար է իւրում համակողմեան ան-կեան:

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ իցէ ԱԲ ∥ ԳԴ (Ձև 6). քանզի որովհետև չափ անկեանց առեալ լինի 'ի բացատութենէ սրունից նոցին, և այս բացատութիւն առեալ լինի 'ի շեղութենէ սրունից առ միմեանս (19). իսկ արդ գիծքս ԱԲ և ԳԴ ունին զմիօրինակ բերումն առ հատանողն ԵԶ, եթէ զի զուգահեռական են, և զի բացատութիւնս այս են երկու համակողմեան անկիւնք, ապա և նոքին են հաւասար միմեանց. այսինքն են ա=ե, բ=զ, գ=է, դ=ը:

44. Հայեցողութիւն. — Ի զուգահեռական ուղիղ գիծս, բովանդակութիւն երկուց ներքին անկեանց, որ 'ի նմին կողման հատանողին կայցեն, է =2Ո:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև (Ձև 6)

ա=ե (43),

և

ա+գ=2Ո (37),

վասն որոյ

գ+ե=2Ո:

Նոյնպէս որովհետև

բ=զ,

և

բ+դ=2Ո,

վասն որոյ

դ+զ=2Ո:

45. Հայեցողութիւն. — Ի զուգահեռական ուղիղ գիծս, բովանդակութիւն երկուց արտաքին անկեանց որ 'ի նմին կողման հատանողին կայցեն, է =2Ո:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև (Ձև 6)

ա=ե (43),

և

ե+ը=2Ո (37).

վասն որոյ

ա+ը=2Ո:

Նոյնպէս որովհետև

բ = դ ,

և

դ + ը = 2Ո ,

վասն որոյ

բ + ը = 2Ո ։

46 · Հայեցողութիւն · — Ի զուգահեռական ուղիղ գծս ներքին փոխադարձ անկիւնքն են միմեանց հաւասար ։

Ապացուցութիւն · — Որովհետև (Ձև 6)

ա = է (43) ,

և

ա = ե (40) ,

ապա ուրեմն

ե = է ։

Նոյնպէս որովհետև

բ = դ ,

և

բ = զ ,

ապա ուրեմն

զ = դ ։

47 · Հայեցողութիւն · — Ի զուգահեռական ուղիղ գծս , արտաքին փոխադարձ անկիւնքն են միմեանց հաւասար ։

Ապացուցութիւն · — Որովհետև (Ձև 6)

ա = է (43) ,

և

է = ը (40) ,

ապա ուրեմն

ա = ը ։

Նոյնպէս որովհետև

բ = դ ,

և

դ = է ,

ապա ուրեմն

բ = է ։

48 · Հայեցողութիւն · — Ի զուգահեռական ուղիղ գծս ,

բովանդակութիւն արտաքին և փոխադարձ ներքին անկեանց է $=2Ո$ ։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև (Ձև 6)

$$ա=ե \quad (45),$$

և

$$ե+դ=2Ո \quad (37),$$

ապա ուրեմն

$$ա+դ=2Ո ։$$

Նոյնպէս և

$$բ+ե=2Ո,$$
$$է+զ=2Ո,$$
$$ը+գ=2Ո ։$$

49. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցին յերրորդ ուղիղ գծէ, երկոքին գիծքն զուգահեռական են, եթէ համակողման անկիւնքն իցեն հաւասար միմեանց ։

Ապացուցութիւն ։ — Իցէ $ա=ե$. հետևաբար ուղիղ գիծքս ԱԲ և ԳԴ (Ձև 6) ունին զմիօրինակ բերումն առ. հատանողն ԵԶ, որ անհնարին էր եթէ ԱԲ և ԳԴ չէին նոյին ուղղութեամբ, այսինքն զուգահեռական ։

50. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցին յերրորդ ուղիղ գծէ, երկոքին գիծքն զուգահեռական են, եթէ փոխադարձ անկիւնքն իցեն հաւասար միմեանց ։

Ապացուցութիւն. — Իցէ $ա=ը$ (Ձև 6). հետևաբար նաև $ե=ը$ (40), և $ա=ե$ (43). յորմէ և ԱԲ || ԳԴ ըստ նախընթաց հայեցողութեան ։

51. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցին յերրորդ ուղիղ գծէ, երկոքին գիծքն զուգահեռական են, եթէ բովանդակութիւն ներքին կամ արտաքին անկեանց որ կան 'ի միում կողման հատանողին իցեն $=2Ո$ ։

Ապացուցութիւն. — Իցէ $գ+ե=2Ո$ (Ձև 6). այլ քանզի և $ա+գ=2Ո$ (37), ուրեմն $գ+ե=ա+գ$. և 'ի հաւասարից բարձեալ զհաւասար անկիւնն գ, մնայ $ե=ա$. ուստի ԱԲ || ԳԴ ըստ նախընթաց հայեցողութեան ։

Նոյնպէս իցէ $ա+է=2Ո$. այլ քանզի և $ե+է=2Ո$, ուրեմն $ա+է=ե+է$, և $ա=ե$. ուստի ԱԲ || ԳԴ ։

32. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցին յերրորդ ուղիղ գծէ, և բովանդակութիւն երկու ներքին անկեանց՝ որ կայցեն 'ի միում կողման հատանողին փոքր իցէ քան զերկուս ուղիղս, յայնժամ մերձենան 'ի միմեանս ուղիղ գիծքն այնուքիկ յայնմ կուսէ, յորում կողման կան անկիւնքն այնուքիկ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ա+բ<2Ո (Ձև 7) հարկ 'ի վերայ կայ երկոքին գծիցն ԱԲ և ԳԴ մատչելով առ միմեանս յառաջակողմն կոյս, որով և ոչ զուգահեռական են. ապա թէ ոչ պարտ էր լինել ա+բ=2Ո (44), որ է հակառակ մերումն վարկածի: Ուրեմն մնայ ցուցանել եթէ ԱԲ և ԳԴ մերձենան 'ի միմեանս ըստ Բ և Դ ուղղութեան: Որովհետև բովանդակութիւն չորից ներքին անկեանց ա, բ, դ, ԱՏՐ է հաւասար 4Ո, և ա+բ<2Ո, ուրեմն և ԱՏՐ+դ>2Ո: Համարեսցի բարձեալ յանկիւնէն ԱՏՐ մասն ԱՏԵ, և իցէ գ+դ=2Ո (44) յորժամ ԵՏ || ԳԴ: Արդ ըստ Ա ուղղութեան ուղիղ գիծն ԲԱ խառնի յուղիղ գծէն ԵՏ, որով խառնի նաև յուղիղ գծէն ԳԴ, որ է զուգահեռական առ ԵՏ, ապա հարկ է զի ԱԲ և ԳԴ ըստ Բ և Դ ուղղութեան առ միմեանս մատչիցին:

33. Հայեցողութիւն. — Ընդ մի կէտ մարթ է մի և եթ զուգահեռական գիծ ձգել այլում առեալ ուղիղ գծի:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցի ընդ կէտն Ա (Ձև 8) ուղիղ գիծն ԴԵ || ԲԳ, և դիցուք եթէ իցէ ևս ԶԻ || ԲԳ. խորև անկանեսցի հատանողն ԱԸ ընդ Ա, որովհետև ԴԵ || ԲԳ, յայնժամ ա=գ+դ (46): Արդ եթէ լինէր ԶԻ || ԲԳ, հարկ 'ի վերայ կայր լինել ա=գ (46), ուստի և լինէր գ=գ+դ. այսինքն մասն հաւասար բոլորին, որ է անհնարին:

34. Հայեցողութիւն. — Եթէ մի յերկուց զուգահեռական ուղիղ գծից իցէ ուղղահայեաց առ երրորդ իմն ուղիղ գիծ, յայնժամ և միւսն ևս է ուղղահայեաց:

Ապացուցութիւն. — Իցէ (Ձև 9) ԱԲ || ԳԴ և ԱԲ⊥ԵԶ, հարկ 'ի վերայ կայ լինել և ԳԴ⊥ԵԶ: Որովհետև ԱԲ || ԳԴ, ուրեմն ա=բ (45). և դարձեալ՝ որովհետև ԱԲ⊥ԵԶ, ուրեմն ա=Ո, ուստի և բ=Ո, յորժամ ԳԴ⊥ԵԶ:

35. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք ուղղա-

հայեաց իցեն առ երրորդ մի ուղիղ գիծ, են միմեանց զուգահեռական :

Ապացուցութիւն. — Իցէ (Ձև 9) ԱԲ⊥ԵԶ և ԳԴ⊥ԵԶ, հարկ 'ի վերայ կայ լինել ԱԲ || ԳԴ : Որովհետև ԱԲ⊥ԵԶ, ուրեմն ա=Ո . և դարձեալ՝ որովհետև ԳԴ⊥ԵԶ, ուրեմն բ=Ո, ուստի ա=բ, և հետևաբար ԱԲ || ԳԴ :

36 . Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու ուղիղ գիծք զուգահեռական իցեն երրորդ մի ուղիղ գծի, են միմեանց զուգահեռական :

Ապացուցութիւն. — Իցէ (Ձև 10) ԱԲ || ԵԶ և ԳԴ || ԵԶ, հարկ 'ի վերայ կայ լինել և ԱԲ || ԳԴ : Որովհետև ԱԲ || ԵԶ, ուրեմն ա=գ (45) . և դարձեալ՝ որովհետև ԳԴ || ԵԶ, ուրեմն բ=գ (45), ուստի և ա=բ, ապա և ԱԲ || ԳԴ :

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ ԵՒ ՊԱՏՇԱՃԱԿԱՆՈՒԹԵԱՆ ՆՈՑԻՆ

Առաջադրութիւնք :

37 · Հայեցողութիւն . — *Յամենայն եռանկիւնս բովանդակութիւն երից անկեանց հաւասար է երկուց ուղղոց :*

Ապացուցութիւն . — *Ընդ գագաթն Ա եռանկեանն ԱԲԳ ձգեսցի ուղիղ գիծն ԴԵ (Ձև 11) զուգահեռական հակադրեալ կողման ԲԳ : Արդ*

դ=բ (46) ,

և

ե=գ (46) ,

ուստի

դ+ա+ե=բ+ա+գ ·

և քանզի

դ+ա+ե=2Ո (38) ,

ապա ուրեմն և

բ+ա+գ=2Ո :

Հետևանք Ա . — *Յամենայն եռանկիւնս բովանդակութիւն երկուց անկեանց փոքրագոյն է միշտ քան զ2Ո · զի որովհետև բովանդակութիւն երից անկեանց միանգամայն հաւասար է 2Ո ,*

Հետևանք Բ . — *Ապա ուրեմն 'ի միում եռանկեան մարթի լինել միոյ ևեթ ուղիղ անկեան կամ միոյ ևեթ բութ անկեան . քանզի եթէ 'ի միում եռանկեան երկու ուղիղ անկիւնք իցեն կամ երկու բութ անկիւնք , և կամ մի ուղիղ և մի* բուն միանգամայն, բովանդակութիւն նոցա մեծագոյն լինէր քան զ2Ո. ապա յամենայն եռանկիւնս գոնեա երկու սուր անկիւնք պարտին լինել:

Հետեւանք Գ. — Եթէ 'ի միում եռանկեան բովանդակութիւն երկուց անկեանցն իցէ =Ո, եռանկիւնն այն ուղղանկիւն է. եթէ բովանդակութիւն երկուց անկեանցն իցէ <Ո, եռանկիւնն այն բթանկիւն է. և եթէ բովանդակութիւն երկուց անկեանցն իցէ >Ո, եռանկիւնն այն սրանկիւն է:

Հետեւանք Դ. — Ծանուցեալ զչափ երկուց անկեանց, գտանեմք և զչափ երրորդին:

Հետեւանք Ե. — Վասն որոյ եթէ բովանդակութիւն երկուց անկեանց եռանկեան միոջ հաւասար իցէ բովանդակութեան երկուց անկեանց այլում, երրորդ անկիւնն ևս միոյն հաւասար է երրորդ անկեան միւսոյն. և եթէ երկու եռանկեանց մի անկիւնն հաւասար իցէ, յայնժամ բովանդակութիւն երկուց անկեանցն մնացելոց յերկոսին ևս եռանկիւնսն հաւասար է:

Հետեւանք Զ. — Եթէ 'ի միում եռանկեան մի անկիւնն հաւասար իցէ բովանդակութեան երկուց անկեանցն մնացելոց, անկիւնն այն է ուղիղ. քանզի է կէս բովանդակութեան երից անկեանց եռանկեան, այսինքն է կէս երկուց ուղղոց:

38. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկայնեսցի կողմն ԲԳ եռանկեանն ԱԲԳ (Ձև 12), արտաքին անկիւնն ԱԳԴ հաւասար է բովանդակութեան երկուց հակադրեալ ներքին անկեանց. այսինքն ԱԳԴ=ԱԲԳ+ԲԱԳ, և կամ դ=ա+բ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ա+բ+գ=2Ո (37),

և

գ+դ=2Ո (37),

ուստի

գ+դ=ա+բ+գ,

ուրեմն 'ի հաւասարից բարձեալ զհաւասար անկիւնն գ, մնայ

դ=ա+բ:

Հետեւանք. — Վասն որոյ արտաքին անկիւն եռանկեան միոջ մեծագոյն է քան զմի մի ներքին հակադրեալ անկիւն:

59. *Հայեցողութիւն.* — Եթէ երկայնեսցի իւրաքանչիւր կողմն եռանկեան միոջ, բովանդակութիւն արտաքին երից անկեանց հաւասար է 4Ո:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև (Ձև 13) ըստ (58) համարոյ

մ=բ+գ,

նոյնպէս

ն=ա+գ,

և

օ=ա+բ,

ուստի

մ+ն+օ=բ+գ+ա+գ+ա+բ
=2ա+2բ+2գ,
=2(ա+բ+գ),

և քանզի

ա+բ+գ=2Ո. (57),

ապա ուրեմն

մ+ն+օ=2·2Ո=4Ո:

60. *Հայեցողութիւն.* — Բովանդակութիւն ամենայն անկեանց բազմանկեան հաւասար է երկպատիկ այնչափ ինչ ուղիղ անկեանց, որչափ կողմանս ունիցի բազմանկիւնն, նուազ չորիւք ուղիղ անկեամբք:

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ բազմանկիւնն ն կողմեան (Ձև 14) բաժանիցի անկիւնագծիւք յեռանկիւնս. թիւ համարոյ եռանկեանցն է ն—2: Ի միում միում եռանկեան՝ բովանդակութիւն անկեանց հաւասար է երկուց ուղղոց (57). ուրեմն բովանդակութիւն անկեանց ամենայն եռանկեանց =(ն—2)2Ո կամ ն2Ո—4Ո: Այլ որովհետև բովանդակութիւն անկեանց եռանկեանցս այսոցիկ հաւասար է բովանդակութեան անկեանց բազմանկեանն, ուրեմն անկիւնք ն կողմեան բազմանկեանն են =ն2Ո—4Ո:

Հետևանք Ա. — Բովանդակութիւն ամենայն անկեանց

եռանկեան =3·2Ո—4Ո=2Ո=180° (57)
քառանկեան =4·2Ո—4Ո=4Ո=360°
հնգանկեան =5·2Ո—4Ո=6Ո=540°
վեցանկեան =6·2Ո—4Ո=8Ո=720°

եօթնանկեան $=7 \cdot 2Ո-4Ո=10Ո= 900^\circ$

ութանկեան $=8 \cdot 2Ո-4Ո=12Ո=1080^\circ$

եւ. եւ :

Հետեւանք Բ. — Եթէ բազմանկիւնին հաւասարանկիւն լինի, յայնժամ հարկ է զի իւրաքանչիւր անկիւն լինի ներրորդ մասն բովանդակութեան ամենայն անկեանց, այսինքն $=\frac{Ն2Ո-4Ո}{Ն}=2Ո-\frac{4Ո}{Ն}=180^\circ-\frac{360^\circ}{Ն}$, եթէ Ն կողմանք լինեն բազմանկեանն : Ուստի իւրաքանչիւր անկիւն հաւասարանկիւն

եռանկեան $=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$

քառանկեան $=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$

հնգանկեան $=\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$

վեցանկեան $=\frac{720^\circ}{6}=120^\circ$

եօթնանկեան $=\frac{900^\circ}{7}=\left(128\frac{4}{7}\right)^\circ$

ութանկեան $=\frac{1080^\circ}{8}=135^\circ$

եւ. եւ :

61. Հայեցողութիւն. — Յամենայն բազմանկիւնս բովանդակութիւն ամենայն արտաքին անկեանց, որք ծագիցին յերկայնելոյ կողմանց բազմանկեանն, հաւասար է չորից ուղղոց :

Ապացուցութիւն. — Որովհետեւ ըստ (60) համարոյ բովանդակութիւն ամենայն անկեանցն կողմեան բազմանկեան (Ձև 14) զոր Բ քանակութեամբ նշանակեսցուք, է $=Ն2Ո-4Ո=Բ$, ուստի $Բ+4Ո=Ն2Ո$. եւ դարձեալ քանզի մի մի անկիւն բազմանկեանն հանդերձ իւրով մերձաւոր անկեամբ է $=2Ո$, ուրեմն եթէ Ք զբովանդակութիւն արտաքին անկեանցն նշանակիցէ, լինիցի $Բ+Ք=Ն2Ո$: Յորոց իմացեալ տեսանի եթէ $Բ+Ք=Բ+4Ո$, ուստի $Ք=4Ո$:

Այս հոյեցուցութիւն ճշմարտի վասն բազմանկեանց, ո-րոց բովանդակ անկիւնք շրջանակին բարձրացեալ լիցին:

62. Ծանօթութիւն. — Եռանկիւնք որք յամենայն արտաքին նշանակս իւրեանց այնպէս իմն միմեանց միաբան գտանիցին, որպէս զի մարթ լիցէ զնոսա յայլեայլ տեղիս եւեթ կամ յայլեայլ ժամանակս միայն զանազանել, տին միմեանց պարգաճա-ջանք, և բացատրին 'ի ձեւն նշանիս (≅):

Որպէս 'ի ցուցանել եթէ եռանկիւնն ԱԲԳ. պատշաճա-կան է եռանկեանն ԴԵԶ, գրի ΔԱԲԳ≅ΔԴԵԶ:

Այս ուրեմն 'ի պատշաճական եռանկիւնս ամենայն կող-մանքն և ամենայն անկիւնքն հաւասար են միմեանց փոխանա-կաւ, և յանդիման հաւասար կողմանց կան հաւասար ան-կիւնք, և 'ի մէջ հաւասար կողմանց կան հաւասար անկիւնք, և 'ի մէջ հաւասար անկեանց կան հաւասար կողմանք:

63. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկուց ԱԲԳ. և ԴԵԶ (Ձև 15) եռանկեանց երկու անկիւնքն և մի կողմն որ լիցէ 'ի միջի անկեանցն այնոցիկ փոխանակաւ հաւասարք լիցին մի-մեանց, երկոքին եռանկիւնքն միմեանց պատշաճականք են. այսինքն եթէ լիցէ ԱԲԳ.=ԴԵԶ, և ԱԳԲ=ԴԶԵ. կամ ԱԲԳ=ԴԵԶ, և ԲԱԳ=ԵԴԶ. կամ ԱԳԲ=ԴԶԵ, և ԲԱԳ =ԵԴԶ. և ԲԳ=ԵԶ, յայնժամ ΔԱԲԳ≅ΔԴԵԶ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև երկու անկիւնք եռանկեան միոյ հաւասար են երկուց անկեանց այլում, երրորդ անկիւնն ևս միոյն հաւասար է երրորդ անկեան միւսոյն (57. Հետև. Ե). ուրեմն երեք անկիւնք եռանկեան միոյ հաւասար են երեք անկեանց այլում: Արդ զմտաւ ածիցուք եթէ եռանկիւնն ԱԲԳ. այնպէս իմն եդեալ կայցէ 'ի վերայ եռանկեանն ԴԵԶ, որպէս զի կէտն Բ անկանիցի 'ի կէտն Ե, և կողմն ԲԳ 'ի վե-րայ կողմանն ԵԶ. և քանզի ԲԳ=ԵԶ, ապա կէտն Գ անկա-նիցի 'ի կէտն Զ: Եւ որովհետև անկիւնն ԱԲԳ=ԴԵԶ, ուրեմն հարկ է զի կողմն ԲԱ անկանիցի 'ի վերայ ուղղութեան ԵԴ, վասն այնորիկ և կէտն Ա անկանիցի 'ի վերայ ուղիղ գծին ԵԴ. Նոյնպէս որովհետև անկիւնն ԱԳԲ=ԴԶԵ, ուրեմն հարկ է զի կողմն ԳԱ անկանիցի 'ի վերայ ուղղութեան ԶԴ, վասն այնորիկ և կէտն Ա անկանիցի 'ի վերայ ուղիղ գծին

ԶԴ. և քանզի կէտն Ա կայ եթէ 'ի վերայ ուղիղ գծին ԵԴ և եթէ 'ի վերայ ուղիղ գծին ԶԴ միանգամայն, ուստի 'ի կէտն հատանելոյ զմիմեանս երկուց ուղիղ գծիցն այնոցիկ կայցէ, այսինքն 'ի Դ: Արդ ուրեմն եռանկիւնքս այսոքիկ պատկանին միմեանց փոխանակաւ, վասն այնորիկ և պատշաճականք են:

64. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկուց ԱԲԳ և ԴԵԶ (Ձև 15) եռանկեանց երկու կողմունքն և անկիւնքն որ 'ի միջի նոցա կայցեն, միմեանց հաւասարք լիցին, եռանկիւնքն այնոքիկ միմեանց պատշաճականք են. այսինքն եթէ լիցէ ԱԲ=ԴԵ, ԲԳ=ԵԶ, և ԱԲԳ=ԴԵԶ, յայնժամ △ԱԲԳ≅△ԴԵԶ:

Ապացուցութիւն. — Զմտաւ ածիցուք եթէ եռանկիւնն ԱԲԳ այնպէս իմն եղեալ կայցէ 'ի վերայ եռանկեանն ԴԵԶ, որպէս զի կէտն Ա անկանիցի 'ի կէտն Դ, և կողմն ԱԲ 'ի վերայ կողմանն ԴԵ, այսու և կէտն Բ անկանիցի 'ի կէտն Ե, քանզի ԱԲ=ԴԵ: Որովհետև անկիւնն ԱԲԳ=ԴԵԶ, ուրեմն հարկ է զի կողմն ԲԳ անկանիցի 'ի վերայ ուղղութեան ԵԶ, վասն այնորիկ և կէտն Գ անկանիցի 'ի կէտն Զ, քանզի ԲԳ=ԵԶ: Արդ որովհետև կայ Ա 'ի Դ, Գ 'ի Զ, ուստի և կողմն ԱԳ անկանիցի 'ի վերայ կողմանն ԴԶ (13). ապա ուրեմն եռանկիւնքս այսոքիկ պատկանին միմեանց փոխանակաւ, վասն այնորիկ և պատշաճականք են:

65. Հայեցողութիւն. — Երկու եռանկիւնք ԱԲԳ և ԴԵԶ (Ձև 16) միմեանց պատշաճականք են եթէ երեք կողմունք միոյն երից կողմանց միւսոյն փոխանակաւ հաւասարք լիցին. այսինքն եթէ լիցէ ԱԲ=ԴԵ, ԲԳ=ԵԶ, և ԱԳ=ԴԶ, յայնժամ △ԱԲԳ≅△ԴԵԶ:

Ապացուցութիւն. — Զմտաւ ածիցուք եթէ եռանկիւնն ԱԲԳ այնպէս իմն եղեալ կայցէ 'ի վերայ եռանկեանն ԴԵԶ, որպէս զի կէտն Բ անկանիցի 'ի կէտն Ե, և կողմն ԲԳ 'ի վերայ կողմանն ԵԶ, այսու և կէտն Գ անկանիցի 'ի կէտն Զ, քանզի ԲԳ=ԵԶ: Որովհետև ԲԱ=ԵԴ, և կէտն Բ անկանի 'ի կէտն Ե, վասն այնորիկ և կէտն Ա անկանիցի 'ի վերայ աղեղանն ԷԸ ձգելոյ 'ի կեդրոնէն Ե շառաւիղաւ ԵԴ=ԲԱ: Նոյնպէս որովհետև ԳԱ=ԶԴ, և կէտն Գ անկանի 'ի կէտն

Զ. վասն այնորիկ և կէտն Ա անկանիցի 'ի վերայ աղեղանն Թժ. ձգելոյ 'ի կեդրոնէն Զ շառաւիղաւ ԶԴ=ԳԱ. և քանզի կէտն Ա կայ ևեթէ 'ի վերայ աղեղանն ԽԸ և ևեթէ 'ի վերայ աղեղանն Թժ միանգամայն, ուստի 'ի կէտն հատանելոյ զմիմեանս երկուց աղեղանցն այնոցիկ կայցէ, այսինքն 'ի Գ. վասն այնորիկ կողմն ԲԱ անկանիցի 'ի վերայ կողման ԵԴ և կողմն ԳԱ 'ի վերայ կողման ԶԴ: Ապա ուրեմն եռանկիւնքս այսոքիկ պատկանին միմեանց փոխանակաւ, վասն այնորիկ և պատշաճականք են:

66. Հայեցողութիւն. — Ցորում և իցէ հաւասարասրուն եռանկեան ԱԲԳ (Ձև 17), յորում իցէ ԱԲ=ԱԳ, երկու անկիւնքն 'ի խարսխի ԱԲԳ և ԱԳԲ հաւասար են միմեանց:

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք հատարակեալ զկողմն ԲԳ 'ի կէտն Դ, և ձգեալ ԱԴ, որովհետև

ԲԴ=ԳԴ,

նոյնպէս

ԱԲ=ԱԳ,

և

ԱԴ=ԱԴ,

ապա ուրեմն

ΔԱԲԴ≅ΔԱԳԴ (65),

վասն այնորիկ և

ր=ն

կամ

ԱԲԳ=ԱԳԲ:

Հետևանք Ա. — Ցորում և իցէ հաւասարակող եռանկեան ԱԲԳ (Ձև 18), ամենայն անկիւնք հաւասար են միմեանց. որովհետև

ԱԳ=ԲԳ,

վասն այնորիկ և

ր=ն.

նոյնպէս որովհետև

ԱԳ=ԱԲ,

վասն այնորիկ և

ն=ո,

ապա ուրեմն և

մ=ո :

Հետևանք Բ. — *Մի մի անկիւն հաւասարակող եռանկեան է* $=\frac{2}{3}$Ո$=60°$. *որովհետև բովանդակութիւն երից անկեանց նորա է*=2Ո (37) $=180°$, *ապա ուրեմն ըստ նախընթաց հետևանաց մի մի անկիւն երրորդ մասն է* 2Ո *անկեանց կամ* 180°*աց, վասն որոյ մի մի 'ի նոցանէ է* $=\frac{2}{3}$Ո$=$ $\frac{180°}{3}=60°$:

Հետևանք Գ. — *Նախընթաց հայեցողութիւնն բացայայտի և այսպէս. Եթէ 'ի միում* ԱԲԳ *եռանկեան երկու կողմանքն* ԱԲ *և* ԱԳ *միմեանց հաւասար իցեն, յանդիմանակաց անկիւնքն կողմանցն այնոցիկ* ԱԳԲ *և* ԱԲԳ *միմեանց հաւասար են :*

67. *Հայեցողութիւն.* — *Եթէ 'ի միում* ԱԲԳ (Ձև 19) *եռանկեան երկու կողմանքն միմեանց անհաւասար իցեն, հանդէպ մեծագոյն կողման կայ և մեծագոյն անկիւն. այսինքն եթէ իցէ* ԱԳ>ԱԲ, *յայնժամ և* ԱԲԳ>ԱԳԲ :

Ապացուցութիւն. — *Քանզի եթէ* ԱԳ=ԱԲ *առնիցեմք և ձգեալ* զԲԴ, *լինիցի*

մ=ո (66),

ուստի և

մ+ն>ո.

և զի

ո>պ (58 *Հետև.*),

որչափ ևս առաւել

մ+ն>պ.

այսինքն

ԱԲԳ>ԱԳԲ :

68. *Հայեցողութիւն.* — *Եթէ 'ի միում* ԱԲԳ (Ձև 20) *եռանկեան երկու անկիւնքն* մ *և* ն *միմեանց հաւասարք իցեն, յայնժամ և յանդիմանակաց կողմանքն* ԱԳ *և* ԱԲ *միմեանց հաւասարք են :*

Ապացուցութիւն. — *Քանզի եթէ չլինէր* ԱԳ=ԱԲ, *յայնժամ հարկ 'ի վերայ կայր* ԱԳ>ԱԲ *կամ* ԱԳ<ԱԲ *լինել :*

Արդ եթէ իցէ ԱԳ>ԱԲ, յայտ է եթէ և մ>ն (67). եթէ իցէ ԱԳ<ԱԲ, յայտ է եթէ և մ<ն (67). և որովհետև մ=ն, ուրեմն ոչ ԱԳ>ԱԲ և ոչ ԱԳ<ԱԲ կարէ լինել. ապա ուրեմն ԱԳ=ԱԲ:

69. Հակադարձութիւն. — Եթէ 'ի միում ԱԲԳ (Ձև 21) եռանկեան երկու անկիւնքն մ և ն միմեանց անհաւասարք իցեն, յանդիման մեծագոյն անկեան կայ և մեծագոյն կողմն. այսինքն եթէ իցէ մ>ն, յայնժամ և ԱԳ>ԱԲ:

Ապացուցութիւն. — Քանզի եթէ չլինէր ԱԳ>ԱԲ, պարտ էր կամ ԱԳ=ԱԲ և կամ ԱԳ<ԱԲ լինել: Արդ եթէ իցէ ԱԳ=ԱԲ, յայտ է եթէ լինէր և մ=ն (66). և եթէ իցէ ԱԳ<ԱԲ, յայտ է եթէ լինէր և մ<ն (67). որովհետև մ>ն, ոչ ԱԳ=ԱԲ և ոչ ԱԳ<ԱԲ կարէ լինել. ապա ուրեմն հարկ է զի իցէ ԱԳ>ԱԲ:

Հետևանք Ա. — Ուղղանկիւն եռանկեան ստորաձիգն մեծագոյն է քան զմի մի յիջիցն:

Հետևանք Բ. — Ի բթանկիւն եռանկեան յանդիմանակաց կողմն բութ անկեան՝ է մեծագոյն կողմն:

Հետևանք Գ. — Երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք միմեանց պատշաճականք են, յորժամ ստորաձիգք նոցա և մի էջն հաւասարք իցեն:

70. Հայեցողութիւն. — Յորում և իցէ ԱԲԳ (Ձև 22) եռանկեան բովանդակութիւն երկուց կողմանցն մեծագոյն է քան զերրորդ կողմն. այսինքն ԱԲ+ԱԳ>ԲԳ:

Ապացուցութիւն. — Երկայնեցի կողմն ԲԱ մինչև 'ի Դ, որպէս զի լինել ԱԴ=ԱԳ, և ձգեալ զԴԳ, արդ որովհետև

ԱԴ=ԱԳ,

վասն այնորիկ և

ն=մ (66),

ուստի

ն+ս>մ,

այսինքն

ԲԳԴ>ԲԴԳ.

ապա ուրեմն և

ԲԴ>ԲԳ (69).

և զի

ԲԳ=ԲԱ+ԱԳ,

ապա ուրեմն

ԲԱ+ԱԳ>ԲԳ:

Նոյն ապացուցութիւն է և վասն այլոց երկուց կողմանց:

Հետևանք Ա. — Ի միում բազմանկեան մի կողմն փոքրագոյն է միշտ քան զբովանդակութիւն այլ ամենայն կողմանց:

Հետևանք Բ. — Եթէ կոր գիծ ինչ յանհամար ուղիղ գծս մանունս կտրեալ համարիցի, մի մի կոր գիծ ձգեալ ընդ մէջ երկուց կիտից՝ մեծագոյն է քան զուղիղն ձգեալ ընդ մէջ նոյն կիտից:

Հետևանք Գ. — Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն է կարճագոյն ճանապարհն 'ի միում կիտէ յայլ:

Հետևանք Դ. — Ի միում հաւասարասրուն եռանկեան մի մի յերկուց հաւասար սրունից մեծագոյն է քան զկէս խարսխին:

71. Առաջարկութիւն. — Կազմել հաւասարակող եռանկիւն, յորժամ ԱԲ (Ձև 23) խարիսխն ծանուցեալ իցէ:

Լուծում. — Ի կիտից Ա և Բ, շառաւիղաւ ԱԲ ձգիցին երկու աղեղունք, որք հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Գ: Ձգիցին ուղիղ գիծքն ԱԳ և ԲԳ, որով եղանիցէ խնդրեալ ΔԱԲԳ հաւասարակող:

Ապացուցութիւն. — Քանզի որովհետև

ԱԲ=ԱԳ (33),

նոյնպէս և

ԱԲ=ԲԳ,

ապա ուրեմն

ԱԳ=ԲԳ.

վասն այնորիկ և երեք կողմանք եռանկեանն ԱԲԳ միմեանց հաւասար են:

Հետևանք. — Մարթ է նովին օրինակաւ և այլ հաւասարակող եռանկիւն կազմել 'ի վերայ միւսոյ կողման ԱԲ ուղիղ գծին:

72. Առաջարկութիւն. — Կազմել հաւասարասրուն եռան-

կին, յորժամ ԱԲ (Ձև 24) խարիսխն ծանուցեալ իցէ, և մի 'ի սրունիցն հաւասար իցէ ծանուցեալ ուղիղ գծին Գ:

Լուծումն. — Ի կիտից Ա և Բ, շառաւիղաւ Գ ձգեսցին երկու աղեղունք որք հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Դ: Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԱԴ և ԲԴ, որով եղանիցէ խնդրեալ ΔԱԲԴ հաւասարասրուն:

Ապացուցութիւն. — Քանզի ԱԴ և ԲԴ շառաւիղք են երկուց բոլորակաց, լինիցի ԱԴ=Գ և ԲԴ=Գ, ապա ուրեմն և ԱԴ=ԲԴ. վասն այնորիկ և ΔԱԲԴ է հաւասարասրուն:

Հետևանք. — Որպէս զի հնարաւոր լինել լուծմանս, հարկ է զի գիծն Գ մեծագոյն իցէ քան զկէս գծին ԱԲ (70. Հետև. Դ):

73. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ երիս ուղիղ գիծս Ա, Բ, Գ (Ձև 25) կազմել եռանկիւն:

Լուծումն. — Դիցի ԴԵ=Ա, 'ի կիտէն Դ շառաւիղաւ Բ և 'ի կիտէն Ե շառաւիղաւ Գ ձգեսցին երկու աղեղունք, որք հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Զ: Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԴԶ և ԵԶ, որով եղանիցէ խնդրեալ ΔԴԵԶ:

Ապացուցութիւն. — Քանզի ԴԵ=Ա, և ԴԶ շառաւիղ է միոյն 'ի բոլորակաց, ուրեմն ԴԶ=Բ. նոյնպէս ԵԶ շառաւիղ երկրորդ բոլորակին, ուրեմն ԵԶ=Գ. վասն այնորիկ և ΔԴԵԶ կազմեալ է յերից ծանուցեալ ուղիղ գծից:

Հետևանք. — Որպէս զի հնարաւոր լինել լուծմանս հարկ է զի բովանդակութիւն երկուց ուղիղ գծից մեծագոյն իցէ քան զերրորդն (70):

74. Առաջարկութիւն. — Զծանուցեալ ինչ անկիւն ԲԱԳ (Ձև 26) հատարակել:

Լուծումն. — Ի վերայ երկուց սրունիցն ԱԲ և ԱԳ առցի ԱԴ=ԱԵ, և 'ի կիտից Դ և Ե որ զինչ և իցէ հաւասար շառաւիղաւ ձգեսցին երկու աղեղունք, որք հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Զ. ուղիղ գիծն ԱԶ հատարակիցէ զանկիւնն ԲԱԳ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԴԶ և ԵԶ. արդ

ԱԴ=ԱԵ,

Նոյնպէս

ԴՉ=ԵՉ

և

ԱՉ=ԱՉ,

ապա ուրեմն

ΔԱԴՉ≅ΔԱԵՉ (65)·

վասն այնորիկ և

ԴԱՉ=ԵԱՉ:

Հետեւանք. — Ըստ այսմ օրինակի հատարակելով զմի մի մասն, մարթ է զմի անկիւն յ2, 4, 8, 16, 32, 64, ··· և ընդհանրապէս 2^n հաւասար մասունս բաժանել:

75 · Առաջարկութիւն. — Զծանուցեալ ինչ ուղիղ անկիւն ԱԲԳ (Ձև 27) յերիս հաւասար մասունս բաժանել:

Լուծումն. — Ի կիտէն Բ որպիսի և իցէ շառաւիղաւ ձգեսցի աղեղն, որ զորունս անկեանն ԱԲԳ 'ի կէտսն Դ և Ե հատանիցէ. 'ի կիտից Դ և Ե նովին շառաւիղաւ ձգեսցին երկու աղեղունք, որք զաղեղն ԴԵ 'ի կէտսն Ձ և Է հատանիցեն: Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԲՁ և ԲԷ, որով անկիւնն այն ԱԲԳ յերիս հաւասար մասունս բաժանիցի:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԴՁ և ԵԷ: Արդ ԲԴ=ԲՁ=ԴՁ, զի են շառաւիղք աղեղանցն ձգելոց, ուրեմն ΔԲԴՁ հաւասարակող է, վասն այնորիկ և ԴԲՁ=$^2/_3$Ո=60° (66. Հետև. Բ), ապա ուրեմն •=$^1/_3$Ո=30°: Նոյնպէս և ΔԲԵԷ հաւասարակող է, և հետևաբար ԷԲԳ=$^2/_3$Ո=60°, ապա ուրեմն ʃ=$^1/_3$Ո=30°: Արդ որովհետև •=30°, ʃ=30°, հետևաբար և Ն=30°, ապա ուրեմն անկիւնն ԱԲԳ բաժանեալ է յերիս հաւասար մասունս:

Հետեւանք. — Հատարակելով զմի մի մասն մարթ է զմի անկիւն 'ի 6, 12, 24, 48, 96, ··· $3 \cdot 2^n$ հաւասար մասունս բաժանել:

76 · Առաջարկութիւն. — Զծանուցեալ ուղիղ ինչ գիծ ԱԲ (Ձև 28) հատարակել:

Լուծումն. — Ի կիտից Ա և Բ որ զինչ և իցէ հաւասար շառաւիղաւ ձգեսցին երկու աղեղունք, որք 'ի կէտսն Գ և Դ հատանիցեն զմիմեանս: Ձգեսցի ուղիղ գիծն ԳԴ, որով գիծն ԱԲ հատարակիցի 'ի կէտն Ե:

Ապացուցութիւն. — Ձգեցին ուղիղ գիծքն ԱԳ, ԲԳ, ԱԴ, ԲԴ: Արդ

ԱԳ=ԲԳ,

նոյնպէս

ԱԴ=ԲԴ,

և

ԳԴ=ԳԴ,

ուրեմն

ΔԱԳԴ≅ΔԲԳԴ (63),

վասն այնորիկ և

ճ=ն:

Դարձեալ որովհետև

ԱԳ=ԲԳ,

նոյնպէս

ԳԵ=ԳԵ,

և

ճ=ն,

ուրեմն

ΔԱԳԵ≅ΔԵԳԲ (64),

վասն այնորիկ և

ԱԵ=ԲԵ,

ապա ուրեմն գիծն ԱԲ հատարակեցի 'ի կէսն Ե:

Հետեւանք Ա. — Ըստ այսմ օրինակի հատարակելով զմի մի մասն, մարթ է զուղիղ գիծ ինչ յ2, 4, 8, 16, 32, 64, ... և ընդհանրապէս 2^n հաւասար մասունս բաժանել:

Հետեւանք Բ. — Յառաջեցելոյս իմացեալ տեսանի միանգամայն եթէ ուղիղ գիծն ԳԴ որ հատարակէ զգիծն ԱԲ 'ի կէսն Ե, ուղղահայեաց է առ գիծն ԱԲ 'ի կէսն Ե: Քանզի որովհետև

ΔԱԳԵ≅ΔԵԳԲ,

և

ԱԵԳ=ԲԵԳ,

որով

ԱԵԳ+ԲԵԳ=2Ո (37),

ուրեմն

ԱԵԴ=Ո ,

վասն այնորիկ և

ԳԵ⊥ԱԲ :

77. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ կիտին Ա ուղիղ գծին ԱԲ (Ձև 29) կազմել անկիւն ինչ, որ հաւասար իցէ Տ անկեան ծանուցելոյ:

Լուծումն. — Ի գագաթանէն Գ անկեանն Տ որ զինչ և իցէ շառաւիղաւ ձգեսցի աղեղն, որ զտրուեալ անկեանն այնորիկ 'ի կէտս Դ և Ե հատանիցէ, և ձգեսցի ուղիղ գիծն ԴԵ: Ի կիտէն Ա շառաւիղաւ ԳԴ ձգեսցի աղեղն որ զուղիղ գիծն ԱԲ 'ի կէտն Զ հատանիցէ. 'ի կիտէն Զ շառաւիղաւ ԴԵ ձգեսցի միւս ևս աղեղն որ զառաջին աղեղն 'ի կէտն Է հատանիցէ, ձգեսցի ուղիղ գիծն ԱԷ, և լինիցի անկիւնն Ն=Տ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցի ԶԷ: Արդ որովհետև

ԱԶ=ԳԴ,

նոյնպէս

ԱԷ=ԳԵ,

և

ԶԷ=ԴԵ,

ուրեմն

ΔԱԶԷ≅ΔԳԴԵ (63),

վասն այնորիկ և

Ն=Տ:

78. Առաջարկութիւն. — Ի միջէ կիտէ Գ (Ձև 30) ձգել գիծ զուգահեռական առ ուղիղ գիծ մի ծանուցեալ ԱԲ:

Լուծումն. — Ի կիտէն Գ ձգեսցին առ որ և իցէ կէտս գծին ԱԲ երկու ուղիղ գիծք ԳԴ և ԳԵ. 'ի կիտէն Գ շառաւիղաւ ԴԵ և 'ի կիտէն Դ շառաւիղաւ ԳԵ ձգեսցին երկու աղեղունք, որք 'ի կէտն Զ զմիմեանս հատանիցեն, և ձգեսցի ԳԶ, որով լինիցի ԳԶ ∥ ԱԲ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցի ԴԶ: Արդ

ԳԴ=ԳԴ,

նոյնպէս

ԳԶ=ԴԵ,

և

ԴԶ=ԳԵ,

ուրեմն

ΔԳԴԶ≅ΔԴԳԵ (63),

վասն այնորիկ և

մ=ն,

ապա ուրեմն

ԳԶ ∥ ԱԲ (46):

79. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ԱԲ (Ձև 31), 'ի միում կէտի Գ կանգնել գիծ ուղղահայեաց:

Լուծումն. — Ի կէտէ անտի Գ 'ի վերայ գծին ԱԲ ընդ երկուս կողմանս հատանիցին որ զինչ և իցէ հաւասար մասունս ԳԴ=ԳԵ, ապա 'ի վերայ գծին ԴԵ կազմեսցի որպիսի և իցէ եռանկիւն հաւասարասրուն ԴԵԶ (72), և ձգեսցի ԳԶ, որով լինիցի ԳԶ⊥ԱԲ:

Ապացուցութիւն. — Քանզի է

ԳԴ=ԳԵ,

նոյնպէս

ԶԴ=ԶԵ,

և

ԶԳ=ԶԳ,

ուրեմն

ΔԳԴԶ≅ΔԳԵԶ (63),

վասն այնորիկ և

մ=ն.

և զի

մ+ն=2Ո (37),

ապա ուրեմն

մ=Ո,

և

ն=Ո,

որով և

ԶԳ⊥ԱԲ:

80. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ԱԲ (Ձև 32), 'ի ծայր նորին Ա կանգնել գիծ ուղղահայեաց:

Լուծումն. — Առ գիծն ԱԲ որպիսի և իցէ սուր անկեամբ ձգեցի ուղիղ գիծն ԱԳ․ 'ի կիտէն Գ շառաւիղաւ ԱԳ ձգեցի բոլորակ, որ 'ի կէտսն Ա և Դ զուղիղ գիծն ԱԲ հատանիցէ․ 'ի կիտէն Դ ձգեցի տրամագիծ ԴԵ և 'ի կիտէն Ե ձգեցի ուղիղ գիծն ԵԱ, որով լինիցի ԵԱ⊥ԱԲ։

Ապացուցութիւն․ — Քանզի որովհետև

ԳԱ=ԳԴ,

ապա և

ն=ո (66)․

Նոյնպէս որովհետև

ԳԱ=ԳԵ,

ապա և

մ=պ,

ուրեմն

մ+ն=պ+ո․

այսինքն

ԵԱԴ=ԱԵԴ+ԱԴԵ,

ապա ուրեմն

ԵԱԴ=Ո (57․ Հետև․ Զ),

վասն այնորիկ և

ԵԱ⊥ԱԲ։

Հետևանք․ — Եթէ 'ի ծայրիցն Դ և Ե տրամագծին ԴԵ, ձգեսցին առ որ ինչ և իցէ կէտ Ա շրջապատի բոլորակին երկու ուղիղ գիծք, գործեն զուղիղ անկիւն 'ի կէտն Ա․ քանզի ձգեսցի ԱԳ և լինիցի որպէս յառաջն

ն=ո,

և

մ=պ,

ուրեմն

մ+ն=պ+ո,

այսինքն

ԵԱԴ=ԱԵԴ+ԱԴԵ,

ապա ուրեմն

ԵԱԴ=Ո (57․ Հետև․ Զ)։

81․ *Առաջարկութիւն*․ — Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ԱԲ (Ձև 33) յայլմէ կիտէ Գ, որ արտաքոյ կայցէ այնր գծին, ձգել գիծ ուղղահայեաց։

Լուծումն. — Ի կէտէ անտի Գ. որ զնիչ և լցէ շառաւիղաւ ձգեսցի աղեղն, որ զուղիղ գիծն ԱԲ 'ի կէտսն Դ և Ե հատանիցէ. 'ի կէտիցն Դ և Ե որ զնիչ և լցէ հաւասար շառաւիղաւ ձգեսցին երկու աղեղունք, որ զմիմեանս 'ի կէտն Զ հատանիցեն. ձգեսցի ԳԶ, որ զուղիղ գիծն ԱԲ 'ի կէտն Է հատանիցէ, որով լինիցի ԳԷ⊥ԱԲ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԳԴ, ԳԵ, ԴԶ, և ԵԶ: Արդ որովհետև

ԳԴ=ԳԵ,

նոյնպէս

ԴԶ=ԵԶ,

և

ԳԶ=ԳԶ,

ուրեմն

ΔԳԴԶ≅ΔԳԵԶ (63),

վասն այնորիկ և

ճ=ն.

Դարձեալ

ԳԴ=ԳԵ,

նոյնպէս

ԳԷ=ԳԷ

և

ճ=ն,

ուրեմն

ΔԳԴԷ≅ΔԳԵԷ (64),

վասն այնորիկ և

ա=պ.

և զի

ա+պ=2Ո (37),

ապա ուրեմն

ա=Ո,

և

պ=Ո,

կամ

ԳԷ⊥ԱԲ:

Հետևանք. — Ի բազմապատիկ լուծմունս նախընթաց առաջարկութեանց, որպէս օրինակ ի՛մն յառաջադրութիւնս 76, 79, 81, հաւասարասրուն եռանկիւնք արկանին 'ի կիր. վասն որոյ միտ եդեալ առաջարկութեանցն այնոցիկ, յաւելցուք աստանօր և զյառաջիկայ հանգամանս հաւասարասրուն եռանկեանց:

ա. Ուղիղ գիծն ԳԷ որ հատանէ զանկիւնն ԴԳԵ գագաթան Գ. հաւասարասրուն եռանկեան ԴԳԵ (Ձև 33), հատանէ և զխարիսխն ԴԵ և կայ նմա ուղղահայեաց. քանզի

ԳԴ=ԳԵ,

դարձեալ

ԳԷ=ԳԷ,

և

ճ=ն,

ուրեմն

ΔԳԴԷ≅ΔԳԵԷ (64).

ապա ուրեմն

ԴԷ=ԷԵ,

և

ս=պ,

և զի

ս+պ=2Ո (37),

ապա ուրեմն

ս=Ո,

ուստի և

ԳԷ⊥ԴԵ:

բ. Ուղղահայեաց գիծն ԳԷ որ 'ի գագաթանէ Գ. անկանիցի 'ի վերայ խարսխին ԴԵ հաւասարասրուն եռանկեան ԳԴԵ, հատանէ զխարիսխն և զանկիւնն գագաթան. քանզի որովհետև ԳԷ⊥ԴԵ, ուստի և

ս=պ.

և զի

ԳԴԷ=ԳԵԷ (66),

և

ԳԴ=ԳԵ,

ուրեմն

ΔԳԴԷ≅ΔԳԵԷ (65).

վասն այնորիկ և

ԴԷ=ԵԷ,

և

մ=ն:

Դ. Ուղիղ գիծն որ կապիցէ ընդ միմեանս զգագաթն Գ հաւասարասրուն եռանկեան ԳԴԵ և զմիջավայրն Է խարսխին ԴԵ, հատանէ զանկիւնն գագաթան, և է ուղղահայեաց 'ի վերայ խարսխին. քանզի

ԳԴ=ԳԵ,

նոյնպէս

ԳԷ=ԳԷ

և

ԴԷ=ԵԷ,

ուրեմն

ΔԳԴԷ≅ΔԳԵԷ (65),

վասն այնորիկ և

մ=ն

և

ա=դ.

և զի

ա+դ=2Ո (37),

ապա ուրեմն

ա=Ո,

ուստի և

ԳԷ⊥ԴԵ:

32. Հայեցողութիւն. — Ի միում կիտի Գ 'ի վերայ ուղիղ գծին ԱԲ (Ձև 34) մարթ է միոյ միայնոյ ուղղահայեաց գծի կանգնել:

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԳԴ ուղղահայեաց 'ի կէտն Գ ուղիղ գծին ԱԲ. 'ի կիտէն Գ ձգեսցի և այլ որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ ԳԵ, հարկ է զի անկանիցի այն կամ յանկեան ԴԳԲ և կամ յանկեան ԴԳԱ: Եթէ անկանիցի յանկեան ԴԳԲ, յայնժամ որովհետև ԳԴԲ=Ո, լինիցի ԵԴԲ<Ո, վասն այնորիկ և ԳԵ խոտոր է առ ԱԲ: Ըստ նմին օրինակի և այլ որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ կանգնեալ'ի վերայ կիտին Գ, խոտոր է առ ԱԲ. ուրեմն'ի միում կիտի Գ'ի վերայ ուղիղ գծին ԱԲ, մարթ է միոյ միայնոյ ուղղահայեաց գծի կանգնել:

83. Հայեցողութիւն. — Ի վերայ ուղիղ գծին ԱԲ (Ձև 35), յայլմէ կիտէ Գ որ արտաքոյ կայցէ այնր գծին, մարթ է միոյ միայնոյ ուղղահայեաց գծի ձգել:

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԳԴ⊥ԱԲ. 'ի կիտէն Գ ձգեսցի առ ԱԲ այլ որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ ԳԵ, որով լինիցի Ճ=Ո, և հետևաբար Ն<Ո (57. Հետև. Բ), ուրեմն ԳԵ խոտոր է առ ԱԲ: Ըստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ որ 'ի կիտէն Գ ձգիցի առ ԱԲ, խոտոր է առ ԱԲ. ուրեմն 'ի վերայ ուղիղ գծին ԱԲ յայլմէ կիտէ Գ որ արտաքոյ կայցէ այնր գծին, մարթ է միոյ միայնոյ ուղղահայեաց գծի ձգել:

84. Հայեցողութիւն. — Քան զամենայն ուղիղ գիծս, զորս մարթ իցէ 'ի միջէ կիտէ Գ ձգել առ այլ ուղիղ գիծ ԱԲ (Ձև 35), ուղղահայեաց գիծն կարճագոյն է:

Ապացուցութիւն. — Ի կիտէն Գ ձգեսցի այլ ևս ուղիղ գիծ ԳԵ: Որովհետև

Ճ=Ո,

լինիցի

Ն<Ո (57. Հետև. Բ),

ուրեմն

Ճ>Ն,

վասն այնորիկ և

ԳԵ>ԳԴ (69):

Հետևանք. — Որովհետև քան զամենայն ուղիղ գիծս, զորս մարթ իցէ 'ի միջէ կիտէ Գ ձգել առ այլ ուղիղ գիծ ԱԲ, ուղղահայեաց գիծն կարճագոյն է, վասն այնորիկ հեռաւորութիւն միոյ կիտի Գ 'ի միջէ գծէ ԱԲ չափի 'ի ձեռն ուղղահայեաց գծին ԳԴ:

85. Հայեցողութիւն. — Եթէ յորմէ և իցէ կիտէ Գ ուղ-

ուղղահայեաց գծին ԳԴ ձգեալն երկու ուղիղ գիծք ԳԶ և ԳԵ առ երկուս կէտս Զ և Ե գծին ԱԲ (Ձև 36), որ միով չափով հեռի իցեն յառից ուղղահայեաց գծին ԳԴ, յայնժամ երկոքին գիծքն միմեանց հաւասարք են ։

Ապացուցութիւն. — Քանզի որովհետև

ԴԶ=ԴԵ,

նոյնպէս

ԳԴ=ԳԴ,

և

ճ=ն=Ո,

ուրեմն

ΔԳԴԶ≅ΔԳԴԵ (64),

վասն այնորիկ և

ԳԶ=ԳԵ ։

86. Հայեցողութիւն. — Որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ որ ձգեսցի ՚ի կիտէն Գ առ գիծն ԱԲ (Ձև 37), մեծագոյն այն է որոյ կէտն կատարածի հեռագոյն իցէ յոտից Գ ուղղահայեաց գծին ԳԴ. ուստի և ԳԷ>ԳԵ, ԳԸ>ԳԷ, այլովքն հանդերձ ։

Ապացուցութիւն. — Քանզի որովհետև

ն=Ո,

ուստի և

ա<Ո (57. հետև. Բ).

և զի

ա+դ=2Ո (37),

ուրեմն

դ>Ո,

վասն այնորիկ և

փ<Ո (57. հետև. Բ),

ապա ուրեմն

դ>փ,

վասն այնորիկ և

ԳԷ>ԳԵ (69) ։

Նոյնպէս որովհետև

փ<Ո,

ուրեմն

ռ>ո,

վասն այնորիկ և

ռ<ո.

ապա ուրեմն

ռ>ս,

վասն այնորիկ և

ԳԸ>ԳԻ,

այլովքն հանդերձ:

87. Հաւաստութիւն. — Ի միոջէ կէտէ Գ առ ուղիղ գիծն ԱԲ (Ձև 36), մարթ է միայն երկու երկու հաւասար ուղիղ գծից ձգել:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցի ուղիղ գիծն ԳԶ: Արդ եթէ ԳԵ=ԳԶ, ձգեսցի ԳԵ, լինիցի ԳԵ=ԳԶ (83): Որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ որ ձգեսցի 'ի կէտէն Գ առ ԱԲ հարկ է զի ծագ նորին կամ անկանիցի 'ի միջոցի կիտիցն Զ և Ե, և յայնժամ լինիցի <ԳԶ և <ԳԵ (86), և կամ արտաքոյ կիտիցն Զ և Ե, ուստի կամ 'ի կէտէն Զ ցկեան Ա կոյս և կամ 'ի կէտէն Ե ցկեան Բ կոյս, և յայնժամ լինիցի >ԳԶ և >ԳԵ (86):

88. Հաւաստութիւն. — Եթէ 'ի միջավայրէն Գ ուղիղ գծին ԱԲ (Ձև 38), կանգնիցի գիծ ուղղահայեաց, մի մի կէտ նորին միով չափով հեռաւորին է 'ի ծագաց ուղիղ գծին ԱԲ. որ զինչ և իցէ այլ կէտ որ ոչ անկանիցի 'ի վերայ ուղղահայեաց գծին միով չափով հեռաւորին, չէ 'ի ծագաց ուղիղ գծին:

Ապացուցութիւն. — Ի կէտէն Զ ձգեսցին երկու ուղիղ գիծքն ԶԱ և ԶԲ: Արդ

ԶԳ=ԶԳ,

նոյնպէս

ԳԱ=ԳԲ,

և

ԶԳԱ=ԶԳԲ=Ո,

ուրեմն

ΔԶԳԱ≅ΔԶԳԲ (64).

վասն այնորիկ և

ԶԱ=ԶԲ:

Դարձեալ 'ի կիտէն Է ձգեսցին երկու ուղիղ գիծքն ԷԱ և ԷԲ, և ԷԱ հատանիցէ զուղղահայեացն ԴԵ 'ի կէտն Ը. ձգեսցի ԸԲ: Արդ ըստ նախընթաց հայեցողութեան

ԸԱ=ԸԲ,

ուրեմն

ԷԱ=ԷԸ+ԸԲ,

և զի

ԷԸ+ԸԲ>ԷԲ (70).

վասն այնորիկ և

ԷԱ>ԷԲ:

89. Հայեցողութիւն. — Եթէ անկիւն ինչ ԲԱԳ (Ձև 39) հատարակիցի 'ի միջէ ուղիղ գծէ ԱԴ, որ զինչ և իցէ կէտ այնր ուղիղ գծի միով չափով հեռաւորյն է 'ի կողից անկեանն. և որ զինչ և իցէ այլ կէտ որ անկանիցի 'ի ներքս անկեանն և չիցէ 'ի վերայ հատարակիչ ուղիղ գծին, միով չափով հեռաւորյն չէ 'ի կողիցն:

Ապացուցութիւն. — Ի կիտէն Ե ուղիղ գծին ԱԴ ձգեսցին ուղղահայեաց գիծքն ԵԶ և ԵԻ առ կողմն ԱԲ և ԱԳ: Արդ

ԵԱ=ԵԱ,

նոյնպէս

ԵԱԶ=ԵԱԻ

և

ԵԶԱ=ԵԻԱ=Ո,

ուրեմն

ΔԱԵԶ≅ΔԱԵԻ (63),

վասն այնորիկ և

ԵԶ=ԵԻ,

կամ կէտն Ե միով չափով հեռաւորյն է 'ի կողիցն ԱԲ և ԱԳ (84. Հետև.):

Դարձեալ 'ի կիտէն Ը ձգեսցին ուղղահայեաց գիծքն ԸԹ և ԸԺ առ կողմն ԱԲ և ԱԳ. ԸԹ հատանիցէ զգիծն ԱԴ 'ի կէտն Ի. 'ի կիտէն Ի ձգեսցի ուղիղ գիծն ԻԼ ուղղահայեաց առ ԱԳ և ձգեցի ԸԼ: Արդ ըստ նախընթաց հայեցուածեան

ԻԹ=ԻԼ,

ուրեմն

ԸԹ=ԸԻ+ԻԹ=ԸԻ+ԻԼ·

և զի

ԸԻ+ԻԼ>ԸԼ (70),

ապա ուրեմն և

ԸԹ>ԸԼ·

և զի

ԸԼ>ԸԺ (84),

որովհետև ԸԺ ուղղահայեաց է, ուրեմն ԸԼ խոտոր է առ ԱԳ, վասն այնորիկ որչափ ևս առաւել լինիցի ԸԹ>ԸԺ:

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԾԻՑ ԵՒ ՎԱՍՆ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆՑ

Առաջադրութիւնք :

90 · Հաստատութիւն · — Եթէ ծայրք երկու հաւասար զուգահեռական գծից ԱԲ և ԴԳ (Ձև 40) կապիցին ընդ միմեանս ուղիղ գծիւք, որ ոչ հատանիցեն զմիմեանս, ուղիղ գիծքն այնուհետև են հաւասար և զուգահեռական միմեանց :

Ապացուցութիւն · — Ձգեսցի անկիւնագիծն ԲԴ : Արդ

ԱԲ=ԳԴ,

նոյնպէս

ԲԴ=ԲԴ,

և

ծ=ն (46),

ուրեմն

ΔԱԲԴ≅ΔԴԳԲ (64),

վասն այնորիկ և

ԱԴ=ԲԳ,

և

ո=պ,

ուրեմն և

ԱԴ || ԲԳ (30) :

91 · Հաստատութիւն · — Եթէ 'ի քառանկեան ինչ ԱԲԳԴ (Ձև 40) երկու երկու յանդիմանակաց կողմանքն միմեանց հաւասարք իցեն, քառանկիւնին է զուգահեռագիծ · այսինքն եթէ իցէ ԱԲ=ԳԴ, և ԱԴ=ԲԳ, յայնժամ ԱԲԳԴ է զուգահեռագիծ :

Ապացուցութիւն. — Ձգեալ անկիւնագիծն ԲԴ: Արդ

ԱԲ=ԴԳ,

նոյնպէս

ԱԴ=ԲԳ,

և

ԲԴ=ԲԴ,

ուրեմն և

$\triangle$ԱԲԴ$\cong\triangle$ԲԴԳ (63).

վասն այնորիկ և

ճ=ն,

և

ա=գ.

ապա ուրեմն և

ԱԲ $\|$ ԴԳ,

և

ԱԴ $\|$ ԲԳ (50):

92. Հայեցողութիւն. — Յորում և իցէ զուգահեռագծի ԱԲԳԴ (Ձև 40) յանդիմանակաց կողմանքն և անկիւնքն միմեանց հաւասարք են. և զուգահեռագիծն 'ի ձեռն միոյ անկիւնագծի հատանակի:

Ապացուցութիւն. — Ձգեալ անկիւնագիծն ԲԴ: Արդ

ԲԴ=ԲԴ,

և որովհետև

ԱԲ $\|$ ԴԳ,

վասն այնորիկ և

ճ=ն.

դարձեալ որովհետև

ԱԴ $\|$ ԲԳ,

վասն այնորիկ և

ա=գ (46),

ուրեմն

$\triangle$ԱԲԴ$\cong\triangle$ԲԴԳ (63),

ապա ուրեմն զուգահեռագիծն հատանեալ է 'ի ձեռն անկիւնագծին ԲԴ, և է ԱԲ=ԴԳ և ԱԴ=ԲԳ:

Նոյնպէս ԲԱԴ=ԲԳԴ, որովհետև

ճ = ն

և

ո = պ.

վասն այնորիկ և

ճ + պ = ն + ո,

այսինքն

ԱԲԳ = ԱԴԳ.

ուրեմն յանդիմանակաց կողմունքն և անկիւնքն միմեանց հաւասարք են:

93. Հայեցողութիւն. — Ցորում և իցէ զուգահեռագծի ԱԲԳԴ (Ձև 41) անկիւնագիծքն ԲԴ և ԱԳ հատարակեն զմիմեանս փոխանակաւ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԱԲ ∥ ԴԳ,

ուրեմն

ճ = ն

և

ո = պ (46).

արդ նաև է

ԱԲ = ԴԳ (92),

ուրեմն

ΔԱԲԵ ≅ ΔԴԳԵ (63),

վասն այնորիկ և

ԱԵ = ԳԵ,

և

ԲԵ = ԴԵ:

94. Հայեցողութիւն. — Որպիսի և իցէ ուղիղ գիծ ՁԵ որ ձգիցի ընդ կէտն Ե հատանելով զմիմեանս անկիւնագծից զուգահեռագծին ԱԲԳԴ (Ձև 42) մինչև 'ի շրջապատ նորին յերկուց կողմանց, հատարակի 'ի կէտն Ե:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԱԲ ∥ ԴԳ,

ուրեմն

ճ = ն (46).

արդ որովհետև նաև

ո = պ (40),

և

ԲԵ=ԴԵ (95),

ուրեմն

ΔԲԵԶ≅ΔԴԵԻ (65),

վասն այնորիկ և

ԶԵ=ԵԻ:

Հետեւանք Ա. — Ուղիղ գիծն ԶԻ որպէս և անկիւնագիծ մի հատարակէ զզուգահեռագիծն. քանզի 'ի նախընթաց հայեցողութեան ցուցաւ լինել

ΔԲԵԶ≅ΔԴԵԻ,

ուրեմն

ԱԴԵԶ+ΔԲԵԶ=ԱԴԵԶ+ΔԴԵԻ,

այսինքն

ΔԱԴԲ=ԻԴԱԶ.

և զի

ΔԱԴԲ=½ԱԲԳԴ (92),

ապա ուրեմն նաև

ԻԴԱԶ=½ԱԲԳԴ.

ուրեմն և

ԶԲԳԻ=½ԱԲԳԴ:

Ըստ այսմ օրինակի մարթ է ապացուցանել եթէ և շրջապատ զուգահեռագծին հատարակի:

Հետեւանք Բ. — Կէտն հատարակաց Ե, յորում անկիւնագիծքն կամ այլ ուղիղ գիծք հատարակիցին, ասի կեդրոն զուգահեռագծի, որպէս 'ի կեդրոնէ բոլորակի, զի ամենայն ուղիղ գիծք ձգեալք ընդ սա չեն միանգամայն և հաւասարք միմեանց:

95. *Հայեցողութիւն.* — Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ, ԳԴ (Ձև 43) զուգահեռականք իցեն, ամենայն ուղղահայեաց գիծք, որ ձգիցին 'ի մէջ նոցա են հաւասար միմեանց:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԵԶԳ=Ո,

և

ԷԸԶ=Ո,

ուրեմն

ՆՁԳ=ԻՐՁ ·

վասն այնորիկ և

ՆՁ ∥ ԻՐ (35) ·

և որովհետև նաև

ՆԻ=ՁՐ ,

քառանկիւնին ՆՁՐԻ է զուգահեռագիծ, և հետևաբար ՆՁ=ԻՐ (91) · նոյնպէս նաև ԻՐ=ԺԹ, այսինքն հանդերձ :

Հետևանք. — Ապա ուրեմն եթէ երկու ուղիղ գիծք զուգահեռականք իցեն, յամենայն կէտս իւրեանց հաւասարապէս հեռի կան 'ի միմեանց :

96 · Ծանօթութիւն. — Յորում և իցէ զուգահեռագծի, ըստ (92) համարոյն, յանդիմանակաց կողմանքն միմեանց հաւասարք են : Ըստ կողմանցն, հաւասարակող է զուգահեռագիծ, որ հաւասար ունի զյանդիմանակաց կողմանն միմեանց. և անհաւասարակող է՝ որ անհաւասար ունի զերկու յանդիմանակաց կողմանն միմեանց :

Ըստ անկեանցն, յորում և իցէ զուգահեռագծի, եթէ մի անկիւնն իցէ =Ո, հարկ է զի իցեն և այլ երեք անկիւնքն =Ո, զի չորք անկիւնքն միահամուռ գումարեալ են =4Ո (60) · արդ եթէ մի անկիւն զուգահեռագծի իցէ =Ո, հարկ է զի յանդիմանակաց նորին իցէ ևս =Ո, ուրեմն միանգամայն են =2Ո · հետևաբար բովանդակութիւն և այլ երկուցն լինիցի =2Ո · և զի երկու երկու միմեանց հաւասարք են, վասն այնորիկ և իւրաքանչիւրն է կէս 2Ո, ուրեմն է Ո :

Եթէ սմին հակառակ մի անկիւնն իցէ սուր կամ <Ո, հարկ է զի յանդիմանակաց նորին իցէ ևս <Ո, ապա ուրեմն միահամուռ գումարեալ են <2Ո, հետևաբար բովանդակութիւն և այլ երկուցն լինիցի >2Ո, վասն այնորիկ և իւրաքանչիւրն է >Ո, զի երկոքին ևս միմեանց հաւասարք են :

Եւ եթէ մի անկիւնն իցէ բութ կամ >Ո, հարկ է զի յանդիմանակաց նորին իցէ ևս >Ո, ապա ուրեմն միահամուռ գումարեալ են >2Ո, հետևաբար բովանդակութիւն և այլ երկուցն լինիցի <2Ո, վասն այնորիկ և իւրաքանչիւրն է <Ո:

Ուստի զուգահեռագիծք կամ զանկիւնս ունին =Ո, կամ զերկու՝ սուր, և զերկու՝ բութ. առաջինքն ասին ուղղանկիւն, և յետինքն՝ խոտորանկիւն :

Զուգահեռագիծք ըստ կողմանցն և ըստ անկեանցն, կայ 'ի նոցանէ

ա. Հաւասարակող և ուղղանկիւն, և ասի քառակուսի:

բ. Հաւասարակող և խոտորանկիւն, և ասի տարանկիւն:

գ. Անհաւասարակող և ուղղանկիւն, և ասի երկայնաւոր կամ ուղղանկիւն:

դ. Անհաւասարակող և խոտորանկիւն, և ասի տարանկիւնային:

97. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ծանուցելոյ ԱԲ (Ձև 44) կազմել քառակուսի:

Լուծումն. — Ի վերայ ծայրին Բ ուղիղ գծին ԱԲ կանգնեսցի ուղղահայեացն ԲԴ (80), 'ի սմա առցի մասն ինչ ԲԴ=ԱԲ, 'ի կէտիցն Ա և Դ շառաւիղաւ ԱԲ ձգեսցին երկու աղեղունք, որ 'ի կէտն Ե զմիմեանս հատանիցեն. ածիցին ԱԵ և ԴԵ, և ԱԲԴԵ լինիցի քառակուսին խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ=ԴԵ և ԲԴ=ԱԵ, ուրեմն ԱԲ ∥ ԴԵ և ԲԴ ∥ ԱԵ (91), այսինքն ԱԲԴԵ է զուգահեռագիծ: Արդ որովհետև ԱԲ=ԲԴ, ուրեմն և չորք կողմանքն միմեանց հաւասարք են, և որովհետև ԱԲԴ=Ո, խորաքանչիւր անկիւն է =Ո (96). հետևաբար ԱԲԴԵ է քառակուսի:

Հետևանք Ա. — Յառաջագրութենէ (82) համարոյն ծագէ եթէ 'ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ծանուցելոյ ԱԲ մարթ է միոյ միայնոյ քառակուսւոյ կազմել, ուրեմն երկու քառակուսիք միմեանց հաւասարք են եթէ ունիցին հաւասար զկողմն. և փոխադարձաբար եթէ երկու քառակուսիք միմեանց հաւասարք են, ունին հաւասար զկողմն: Ըստ սմին օրինակի մարթ է դիւրաւ ապացուցանել եթէ կող մի քառակուսւոյ մեծագոյն իցէ քան զայլոյ, քառակուսին ևս է մեծագոյն, և փոխադարձաբար:

Հետևանք Բ. — Յոր զինչ և իցէ քառակուսիս անկիւնագիծքն միմեանց հաւասարք են, հատարակեն զանկիւնան և 'ի միմեանց հատանին ուղիղ անկեամբ. քանզի որովհետև (Ձև 44)

ԱԲ=ԱԲ,

նոյնպէս

ԱԵ=ԲԴ,

և

ԲԱԵ=ԱԲԴ=Ո,

ուրեմն

△ԱԲԵ≅△ԱԲԴ (64).

վասն այնորիկ և

ԲԵ=ԱԴ։

Դարձեալ որովհետև ԱԵ=ԴԵ, և ԱԴ հատարակեալ 'ի Զ, նաև ԱԵԴ հատարակեալ է 'ի գծէն ԵԶ. և ԵԶ ուղղահայեաց է առ ԱԴ (81 Հետև. գ.), այսինքն է ԱԴ և ԲԵ հատանեն զմիմեանս ուղիղ անկեամբ։

98. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ծանուցելոյ ԱԲ (Ձև 45) խոտոր անկեամբ ∫ կազմել տարանկիւն։

Լուծումն. — Ի վերայ ուղիղ գծին ծանուցելոյ ԱԲ 'ի կէտն Ա կազմեսցի անկիւնն ԲԱԴ=∫ (77), 'ի գծէն ԱԴ առցի ԱԴ=ԱԲ, և 'ի կիտիցն Բ և Դ շառաւիղաւ ԱԲ ձգեսցին երկու աղեղունք, որ 'ի կէտն Ե զմիմեանս հատանիցեն։ Ածիցին ԴԵ և ԲԵ, և ԱԲԵԴ լինիցի տարանկիւնն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ=ԴԵ և ԱԴ=ԲԵ, ուրեմն ԱԲ ∥ ԴԵ և ԱԴ ∥ ԲԵ (91), այսինքն ԱԲԵԴ է զուգահեռագիծ, որ ունի զխոտոր անկիւնն ∫, որովհետև ԲԱԴ=∫։ Արդ որովհետև նաև ԱԲ=ԱԴ, զուգահեռագիծն է նաև հաւասարակող, վասն այնորիկ է և տարանկիւն։

Հետևանք Ա. — Յորում և իցէ տարանկեան անկիւնագիծքն հատանեն զմիմեանս ուղիղ անկեամբ և հատարակեն զանկիւնս տարանկեան։ Որովհետև (Ձև 45) ԱԴ=ԵԴ, և ԱԵ հատարակեալ 'ի Զ (92), նաև ԱԴԵ հատարակեալ է 'ի գծէն ԴԶ, և ԴԶ ուղղահայեաց է առ ԱԵ (81. Հետև. գ.), այսինքն ԴԲ և ԱԵ հատանեն զմիմեանս ուղիղ անկեամբ։

Հետևանք Բ. — Եւ զի այս երկու հանգամանք անկիւնագծից հետևանաց Ա Ճշմարտին նաև 'ի քառակուսին, և զի տարանկիւն և քառակուսի են երկու զանազանութիւնք յորս բաժանի զուգահեռագիծ հաւասարակող, զնախընթաց առաջարկութիւնն մարթ է ընդհանրագոյն ևս բացատրել ըստ առաջիկայ օրինակիդ. Յորում և իցէ հաւասարակող զուգահեռագծի, անկիւնագիծքն հատանեն զմիմեանս ուղիղ անկեամբ և հատարակեն զանկիւնս զուգահեռագծին :

99. Առաջարկութիւն. — Երկու ուղիղ գծիւք ԱԲ, ԳԴ (Ձև 46) կազմել զերկայնաւոր :

Լուծումն. — Ի վերայ ծայրին Ա ուղիղ գծին ԱԲ կանգնիցի ուղղահայեացն ԱԵ (80), 'ի սմա առցի ԱԶ=ԳԴ, 'ի կիտէն Զ շառաւիղաւ ԱԲ և 'ի կիտէն Բ շառաւիղաւ ԳԴ գծիցին երկու աղեղունք որ հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Է: Ածիցին ԶԷ և ԲԷ, և ԱԲԷԶ լինիցի երկայնաւորն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ=ԶԷ, և ԱԶ=ԲԷ=ԳԴ, ուրեմն ԱԲ ∥ ԶԷ, և ԱԶ ∥ ԲԷ (91). այսինքն ԱԲԷԶ է զուգահեռագիծ, որ ունի զկողս ԱԲ և ԱԶ=ԳԴ: Դարձեալ որովհետև ԲԱԵ=Ո, խորաքանչիւր անկիւն է =Ո (96), վասն այնորիկ և ԱԲԷԶ է ուղղանկիւն, ուրեմն է երկայնաւորն խնդրեալ:

Հետևանք Ա. — Յորում և իցէ երկայնաւորի անկիւնագիծքն միմեանց հաւասարք են. քանզի (Ձև 46)

ԱԲ=ԱԲ,

նոյնպէս

ԱԶ=ԲԷ,

և

ԶԱԲ=ԷԲԱ=Ո,

ուրեմն

ΔԲԱԶ≅ΔԲԱԷ (64),

վասն այնորիկ ևս

ԲԶ=ԱԷ :

Հետևանք Բ. — Եւ զի հանգամանք անկիւնագծից հետևանաց Ա ճշմարտին նաև 'ի քառակուսին, և զի երկայնաւորն և քառակուսին են երկու զանազանութիւնք յորս բաժանի զուգահեռագիծն ուղղանկիւնային, կամ ուղղանկիւնն, նախընթաց հետևանքն մարթին ընդհանրագոյն ևս բացատրիլ ըստ առաջիկայ օրինակիդ. Յորում և իցէ ուղղանկեան անկիւնագիծքն միմեանց հաւասարք են :

100. Առաջարկութիւն. — Երկու ուղիղ գծիւք ծանուցելովք ԱԲ, ԳԴ (Ձև 47), և սուր անկեամբն ʃ կազմել տարանկիւնոյն:

Լուծումն. — Ի վերայ ուղիղ գծին ԱԲ 'ի կէտն Ա կազմիցի անկիւնն ԲԱԵ=ʃ (77), 'ի գծէն ԱԵ առցի մասն ինչ ԱԶ=ԳԴ, 'ի կիտէն Զ շառաւիղաւ ԱԲ և 'ի կիտէն Բ շառաւիղաւ ԳԴ ձգիցին երկու աղեղունք որք հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Է: Ածիցին ԶԷ և ԲԷ, և ԱԲԷԶ լինիցի տարանկիւնոյն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ=ԶԷ, և ԱԶ=ԲԷ=ԳԴ, ուրեմն ԱԲԷԶ է զուգահեռագիծ (91), որ ունի զսուր անկիւնն ʃ, որովհետև ԲԱԶ=ʃ: Արդ որովհետև նաև կողքն ԱԲ և ԱԶ=ԳԴ, ուրեմն ԱԲԷԶ է տարանկիւնոյն խնդրեալ:

101. Հայեցողութիւն. — Զուգահեռագիծք ԱԲԳԴ, և ԱԲԵԶ (Ձև 48), որոց նոյն իցէ խարիսխն, և 'ի մէջ նոյն զուգահեռականաց ձգեալ իցեն, միմեանց հաւասարք են:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԱԴ ∥ ԲԳ

և

ԱԶ ∥ ԲԵ,

ուրեմն

ԴԱԶ=ԳԲԵ

և

ԱԶԴ=ԲԵԳ (45).

արդ նաև

ԱԴ=ԲԳ,

ուրեմն

ΔԱԴԶ≅ΔԲԳԵ (65),

վասն այնորիկ և

ԱԴԵԲ−ΔԱԴԶ=ԱԴԵԲ−ΔԲԳԵ,

այսինքն է

ԱԲԵԶ=ԱԲԳԴ:

Հետևանք Ա. — Եթէ որ զինչ և իցէ կողմն զուգահեռագծին համարիցի խարիսխ նորին, ուղղահայեաց գիծն որ 'ի յանդիմանակաց կողմանէ 'ի վերայ խարսխին կամ երկայնութեան նորա անկանիցի, ասի բարձրութիւն զուգահեռագծին:

Հետեւանք Բ. — Եւ զի ամենայն ուղղահայեացք, որ ձգին 'ի մէջ նոյն զուգահեռականաց, միմեանց հաւասարք են (93), և զի եթէ ԱԲ համարիցի խարիսխ, ուղղահայեաց գիծքն որ 'ի կողմանէն ԳԴ անկանիցին 'ի վերայ նորա՝ լինիցին բարձրութիւն զուգահեռագծիցն ԱԲԳԴ և ԱԲԵԶ. զնախընթաց առաջադրութիւնն մարթ է եւ բացատրել ըստ առաջիկայ օրինակիդ. Զուգահեռագիծք որ կանգնիցին 'ի վերայ նոյն խարսխի և ունիցին զնոյն բարձրութիւն, միմեանց հաւասարք են:

Հետեւանք Գ. — Որ զինչ և իցէ զուգահեռագիծ հաւասար է նաև ուղղանկեան, եթէ իցէ նորա նոյն խարիսխ և նոյն բարձրութիւնն. վասն որոյ զնախընթաց առաջադրութիւնն մարթ է ընդհանրագոյն եւ բացատրել այսպէս. Զուգահեռագիծք որոց նոյն իցէ խարիսխ և բարձրութիւն, միմեանց հաւասարք են:

102. Հայեցողութիւն. — Եթէ զուգահեռագիծն ԱԲԴԵ և եռանկիւնն ԱԲԳ (Ձև 49) ունիցին զնոյն խարիսխ, և 'ի մէջ նոյն զուգահեռականաց ձգիցին, կամ որ նոյն է՝ զհաւասար բարձրութիւն ունիցին, եռանկիւնն է կէս զուգահեռագծին:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցի ԲԶ || ԱԳ մինչև հատանել զգիծն ԵԳ 'ի կէտն Զ: Արդ որովհետև ԲԶ || ԱԳ և ԵԶ || ԱԲ, վասն որոյ ԱԲԶԳ է զուգահեռագիծ, ուրեմն ԱԲԶԳ=ԱԲԴԵ (101): Արդ ԲԳ է անկիւնագիծ զուգահեռագծին ԱԲԶԳ, ուրեմն ΔԱԲԳ=½ԱԲԶԳ (92), վասն այնորիկ նաև ΔԱԲԳ=½ԱԲԴԵ:

103. Հայեցողութիւն. — Եռանկիւնք ԱԲԴ և ԱԲԳ (Ձև 50) որոց նոյն խարիսխ իցէ և 'ի մէջ նոյն զուգահեռականաց գտանիցին, միմեանց հաւասարք են:

Ապացուցութիւն. — Ի կիտէն Ա ձգիցի ԱԵ || ԲԴ մինչև հատանել զգիծն ԳԴ 'ի կէտն Ե: Որովհետև ԱԵ || ԲԴ և ԴԵ || ԱԲ, վասն որոյ ԱԲԴԵ է զուգահեռագիծ. և որովհետև ԱԴ է անկիւնագիծ նորին, ուրեմն ΔԱԲԴ=

$^1/_2$ԱԲԴԵ (92) . բայց նաև ΔԱԲԳ=$^1/_2$ԱԲԴԵ (102), ուրեմն ΔԱԲԴ=ΔԱԲԳ:

Զառաջագրութիւնս այս մարթ է ընդհանրապէս և բացատրել ըստ առաջիկայ օրինակիդ. Եռանկիւնք, որոց հաւասար իցէ բարձրութիւն և հաւասար խարիսխն, միմեանց հաւասարք են:

104. Հայեցողութիւն. — Եթէ ընդ որ զինչ և իցէ կէտ անկիւնագծին ԱԳ զուգահեռագծին ԱԲԳԴ (Ձև 51) ձգիցին երկու ուղիղ գիծք զուգահեռականք կողմանց զուգահեռագծին, երկու զուգահեռագիծքն ընդ որս ոչ անցանէ անկիւնագիծն միմեանց հաւասարք են:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ΔԱԴԳ=ΔԱԲԳ (92),

վասն այնորիկ և

ճ+ն+ա=ա+ր+դ:

Արդ

ճ=ա (92),

և

ա=դ (92),

ապա ուրեմն նաև

ն=ր:

105. Առաջարկութիւն. — Փոխել զտուեալ զուգահեռագիծն ԱԲԳԴ (Ձև 52) յուղղանկիւն:

Լուծումն. — Կանգնեսցին 'ի վերայ գծին ԱԲ 'ի կէտսն Ա և Բ երկու ուղղահայեաց գիծք, որք անկանիցին 'ի վերայ ուղիղ գծին ԳԴ, կամ 'ի վերայ երկայնութեան նորա 'ի կէտսն Զ և Ե, և ԱԲԵԶ լինիցի ուղղանկիւնն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԶԱԲ=Ո, և ԵԲԱ=Ո, ուրեմն ԶԱԲ+ԵԲԱ=2Ո, վասն այնորիկ և ԶԱ ∥ ԵԲ (54). դարձեալ ԶԳ ∥ ԱԲ, ապա ուրեմն ԱԲԵԶ է զուգահեռագիծ ուղղանկիւնային: Հուսկ յետոյ ԱԲԵԶ=ԱԲԳԴ (101):

Ծանօթ. — Եթէ զուգահեռագիծն ԱԲԳԴ փոխիցի յայլ, որոյ իցէ տուեալ մի անկիւն սուր կամ բութ, 'ի կէտն Ա գծին ԱԲ փոխանակ կազմելոյ զուղիղ անկիւնն ԲԱԶ, կազմիցի անկիւնն տուեալ, և այլն ըստ կարգի:

106. Առաջարկութիւն. — փոխել զզուգահեռագիծն ԱԲԳԴ (Ձև 53) յայլ, որոյ մի կողմն լիցի հաւասար տուեալ ուղիղ գծին Մ:

Լուծում. — Երկայնեսցին ԴԳ և ԱԲ 'ի Ե և 'ի Զ կոյս, մինչև լինել ԳԵ=ԲԶ=Մ, և ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԶԵ և ԶԳ: Երկայնեսցին ԶԳ և ԱԴ մինչև հատանել զմիմեանս 'ի կէտն Է, հուսկ յետոյ 'ի կիտէն Է ձգեսցի զուգահեռական առ ԴԵ մինչև հատանել զերկայնութիւնս գծիցն ԲԳ և ԶԵ 'ի կէտսն Ը և Թ, և ԳԸԹԵ լինիցի զուգահեռագիծն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԳԵ ∥ ԲԶ, և նաև ԳԵ= ԲԶ, վասն որոյ ԲԳԵԶ է զուգահեռագիծ (90): Դարձեալ որովհետև ԴԷ ∥ ԳԸ և ԷԸ ∥ ԴԳ, նաև ԴԷԸԳ է զուգահեռագիծ: Նոյնպէս ԱԷԹԶ և ԳԸԹԵ են զուգահեռագիծք և ԶԷ անկիւնագիծ է զուգահեռագծին ԱԷԹԶ: Հետևաբար ուրեմն ԳԸԹԵ=ԱԲԳԴ (104), և մի կողմն զուգահեռագծին ԳԸԹԵ, այսինքն ԳԵ=Մ:

107. Առաջարկութիւն. — փոխել զեռանկիւնն ԱԲԳ (Ձև 54) 'ի զուգահեռագիծ:

Լուծում. — Հատարակեսցի ԱԲ 'ի Դ (76), և ձգեսցի ԳԴ, 'ի կիտէն Գ ձգեսցի ԳԵ ∥ ԲԴ, և 'ի կիտէն Բ ձգեսցի ԲԵ ∥ ԳԴ, և երկայնեսցին մինչև հատանել զմիմեանս 'ի կէտն Ե, և ԴԲԵԳ լինիցի զուգահեռագիծն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԱԴ=ԲԴ,

ուրեմն

ΔԱԴԳ=ΔԲԴԳ (103. Հետև.).

բայց նաև

ΔԲԵԳ=ΔԲԴԳ (92),

ուրեմն

ΔԱԴԳ=ΔԲԵԳ,

վասն այնորիկ և

ΔԱԴԳ+ΔԲԴԳ=ΔԲԵԳ+ΔԲԴԳ,

այսինքն

ΔԱԲԳ=ԴԲԵԳ:

108. Առաջարկութիւն. — Փոխել զսեղանն ԱԲԳԴ (Ձև 55) 'ի զուգահեռագիծ :

Լուծումն. — Ի սեղանին ԱԲԳԴ լիցի ԱԲ || ԴԳ, հատաբակիցի մին յերկուց ոչ զուգահեռական կողմանց, օրինակ իմն, ԲԳ 'ի կէտն Ե. 'ի կիտէն Ե ձգիցի զուգահեռական առ ԱԴ մինչև հատանել զգիծսն ԱԲ և ԳԴ, կամ զերկայնութիւնս նոցին 'ի կէտսն Զ և Է, ԱԶԷԴ լինիցի զուգահեռագիծն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԳԵ=ԲԵ,

նոյնպէս

ԳԵԷ=ԶԵԲ (40),

և

ԵԳԷ=ԵԲԶ (46),

ուրեմն

ΔԳԵԷ=ΔԲԵԶ (63),

վասն այնորիկ և

ԱԶԵԳԴ+ΔԳԵԷ=ԱԶԵԳԴ+ΔԲԵԶ,

այսինքն

ԱԶԷԴ=ԱԲԳԴ :

Հետևանք Ա. — Եւ զի

ΔԳԵԷ≅ΔԲԵԶ,

ուրեմն

ԳԷ=ԲԶ,

ապա ուրեմն

ԴԷ=ԴԳ+ԳԷ=ԴԳ+ԲԶ.

բայց

ԴԷ=ԱԶ (92),

ապա ուրեմն նաև

ԱԶ=ԴԳ+ԲԶ,

կամ

ԱԶ=$\frac{1}{2}$(ԱԲ+ԴԳ) :

Հետևանք Բ. — Եթէ 'ի սեղանին ԱԲԳԴ ընդ միջին կէտն Ե միոյ յերկուց ոչ զուգահեռական կողմանց ԲԳ ձգիցի ուղիղ գիծն ԵԸ զուգահեռական առ երկու զուգահեռական կողմանս սեղանին, հասարակէ նաև զմիւս կողմն ոչ զուգահեռական և է հաւասար կիսաբովանդակութեան երկուց զուգահեռական կողմանցն. որովհետև ԱԸ$=$ԵԶ, և ԸԴ$=$ԵԷ, բայց ԵԶ$=$ԵԷ, ապա ուրեմն նաև ԱԸ$=$ԸԴ, դարձեալ ԵԸ$=$ԱԶ$=\frac{1}{2}$(ԱԲ$+$ԳԴ):

109. Առաջարկութիւն. — Փոխել զսեղանաձևն ԱԲԳԴ (Ձև 56) 'ի զուգահեռագիծ:

Լուծումն. — Ձգեսցի անկիւնագիծն ԲԴ, 'ի կիտիցն Ա և Գ ձգեսցին երկու զուգահեռականք առ ԲԴ. 'ի կիտիցն Բ և Դ ածեսցին որ զինչ և իցէ երկու ուղիղ գիծք միմեանց զուգահեռականք մինչև հատանել զերկուս առաջին զուգահեռականս 'ի կէտսն Ե, Է, Ը, Զ. հուսկ յետոյ հասարակեսցի ԵԶ 'ի Թ և ձգեսցի ԹԺ $\parallel$ ԷԵ, և ԵԹԺԷ լինեսցի զուգահեռագիծն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԷԵ $\parallel$ ԶԸ, ԵԶ $\parallel$ ԲԴ $\parallel$ ԷԸ և ԹԺ $\parallel$ ԵԷ $\parallel$ ԶԸ, վասն որոյ ԵԷԸԶ, ԵԲԴԶ, ԷԲԴԸ, ԵԹԺԷ, ԺԹԶԸ են զուգահեռագիծք: Արդ

$$\Delta\text{ԲԳԴ}=\tfrac{1}{2}\text{ԵԲԴԶ} \quad (102),$$

նոյնպէս

$$\Delta\text{ԱԲԴ}=\tfrac{1}{2}\text{ԷԲԴԸ},$$

ապա ուրեմն

$$\Delta\text{ԲԳԴ}+\Delta\text{ԱԲԴ}=\tfrac{1}{2}\text{ԵԲԴԶ}+\tfrac{1}{2}\text{ԷԲԴԸ},$$

այսինքն

$$\text{ԱԲԳԴ}=\tfrac{1}{2}\text{ԵԷԸԶ}:$$

Դարձեալ որովհետև

$$\text{ԵԹ}=\text{ԹԶ},$$

ուրեմն

$$\text{ԵԹԺԷ}=\text{ԺԹԶԸ} \quad (101).$$

վասն այնորիկ նաև

$$\text{ԵԹԺԷ}=\tfrac{1}{2}\text{ԵԷԸԶ}:$$

Հետևաբար

$$\text{ԱԲԳԴ}=\text{ԵԹԺԷ}:$$

110. Առաջարկութիւն. — Փոխել զքառակողմն ԱԲԳԴ (Ձև 57) յեռանկիւն:

Լուծումն. — Ձգեսցի անկիւնագիծն ԲԴ և 'ի կիտէն Գ զուգահեռական մի առ ԲԴ մինչև հատանել զերկայնութիւն գծին ԱԲ 'ի կէտն Ե. հուսկ յետոյ ձգիցի ԴԵ, և ԱԴԵ լինիցի եռանկիւնն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԳԵ ∥ ԲԴ,

ուրեմն

ΔԲԴԳ=ΔԲԴԵ (103):

վասն որոյ

ΔԱԲԴ+ΔԲԴԳ=ΔԱԲԴ+ΔԲԴԵ,

այսինքն

ԱԲԳԴ=ΔԱԴԵ:

111. Առաջարկութիւն. — Փոխել զոր ինչ և իցէ բազմանկիւնի ԱԲԳԴԵԶ (Ձև 58) յայլ, որոյ մի կողմն պակաս իցէ:

Լուծումն. — Որ ինչ և իցէ անկիւնագծիւ ԲԴ հատանիցի 'ի բաց 'ի բազմանկիւնէն եռանկիւնն ԲԳԴ. 'ի Գ գագաթանէ նորին ձգիցի զուգահեռական մի առ անկիւնագիծն ԲԴ մինչև հատանել զերկայնութիւն միոյ յերկուց կողմանց բազմանկեանն մերձ կցելոց առ ԲԴ, օրինակ իմն գծին ԵԴ 'ի կէտն Է. հուսկ յետոյ ձգիցի ԲԷ, և ԱԲԷԵԶ լինիցի բազմանկիւնին խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԳԷ ∥ ԲԴ,

ուրեմն

ΔԲԳԴ=ΔԲԷԴ (103),

վասն որոյ

ԱԲԴԵԶ+ΔԲԳԴ=ԱԲԴԵԶ+ΔԲԷԴ.

այսինքն

ԱԲԳԴԵԶ=ԱԲԷԵԶ:

Եւ զի 'ի բազմանկեան ԱԲԷԵԶ փոխանակ կողմանն ԲԳ բազմանկեանն ԱԲԳԴԵԶ գտանի կողմն ԲԷ, և փոխանակ երկուց կողմանցն ԳԴ և ԴԵ գտանի միայն կողմն ԷԵ, վասն որոյ բազմանկիւնին ԱԲԷԵԶ ունի մի կողմն պակաս քան զբազմանկիւնին ԱԲԳԴԵԶ:

Հետևանք Ա. — Որովհետև մարթ է զբազմանկիւնին, զոր գտաք, դարձեալ փոխել յայլ բազմանկիւն, որ միով կողմամբ ՚նուաղագոյն իցէ, զորին զհետ գայ եթէ գուցէ հնար զամենայն բազմանկիւն փոխել յեռանկիւն: Զոր օրինակ, եթէ խնդրիցի փոխել ութանկիւն՝ յեռանկիւն փոխիցի, նախ յեօթնանկիւն, եօթնանկիւնն՝ ՚ի վեցանկիւն, վեցանկիւնն՝ ՚ի հնգանկիւն, հնգանկիւնն՝ ՚ի քառանկիւն, և հուսկ յետոյ քառանկիւնն՝ յեռանկիւն:

Հետեւանք Բ. — Եւ զի ըստ նախընթաց հետեւանաց մարթ է զամենայն ուղղագիծ ձև փոխել յեռանկիւն, և որ զինչ և իցէ եռանկիւն ՚ի զուգահեռագիծ (107). և զուգահեռագիծն՝ յուղղանկիւն (108). վասն որոյ որ զինչ և իցէ ձև ուղղագիծ մարթի փոխել ՚ի զուգահեռագիծ, և մանաւանդ յուղղանկիւն:

ԳԼՈՒԽ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԵԱՆ

Առաջարկութիւնք :

112 . Ծանօթութիւն . — Երկու համասեռ քանակութեանց առ միմեանս փոխոխ յարաբերութիւն ըստ մեծութեանց նոցին , սա առընչութիւն կամ բան :

Այս յարաբերութիւն կրկնակի առնուլ լինի 'ի քնին :

ա . Եթէ որչափ ինչ առաւելուցու կամ նուազիցի երկրորդ քանակութիւնն քան զառաջինն :

բ . Եթէ քանիցս առաւելուցու կամ նուազիցի երկրորդ քանակութիւնն քան զառաջինն :

Յայսմ կրկնակի յարաբերութեան երկուց քանակութեանց ընդ միմեանս զմտաւ ածի երկրորդն յառաջնոյն ծագեալ, յառաջին դէպս յաւելլով կամ բառնալով յառաջին քանակութենէն որ զինչ և իցէ այլ քանակութիւն 'ի ձեռն յաւելման կամ բարձման , և յերկրորդ դէպս առաջին քանակութիւնն բազում անգամ կրկնապատկելով կամ 'ի մասունս հաւասարս բաժանելով 'ի ձեռն բազմապատկութեան կամ բաժանման :

Ուրեմն առընչութիւն է երկու համասեռ քանակութեանց , խնդրել եթէ որպէս արդեօք մին 'ի միւսմէն ծագեալ իցէ : Երկու քանակութիւնքն որ ընդ միմեանս յարաբերին կոչին անդամք առընչութեան , առաջինն սա նախընթաց , իսկ երկրորդն հետևորդ : Յառաջիկայ քննութիւնս մեր համարիմք զերկրորդն յառաջնոյն ծագեալ:

Առեալ 'ի քնին եթէ որպէս արդեւք հետեւորդն 'ի նախընթացէն ծագեալ իցէ յաւելմամբ կամ բարձմամբ, որով եթէ որչափ ինչ առաւելուցու կամ նուազիցի երկրորդ անդամն քան զառաջինն, առընչութիւնն ասի Թուաբանական. բայց ընդհակառակն առեալ 'ի քնին եթէ քանիցս առաւելուցու կամ նուազիցի երկրորդ անդամն քան զառաջինն, որով եթէ որպէս արդեւք ծագիցի հետեւորդն 'ի նախընթացէն բազմապատկութեամբ կամ բաժանմամբ, առընչութիւն ասի Երկրաչափական:

Մեք յայսմ վայրի զերկրաչափական առընչութենէ և եթ ճառեմք, զոր պարզապէս առանց վերադրի առընչութիւն կոչեմք:

Նշան երկրաչափական առընչութեան է այս (:), որոյ ընդ ձախմէ դնի նախընթացն Ա և ընդ աջմէ հետեւորդն Բ, որպէս ինչ Ա:Բ, և ընթերցեալ լինի զայս ձև օրինակի. եթէ Ա առ ինչ է ընդ Բ կամ համառօտիւք իմն եթէ Ա ընդ Բ, որ է ասել եթէ Բ ծագեալ է 'ի քանակութենէն Ա բազմապատկութեամբ կամ բաժանմամբ, ուրեմն Բ է որ զինչ և իցէ բազմապատիկ կամ որ զինչ և իցէ մասն քանակութեանն Ա:

113. Ծանօթութիւն. — Թիւն որ ցուցանիցէ եթէ քանիցս երկրորդ անդամն առընչութեան առաւելուցու կամ նուազիցի քան զառաջինն, որով եթէ քանիցս առաջին անդամն կրկնապատկեալ իցէ և կամ 'ի քանի մասունս հաւասարս բաժանեալ իցէ առ 'ի տալ զերկրորդն, անուանեալ կոչի յայտարար:

Որպէս եթէ յ իցէ յայտարար առընչութեանն Ա:Բ, ուրեմն հարկ է զի իցէ $Բ=յԱ$, կամ $Բ=\frac{Ա}{յ}$: Որովհետեւ նոյն է եթէ քանակութիւն ինչ Ա բաժանիցի ընդ 2, 3, 4, 5, ... փ, կամ բազմապատկիցի ընդ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \frac{1}{փ}$, վասն որոյ եթէ Բ ծագեալ իցէ 'ի բաժանմանէ քանակութեանն Ա ընդ յ, ապա ծագեալ իցէ ևս 'ի բազմապատկութենէ քանակութեանն Ա ընդ $\frac{1}{յ}$: Ընդհանրապէս որ զինչ և իցէ բաժամումն յոր զինչ և իցէ թիւ Տ հաւասար է բազմապատկութեան այնպիսի կոտորակաւ որոյ համարիչ իցէ 1 և անուանիչ թիւն Տ: Ուրեմն մարթ է ընդհանրապէս համարել եթէ երկրորդ անդամ առընչութեան ծագիցի յառաջնոյն բազմապատկութեամբ 'ի ձեռն յայտարարին Տ, Ն, Ո, Պ, ... այլովքն հանդերձ, եթէ Տ, Ն, Ո, Պ, ... ցուցանիցեն ոչ միայն թիւս ամբողջականս այլ նաև կոտորակս: Վասն որոյ յայտարար առընչութեան է թիւն որով բազմապատկիցի առաջին անդամն 'ի տալ զերկրորդն:

Ծանօթ. — Ի զանազանել զանդամս մի և նոյն առընչութեան, որք մարթին նշանակել ոչ միայն քանակութիւնս թուականս, այլ նաև միջոցի, դրոշմեմք զնախին գլխագրովք, իսկ զյայտարարն նօտրգրովք:

114. Ծանօթութիւն. — Երկու առընչութիւնք հաւասարք են միմեանց, եթէ երկոցունցն ևս երկրորդ անդամն նոյն բազմապատիկ իցէ կամ նոյն մասն իցէ առաջնոյն. այսինքն եթէ երկոցունցն ևս երկրորդ անդամն ծագեալ իցէ 'ի բազմապատկութենէ կամ 'ի բաժանմանէ առաջնոյն մի և նոյն յայտարարաւ: Եթէ անուանեսցուք յայտարար ըստ (113) համարոյ թիւն որով բազմապատկիցի առաջինն առ 'ի տալ զերկրորդն, մարթ է համառօտիւք լինել ասել եթէ առընչութիւնք հաւասար են միմեանց եթէ մի և նոյն իցէ յայտարարն: Հաւասարութիւն երկու առընչութեանց անուանեալ կոչի համեմատութիւն: Որպէս եթէ առընչութիւնն Ա:Բ հաւասար իցէ առընչութեանն Գ:Դ, ծագիցի համեմատութիւնն Ա:Բ=Գ:Դ: Ապա ուրեմն չորք քանակութիւնք Ա, Բ, Գ, Դ կազմեն համեմատութիւն կամ են համեմատականք եթէ երկրորդ քանակութիւնն իցէ նոյն բազմապատիկ կամ նոյն մասն առաջնոյն, որպէս չորրորդն երրորդին. ապա ուրեմն եթէ Բ=ՏԱ նոյնպէս և Դ=ՏԳ, ուր Տ մարթի լինել թիւ ամբողջական կամ կոտորակ: Առաջին և չորրորդ անդամ համեմատութեանն Ա:Բ=Գ:Դ, այսինքն Ա և Դ ասին ծայրք կամ ծայրինք. երկրորդն և երրորդն, այսինքն Բ և Գ, միջք կամ միջինք: Նոյնպէս առաջին անդամն ընդ երրորդին, այսինքն Ա ընդ Գ, ասին նախընթացք, և երկրորդն ընդ չորրորդին, այսինքն Բ ընդ Գ, կոչին հետևորդք: Եթէ երկու ներքին անդամքն միմեանց հաւասարք լիցին, անուանեալ կոչի համեմատութիւնն շարունակ. որպէս Ա:Բ=Բ:Գ շարունակ համեմատութիւն է: Բազում անգամ շարունակ համեմատութիւնն համառօտիւք լինի գրել այսպէս՝ Ա:Բ:Գ: Չորրորդ անդամն, այսինքն Դ, յառաջնում համեմատութեան ասի առաջին համեմատական. միջին անդամն շարունակ համեմատութեան, այսինքն Բ, կոչի միջին համեմատական. և վերջին անդամն շարունակ համեմատութեան, այսինքն Գ, ասի երրորդ համեմատական:

115. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու առընչութիւնք Ա:Բ և Ե:Զ հաւասար լիցեն միում երրորդի Գ:Դ, հաւասար են և միմեանց: Այսինքն եթէ

Ա:Բ=Գ:Դ,

և

Ե:Զ=Գ:Դ,

նաև

Ա:Բ=Ե:Զ:

Ապացուցութիւն. — Իցէ Բ=ʃԱ: Որովհետև

Ա:Բ=Գ:Դ,

ուրեմն

Դ=ʃԳ (114).

դարձեալ որովհետև

Ե:Զ=Գ:Դ,

ուրեմն

Զ=ʃԵ (114):

Արդ որովհետև

Բ=ʃԱ,

և

Զ=ʃԵ,

ուրեմն

Ա:Բ=Ե:Զ (114):

Հետևանք. — Երկու առընչութիւնք միմեանց հաւասարք են, եթէ իւրաքանչիւրն ՚ի նոցանէ հաւասար է միում յերկուց հաւասար առընչութեանց Ե:Զ և Է:Ը: Ապա ուրեմն եթէ

Ա : Բ = Ե : Զ ,

և

Գ : Դ = Է : Ը ,

և նոյնպէս եթէ

Ե : Զ = Է : Ը ,

նաև

Ա : Բ = Գ : Դ ։

Քանզի որովհետև

Ա : Բ = Ե : Զ ,

և

Ե : Զ = Է : Ը ,

նաև

Ա : Բ = Է : Ը   (115) ։

արդ նաև

Գ : Դ = Է : Ը ,

վասն այնորիկ և

Ա : Բ = Գ : Դ ։

116. Հայեցողութիւն. — *Եթէ երկու քանակութիւնք* Ա *և* Բ *միմեանց հաւասարք իցեն 'ի նմին առընչութեան առ երրորդ իմն քանակութիւն* Գ, *և երրորդ իմն քանակութիւն* Գ *է առ նոսա 'ի նմին առընչութեան ։ Այսինքն եթէ*

Ա = Բ ,

նաև

Ա : Գ = Բ : Գ ,

և

Գ : Ա = Գ : Բ ։

Ապացուցութիւն ։ — *Իցէ* Գ = √Ա . *արդ որովհետև*

Ա = Բ ,

նաև

√Ա = √Բ ,

ուրեմն և

Գ = √Բ ,

վասն այնորիկ և

Ա : Գ = Բ : Գ   (114) ։

Դարձեալ իցէ Ա = ⁿԳ . *որովհետև*

Ա=Բ,

նաև

Բ=^{ն}Գ,

վասն այնորիկ և

Գ:Ա=Գ:Բ (114):

117 · Հաւեսողութիւն · — Եթէ երկու քանակութիւնք Ա և Բ լիցին 'ի նմին աբնչութեան առ երրորդ իմն քանակութիւն Գ, և եթէ այս երրորդ քանակութիւն լիցէ 'ի նմին աբնչութեան առ նոսա, երկու քանակութիւնքն են միմեանց հաւասարք: Այսինքն եթէ

Ա:Գ=Բ:Գ,

կամ

Գ:Ա=Գ:Բ,

նաև

Ա=Բ:

Ապացուցութիւն · — Իցէ Գ=$^{\int}$Ա · լինիցի նաև

Գ=$^{\int}$Բ (114),

ուրեմն

$^{\int}$Ա=$^{\int}$Բ,

վասն այնորիկ և

Ա=Բ:

Նոյնպէս իցէ դարձեալ

Ա=^{ն}Գ,

լինիցի նաև

Բ=^{ն}Գ,

վասն այնորիկ և

Ա=Բ:

118 · Հաւեսողութիւն · — Եթէ փոփոխիցին չորք անդամք համեմատութեանս Ա:Բ=Գ:Դ, այնպէս զի երկոքին ծայրք Ա և Դ մնայցեն ծայրինք, կամ երկոքին միանդամայն լինիցին միջինք · նոյնպէս երկոքին մէջք Բ և Գ՝ մնայցեն միջինք, կամ երկոքին միանդամայն լինիցին ծայրինք, չորք անդամքն յայս ամենայն փոփոխմունս հաւասարապէս կան մնան համեմատականք: Այսինքն եթէ

1) Ա:Բ=Գ:Դ

նաև

2) Ա:Գ=Բ:Դ,

3) Բ:Ա=Դ:Գ,

4) Բ:Դ=Ա:Գ,

5) Գ:Ա=Դ:Բ,

6) Գ:Դ=Ա:Բ,

7) Դ:Բ=Գ:Ա,

8) Դ:Գ=Բ:Ա:

Ապացուցութիւն. — Իցէ

Ա:Բ=Գ:Դ,

և

Բ=ʃԱ,

ուրեմն

Դ=ʃԳ (114):

Արդ իցէ

Գ=պԱ,

լինիցի նաև

ʃԳ=ʃպԱ,

=պʃԱ,

բայց նաև

ʃԱ=Բ,

ուրեմն

պʃԱ=պԲ,

ապա նաև

ʃԳ=պԲ.

բայց

Դ=ʃԳ,

ուրեմն նաև

Դ=պԲ:

Ապա ուրեմն եթէ

Գ=պԱ,

լինիցի նաև

Դ=պԲ:

ապա

Ա:Գ=Բ:Դ (114),

որով հաւասարի համեմատութիւնն 2 ,

Դարձեալ որովհետև

$$Բ = յԱ ,$$

և

$$Դ = յԳ ,$$

լինիցի նաև

$$Ա = \frac{1}{յ} Բ ,$$

և

$$Գ = \frac{1}{յ} Դ ,$$

վասն այնորիկ և

$$Բ : Ա = Դ : Գ ,$$

որով հաւասարի համեմատութիւնն 3 ։

Քանզի որովհետև 'ի համեմատութենէն 1) հետևեցուցաւ ճշմարիտ համեմատութիւնն 2) փոփոխմամբ միջին անդամոց, նոյնպէս նաև ճշմարիտ համեմատութիւնն 3) փոփոխմամբ նախընթացից և հետևորդաց իւրաքանչիւր առընչութեան, ճշմարիտ է նաև համեմատութիւնն 4), քանզի ծագեալ է 'ի համեմատութենէն 3) փոփոխմամբ միջին անդամոց։ Նոյնպէս նաև 'ի համեմատութենէն 2) ծագէ համեմատութիւնն 5) փոփոխմամբ նախընթացից և հետևորդաց. 'ի համեմատութենէն 4) ծագէ համեմատութիւնն 7) փոփոխմամբ նախընթացից և հետևորդաց. և 'ի համեմատութենէն 7) ծագէ համեմատութիւնն 8) փոփոխմամբ միջին անդամոց։ Ուրեմն իւրաքանչիւրն 'ի համեմատութեանց աստի ճշմարիտ է, վասն զի նախընթացն յորմէ մի մի 'ի նոցանէ ծագեցաւ, է ճշմարիտ։

119. Հայեցողութիւն. — Եթէ չորք քանակութիւնք Ա, Բ, Գ, Դ իցեն միմեանց համեմատականք, առաջինն կամ երկրորդն բաղդատի առ բովանդակութիւն առաջնոյն և երկրորդին, որպէս երրորդն կամ չորրորդն բաղդատի առ բովանդակութիւն երրորդին և չորրորդին. և փոխադարձաբար բովանդակութիւն առաջնոյն և երկրորդին բաղդատի առ առաջինն կամ առ երկրորդն, որպէս բովանդակութիւն երրորդին և չորրորդին բաղդատի առ երրորդն կամ առ չորրորդն։ Այսինքն եթէ իցէ

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

նաև

$$\text{Ա} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Գ} : \text{Գ}+\text{Դ},$$
$$\text{Բ} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Դ} : \text{Գ}+\text{Դ},$$
$$\text{Ա}+\text{Բ} : \text{Ա} = \text{Գ}+\text{Դ} : \text{Գ},$$
$$\text{Ա}+\text{Բ} : \text{Բ} = \text{Գ}+\text{Դ} : \text{Դ}:$$

Ապացուցութիւն. — Իցէ

$$\text{Բ} = \text{ſ}\,\text{Ա},$$

լինիցի նաև

$$\text{Դ} = \text{ſ}\,\text{Գ} \quad (114).$$

ուրեմն

$$\text{Ա}+\text{Բ} = \text{Ա}+\text{ſ}\,\text{Ա},$$
$$= (1+\text{ſ})\text{Ա},$$

և

$$\text{Գ}+\text{Դ} = \text{Գ}+\text{ſ}\,\text{Գ},$$
$$= (1+\text{ſ})\text{Գ},$$

ապա ուրեմն

$$\text{Ա} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Գ} : \text{Գ}+\text{Դ} \quad (114):$$

Դարձեալ որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Բ} : \text{Ա} = \text{Դ} : \text{Գ} \quad (118),$$

ապա ուրեմն ըստ նախընթացին

$$\text{Բ} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Դ} : \text{Գ}+\text{Դ}:$$

Հուսկ յետոյ, որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Գ} : \text{Գ}+\text{Դ},$$

և

$$\text{Բ} : \text{Ա}+\text{Բ} = \text{Դ} : \text{Գ}+\text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա}+\text{Բ} : \text{Ա} = \text{Գ}+\text{Դ} : \text{Գ},$$

և

$$\text{Ա}+\text{Բ} : \text{Բ} = \text{Գ}+\text{Դ} : \text{Դ} \quad (118):$$

120. Հայեցողութիւն. — *Եթէ չորք քանակութիւնք Ա, Բ, Գ, Դ լիցին միմեանց համեմատականք, առաջինն կամ երկրորդն բաղդատի առ բովանդակութիւն առաջնոյն և երկրոր-*

գին, որպէս երկրորդն կամ չորրորդն բաղդատի առ բովանդակութիւն երկրորդին և չորրորդին. և փոխադարձաբար բովանդակութիւն առաջնոյն և երրորդին բաղդատի առ առաջինն կամ առ երրորդն, որպէս բովանդակութիւն երկրորդին և չորրորդին բաղդատի առ երկրորդն կամ առ չորրորդն։ Այսինքն եթէ իցէ

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

նաև

$$\text{Ա} : \text{Ա}+\text{Գ} = \text{Բ} : \text{Բ}+\text{Դ},$$
$$\text{Գ} : \text{Ա}+\text{Գ} = \text{Դ} : \text{Բ}+\text{Դ},$$
$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Ա} = \text{Բ}+\text{Դ} : \text{Բ},$$
$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Գ} = \text{Բ}+\text{Դ} : \text{Դ}:$$

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա} : \text{Գ} = \text{Բ} : \text{Դ} \quad (118),$$

ուրեմն

$$\text{Ա} : \text{Ա}+\text{Գ} = \text{Բ} : \text{Բ}+\text{Դ} \quad (119):$$

Ըստ նմին օրինակի

$$\text{Գ} : \text{Ա}+\text{Գ} = \text{Դ} : \text{Բ}+\text{Դ},$$
$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Ա} = \text{Բ}+\text{Դ} : \text{Բ},$$
$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Գ} = \text{Բ}+\text{Դ} : \text{Դ}:$$

121. Հայեցողութիւն. — Եթէ բաղում առընչութիւնք Ա : Բ, Գ : Դ, Ե : Զ, . . . և այլն իցեն միմեանց հաւասարք, բովանդակութիւն ամենայն նախընթացից բաղդատի առ բովանդակութիւն ամենայն հետևորդաց, որպէս իւրաքանչիւր նախընթաց բաղդատի առ հետևորդ իւր։ Այսինքն եթէ իցէ

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ} = \text{Ե} : \text{Զ},$$

նաև

$$\text{Ա}+\text{Գ}+\text{Ե} : \text{Բ}+\text{Դ}+\text{Զ} = \text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ} = \text{Ե} : \text{Զ}:$$

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Գ} = \text{Բ}+\text{Դ} : \text{Դ} \quad (120),$$

ուրեմն

$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Բ}+\text{Դ}=\text{Գ} : \text{Դ} \quad (118).$$

բայց

$$\text{Գ} : \text{Դ}=\text{Ե} : \text{Զ},$$

ապա ուրեմն

$$\text{Ա}+\text{Գ} : \text{Բ}+\text{Դ}=\text{Ե} : \text{Զ} \quad (115).$$

վասն այնորիկ և

$$\text{Ա}+\text{Գ}+\text{Ե} : \text{Ե}=\text{Բ}+\text{Դ}+\text{Զ} : \text{Զ} \quad (120),$$

ուրեմն

$$\text{Ա}+\text{Գ}+\text{Ե} : \text{Բ}+\text{Դ}+\text{Զ}=\text{Ե} : \text{Զ} \quad (118).$$

արդ. որովհետև

$$\text{Ե} : \text{Զ}=\text{Ա} : \text{Բ}=\text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա}+\text{Գ}+\text{Ե} : \text{Բ}+\text{Դ}+\text{Զ}=\text{Ա} : \text{Բ}=\text{Գ} : \text{Դ}=\text{Ե} : \text{Զ}:$$

122. Հայեցողութիւն. — *Եթէ չորք քանակութիւնք* Ա, Բ, Գ, Դ *լիցեն միմեանց համեմատականք, առաջինն կամ երկրորդն բաղդատի առ տարբերութիւն առաջնոյն և երկրորդին, որպէս երրորդն կամ չորրորդն բաղդատի առ տարբերութիւն երրորդին և չորրորդին. և փոխադարձաբար տարբերութիւն առաջնոյն և երկրորդին բաղդատի առ առաջինն կամ առ երկրորդն, որպէս տարբերութիւն երրորդին և չորրորդին բաղդատի առ երրորդն կամ առ չորրորդն: Այսինքն եթէ իցէ*

$$\text{Ա} : \text{Բ}=\text{Գ} : \text{Դ},$$

նաև

$$\text{Ա} : \frac{(\text{Ա}-\text{Բ})}{(\text{Բ}-\text{Ա})}=\text{Գ} : \frac{(\text{Գ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Գ})}$$

$$\text{Բ} : \frac{(\text{Ա}-\text{Բ})}{(\text{Բ}-\text{Ա})}=\text{Դ} : \frac{(\text{Գ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Գ})}$$

$$\frac{(\text{Ա}-\text{Բ})}{(\text{Բ}-\text{Ա})} : \text{Ա}=\frac{(\text{Գ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Գ})} : \text{Գ}$$

$$\frac{(\text{Ա}-\text{Բ})}{(\text{Բ}-\text{Ա})} : \text{Բ}=\frac{(\text{Գ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Գ})} : \text{Դ}:$$

Ապացուցութիւն. — *իցէ*

$$\text{Ա}>\text{Բ},$$

և

$$Բ=ʃԱ,$$

լինիցի նաև

$$Գ>Դ,$$

և

$$Դ=ʃԳ \quad (114),$$

ուրեմն

$$Ա-Բ=Ա-ʃԱ,$$
$$=(1-ʃ)Ա,$$

և

$$Գ-Դ=Գ-ʃԳ,$$
$$=(1-ʃ)Գ.$$

վասն այնորիկ և

$$Ա:Ա-Բ=Գ:Գ-Դ \quad (114):$$

Իսկ դարձեալ

$$Ա<Բ,$$

և

$$Բ=ʃԱ,$$

լինիցի նաև

$$Գ<Դ,$$

և

$$Դ=ʃԳ.$$

ուրեմն

$$Բ-Ա=ʃԱ-Ա,$$
$$=(ʃ-1)Ա,$$

և

$$Դ-Գ=ʃԳ-Գ,$$
$$=(ʃ-1)Գ,$$

վասն այնորիկ և

$$Ա:Բ-Ա=Գ:Դ-Գ \quad (114):$$

Դարձեալ որովհետև

$$Ա:Բ=Գ:Դ,$$

լինիցի նաև

$$Բ:Ա=Դ:Գ \quad (118).$$

վասն այնորիկ եթէ

Բ>Ա,

ըստ նախընթացին

Բ : Բ—Ա=Դ : Դ—Գ.

և եթէ

Բ<Ա

Բ : Ա—Բ=Դ : Գ—Դ:

Հուսկ յետոյ 'ի փոփոխմանէ անդամոց համեմատութեանս այսորիկ ըստ (118) *համարոյ ծագեն և որք զնի*

Ա—Բ : Ա=Գ—Դ : Գ,

Բ—Ա : Ա=Դ—Գ : Գ,

Ա—Բ : Բ=Գ—Դ : Դ,

Բ—Ա : Բ=Դ—Գ : Դ,

ըստ որում լիցի

Ա>Բ,

կամ

Ա<Բ:

123 · Հայեցողութիւն. — *Եթէ չորք քանակութիւնք* Ա, Բ, Գ, Դ *լիցին համեմատականք, առաջինն կամ երրորդն բաղդատի առ տարբերութիւն առաջնոյն և երրորդին, որպէս երկրորդն կամ չորրորդն բաղդատի առ տարբերութիւն երկրորդին և չորրորդին. և փոխադարձաբար տարբերութիւն առաջնոյն և երրորդին բաղդատի առ առաջինն կամ առ երրորդն, որպէս տարբերութիւն երկրորդին և չորրորդին բաղդատի առ երկրորդն կամ առ չորրորդն: Այսինքն եթէ լիցի*

Ա : Բ=Գ : Դ,

լինիցի նաև

$$\text{Ա} : \frac{(\text{Ա}-\text{Գ})}{(\text{Գ}-\text{Ա})} = \text{Բ} : \frac{(\text{Բ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Բ})}$$

$$\text{Գ} : \frac{(\text{Ա}-\text{Գ})}{(\text{Գ}-\text{Ա})} = \text{Դ} : \frac{(\text{Բ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Բ})}$$

$$\frac{(\text{Ա}-\text{Գ})}{(\text{Գ}-\text{Ա})} : \text{Ա} = \frac{(\text{Բ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Բ})} : \text{Բ}$$

$$\frac{(\text{Ա}-\text{Գ})}{(\text{Գ}-\text{Ա})} : \text{Գ} = \frac{(\text{Բ}-\text{Դ})}{(\text{Դ}-\text{Բ})} : \text{Դ} :$$

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

Ա : Բ ═ Գ : Դ,

նաև

Ա : Գ ═ Բ : Դ (118),

յորմէ ծագեն անմիջաբար համեմատութիւնքն որ 'ի վերոյ (122)։

124. Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի համեմատութեան Ա : Բ ═ Գ : Դ մի արտաքին և մի ներքին անդամ որ զինչ և իցէ թուով առաւելուցուն կամ որ զինչ և իցէ թուով բազմապատկիցին, համեմատութիւնն ոչ փոփոխի։ Այսինքն եթէ իցէ

Ա : Բ ═ Գ : Դ,

լինիցի նաև

Ա : պԲ ═ Գ : պԴ,

պԱ : Բ ═ պԳ : Դ,

պԱ : պԲ ═ Գ : Դ,

Ա : Բ ═ պԳ : պԴ։

Ապացուցութիւն. — Իցէ դարձեալ

Բ ═ ʃԱ,

վասն այնորիկ և

Դ ═ ʃԳ (114).

ուրեմն

պԲ ═ պʃԱ,

և

պԴ ═ պʃԳ,

ապա ուրեմն

Ա : պԲ ═ Գ : պԴ (114)։

Դարձեալ որովհետև

Բ ═ ʃԱ,

լինիցի նաև

պԲ ═ պʃԱ,
═ ʃպԱ,

արդ որովհետև նաև

Դ ═ ʃԳ,

ապա ուրեմն

պԱ : պԲ ═ Գ : Դ (114)։

Դարձեալ որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Գ} : \text{Դ} = \text{Ա} : \text{Բ} \quad (118) \cdot$$

ուրեմն ըստ նախընթացին

$$\text{պ}\text{Գ} : \text{պ}\text{Դ} = \text{Ա} : \text{Բ},$$

վասն այնորիկ և

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{պ}\text{Գ} : \text{պ}\text{Դ} \quad (118) :$$

Հուսկ յետոյ որովհետև

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա} : \text{Գ} = \text{Բ} : \text{Դ} \quad (118),$$

ուրեմն ըստ նախընթացին

$$\text{պ}\text{Ա} : \text{պ}\text{Գ} = \text{Բ} : \text{Դ},$$

վասն այնորիկ և

$$\text{պ}\text{Ա} : \text{Բ} = \text{պ}\text{Գ} : \text{Դ} \quad (118) :$$

125 . Հաստատութիւն . — *Եթէ ՚ի համեմատութեան* $\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ}$ *մի արտաքին և մի ներքին անգամ որ զինչ և իցէ ան֊գամ նուազիցի, կամ յոր զինչ և իցէ թիւ բաժանիցի, համե֊մատութիւնն ոչ փոփոխի : Այսինքն եթէ իցէ*

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

նաև

$$\text{Ա} : \frac{1}{\text{պ}}\text{Բ} = \text{Գ} : \frac{1}{\text{պ}}\text{Դ},$$

$$\frac{1}{\text{պ}}\text{Ա} : \frac{1}{\text{պ}}\text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ},$$

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \frac{1}{\text{պ}}\text{Գ} : \frac{1}{\text{պ}}\text{Դ},$$

$$\frac{1}{\text{պ}}\text{Ա} : \text{Բ} = \frac{1}{\text{պ}}\text{Գ} : \text{Դ} :$$

Ապացուցութիւն . — Իցէ

$$\text{Բ} = {}^{ʃ}\text{Ա},$$

լինիցի նաև

$$\text{Դ} = {}^{ʃ}\text{Գ} \quad (114) \cdot$$

ուրեմն

$$\frac{1}{պ}Բ=\frac{1}{պ}ʃԱ=\frac{ʃ}{պ}Ա,$$

և

$$\frac{1}{պ}Դ=\frac{1}{պ}ʃԳ=\frac{ʃ}{պ}Գ,$$

ապա ուրեմն

$$Ա:\frac{1}{պ}Բ=Գ:\frac{1}{պ}Դ\quad(114):$$

Դարձեալ որովհետև

$$Բ=ʃԱ,$$

լինիցի նաև

$$\frac{1}{պ}Բ=\frac{1}{պ}ʃԱ,$$

$$=ʃ\frac{1}{պ}Ա:$$

Արդ. որովհետև նաև

$$Դ=ʃԳ,$$

ուրեմն

$$\frac{1}{պ}Ա:\frac{1}{պ}Բ=Գ:Դ\quad(114):$$

Դարձեալ որովհետև

$$Ա:Բ=Գ:Դ,$$

լինիցի նաև

$$Գ:Դ=Ա:Բ\quad(118).$$

ուրեմն ըստ նախընթացին

$$\frac{1}{պ}Գ:\frac{1}{պ}Դ=Ա:Բ,$$

վասն այնորիկ և

$$Ա:Բ=\frac{1}{պ}Գ:\frac{1}{պ}Դ\quad(118):$$

Հուսկ յետոյ, որովհետև

$$Ա:Բ=Գ:Դ,$$

լինիցի նաև

$$\text{Ա} : \text{Գ} = \text{Բ} : \text{Դ} \quad (118) .$$

Ուրեմն ըստ նախընթացին

$$\frac{1}{\text{պ}}\text{Ա} : \frac{1}{\text{պ}}\text{Գ} = \text{Բ} : \text{Դ} ,$$

վասն այնորիկ և

$$\frac{1}{\text{պ}}\text{Ա} : \text{Բ} = \frac{1}{\text{պ}}\text{Գ} : \text{Դ} \quad (118) :$$

126. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու համեմատութիւնք այնպիսի լինեն, զի առաջին և երրորդ անդամք առաջնոյն լինեն հաւասարք առաջին և երրորդ անդամոց երկրորդին. առաջին անդամն երկոցունց համեմատութեանց բաղդատի առ բովանդակութիւն երկրորդ անդամոց երկոցունցն, որպէս երրորդ անդամն երկուց համեմատութեանց բաղդատի առ բովանդակութիւն չորրորդ անդամոց երկոցունցն : Այսինքն եթէ իցէ

$$\text{Ա} : \text{Բ} = \text{Գ} : \text{Դ} ,$$

և

$$\text{Ա} : \text{Ե} = \text{Գ} : \text{Զ} ,$$

նաև

$$\text{Ա} : \text{Բ} + \text{Ե} = \text{Գ} : \text{Դ} + \text{Զ} :$$

Ապացուցութիւն. — Իցէ

$$\text{Բ} = {}^{\text{մ}}\text{Ա} ,$$

և

$$\text{Ե} = {}^{\text{ն}}\text{Ա} ,$$

լինիցի նաև

$$\text{Դ} = {}^{\text{մ}}\text{Գ} ,$$

և

$$\text{Զ} = {}^{\text{ն}}\text{Գ} ,$$

ուրեմն

$$\begin{aligned} \text{Բ} + \text{Ե} &= {}^{\text{մ}}\text{Ա} + {}^{\text{ն}}\text{Ա} , \\ &= ({}^{\text{մ}} + {}^{\text{ն}})\text{Ա} , \end{aligned}$$

և

$$\begin{aligned} \text{Դ} + \text{Զ} &= {}^{\text{մ}}\text{Գ} + {}^{\text{ն}}\text{Գ} , \\ &= ({}^{\text{մ}} + {}^{\text{ն}})\text{Գ} . \end{aligned}$$

վասն այնորիկ և

$$\text{Ա} : \text{Բ} + \text{Ե} = \text{Գ} : \text{Դ} + \text{Զ} \quad (114) :$$

127․ Հայեցողութիւն․ — Եթէ երկու համեմատութիւնք այնպիսիք լիցեն, զի երկրորդ անդամ առաջնոյ համեմատութեանն լիցի հաւասար առաջին անդամոյ երկրորդին, և չորրորդ անդամ առաջնոյն լիցի հաւասար երրորդ անդամոյ երկրորդ համեմատութեանն, առաջին անդամ առաջնոյն բաղդատի առ երկրորդ անդամ երկրորդին, որպէս երրորդ անդամ առաջնոյն բաղդատի առ չորրորդ անդամ երկրորդ համեմատութեանն: Այսինքն եթէ լիցի

Ա : Բ = Գ : Դ ,

և

Բ : Ե = Դ : Զ ,

նաև

Ա : Ե = Գ : Զ :

Ապացուցութիւն․ — Լիցի

Բ = մԱ ,

և

Ե = նԲ ,

լինիցի նաև

Դ = մԳ

և

Զ = նԴ (114):

Արդ որովհետև

Ե = նԲ ,

և

Բ = մԱ ,

ուրեմն

Ե = նմԱ ․

դարձեալ որովհետև

Զ = նԴ

և

Դ = մԳ ,

ուրեմն

Զ = նմԳ ,

վասն այնորիկ և

Ա : Ե = Դ : Զ (114)։

ԳԼՈՒԽ ՎԵՑԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ՆՄԱՆՈՒԹԵԱՆ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՁԵՒՈՑ

Առաջադրութիւնք:

128 · Ծանօթութիւն. — Եթէ յերկուս ուղղագիծ ձեւս անկիւնք միոյն՝ անկեանց միւսոյն կարգաւ հաւասարք իցեն, կողմանքն որք զնոյն դիրս ունին, ասին համադէպ։ Եթէ յերկուս ուղղագիծ ձեւս անկիւնք միոյն՝ անկեանց միւսոյն կարգաւ հաւասարք իցեն, և համադէպ կողմանքն համեմատականք, երկոքին ձեւքն ասին նման։ Նշան նմանութեան է այս (∼). զոր օրինակ ΔԱԲԳ∼ΔԴԵԶ։

Հետեւանք. — Այս ուրեմն եթէ երկու ձեւք պատշաճական իցեն միմեանց, հարկ է նոցա և նմանս լինել։

129 · Հայեցողութիւն. — Երկու զուգահեռագիծք ԱԲԳԴ, ԲԵԶԳ, կամ երկու եռանկիւնք ԱԲԳ, ԲԵԳ (Ձև 59), որոց հաւասար բարձրութիւնք իցեն, համեմատին ընդ միմեանս որպէս խարիսխք նոցա ընդ միմեանս համեմատիցին։

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԱԲ բաժանեալ 'ի մ հաւասար մասունս, և ԲԵ 'ի ն հաւասար մասունս նոյնպիսիս, և իւրաքանչիւր մասն իցէ Աէ. յամենայն կէտից ծայրից մասանցն ձգեսցին գիծք զուգահեռականք 'ի կողմանցն ԱԴ և ԲԳ, յայտ է եթէ ԱԲԳԴ և ԲԵԶԳ բաժանիցին յայնչափ զուգահեռագիծս որչափ մասունս ունիցին ԱԲ և ԲԵ։ Եւ զի ԱԲ ունի մ հաւասար մասունս և ԲԵ ունի ն հաւասար մասունս նոյնպիսիս, ուստի ամենայն զուգահեռագիծք յորս բաժանեցան ԱԲԳԴ և ԲԵԶԳ միմեանց հաւասարք են (101 · Հետև. գ)։

Արդ որովհետեւ ԱԲ ունի մ հաւասար մասունս, որոց իւրաքանչիւրն է ԱԷ, ուրեմն $\text{ԱԷ}=\frac{1}{\text{մ}}\text{ԱԲ}$. բայց $\text{ԲԵ}=\text{ն}\,\text{ԱԷ}$, ուրեմն $\text{ԲԵ}=\text{ն}\times\frac{1}{\text{մ}}\text{ԱԲ}=\frac{\text{ն}}{\text{մ}}\text{ԱԲ}$: Այլ նաեւ ԱԲԳԴ բաժանի 'ի մ զուգահեռագիծս եւ ԲԵԶԳ 'ի ն զուգահեռագիծս, որոց իւրաքանչիւրն է հաւասար զուգահեռագծին ԱԷԸԴ կանգնելոյ 'ի վերայ գծին ԱԷ, ուրեմն $\text{ԱԷԸԴ}=\frac{1}{\text{մ}}\text{ԱԲԳԴ}$, եւ $\text{ԲԵԶԳ}=\text{ն}\,\text{ԱԷԸԴ}=\text{ն}\times\frac{1}{\text{մ}}\text{ԱԲԳԴ}=\frac{\text{ն}}{\text{մ}}\text{ԱԲԳԴ}$: Հուսկ յետոյ որովհետեւ $\text{ԲԵԶԳ}=\frac{\text{ն}}{\text{մ}}\text{ԱԲԳԴ}$, եւ $\text{ԲԵ}=\frac{\text{ն}}{\text{մ}}\text{ԱԲ}$, առընչութիւնքն $\text{ԱԲԳԴ}:\text{ԲԵԶԳ}$ եւ $\text{ԱԲ}:\text{ԲԵ}$ ունին զհաւասար յայտարարս, այսինքն զյայտարարն $\frac{\text{ն}}{\text{մ}}$. վասն այնորիկ եւ $\text{ԱԲԳԴ}:\text{ԲԵԶԳ}=\text{ԱԲ}:\text{ԲԵ}$ (114): Ի համեմատութենէ աստի ծագէ եւ առաջիկայդ $\frac{1}{2}\text{ԱԲԳԴ}:\frac{1}{2}\text{ԲԵԶԳ}=\text{ԱԲ}:\text{ԲԵ}$ (125). բայց $\frac{1}{2}\text{ԱԲԳԴ}=\Delta\text{ԱԲԳ}$ (102), եւ $\frac{1}{2}\text{ԲԵԶԳ}=\Delta\text{ԲԵԳ}$, ուրեմն նաեւ $\Delta\text{ԱԲԳ}:\Delta\text{ԲԵԳ}=\text{ԱԲ}:\text{ԲԵ}$:

130. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու կողմանք ԱԲ, ԱԳ եռանկեանն ԱԲԳ (Ձև 60) հատանիցին 'ի գծէն ԴԵ որ յերրորդ կողմանէն զուգահեռական իցէ, յայնժամ երկու կողմանքն հատանին համեմատականք միմեանց. այսինքն $\text{ԱԴ}:\text{ԴԲ}=\text{ԱԵ}:\text{ԵԳ}$:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԲԵ եւ ԴԳ: Որովհետեւ

$$\text{ԴԵ}\parallel\text{ԲԳ},$$

ուստի

$$\Delta\text{ԴԵԲ}=\Delta\text{ԴԵԳ}\quad(103),$$

ուրեմն

$$\Delta\text{ԱԴԵ}:\Delta\text{ԴԵԲ}=\Delta\text{ԱԴԵ}:\Delta\text{ԴԵԳ}\quad(116):$$

Բայց նաև

ΔԱԴԵ : ΔԴԵԲ=ԱԴ : ԴԲ (129),

և

ΔԱԴԵ : ΔԴԵԳ=ԱԵ : ԵԳ (129),

վասն այնորիկ նաև

ԱԴ : ԴԲ=ԱԵ : ԵԳ (115. Հետև.):

Հետևանք Ա. — Որովհետև

ԱԴ : ԴԲ=ԱԵ : ԵԳ,

նոյնպէս և

ԱԴ : ԱԵ=ԴԲ ·· ԵԳ (118):

Դարձեալ

ԱԴ+ԴԲ : ԱԴ=ԱԵ+ԵԳ : ԱԵ (119),

այսինքն

ԱԲ : ԱԴ=ԱԳ : ԱԵ.

և

ԱԴ+ԴԲ : ԴԲ=ԱԵ+ԵԳ : ԵԳ (119),

այսինքն

ԱԲ : ԴԲ=ԱԳ : ԵԳ,

վասն այնորիկ նաև

ԱԲ : ԱԳ=ԱԴ : ԱԵ

և

ԱԲ : ԱԳ=ԴԲ : ԵԳ (118):

Հետևանք Բ. — Ըստ նմին օրինակի եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ, ԳԴ (Ձև 61) հատանիցին յերից զուգահեռական գծից ԵԶ, ԷԸ, ԹԺ, հատածքն ԻԼ, ԼԽ միոյ յուղիղ գծիցն որ 'ի մէջ զուգահեռականացն գտանիցին են համեմատականք հատածոյն ԾԿ, ԿՀ միւս ուղիղ գծին որ 'ի մէջ նոյն զուգահեռականացն գտանիցին. քանզի եթէ ձգիցի ԾՂ || ԻԽ, յայնժամ ԻԾՁԼ և ԼՁՂԽ լինիցին զուգահեռագիծք, ուրեմն ԾՁ=ԻԼ, և ՁՂ=ԼԽ (92). բայց որովհետև ՁԿ || ՂՀ, ուրեմն ԾՁ : ՁՂ=ԾԿ : ԿՀ, վասն այնորիկ նաև ԻԼ : ԼԽ =ԾԿ : ԿՀ:

131. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու կողմանք ԱԲ, ԱԳ (Ձև 62) եռանկեանն ԱԲԳ միմեանց համեմատականք հատանիցին յուղիղ ինչ գծէ ԴԵ, ուղիղ գիծն այն զուգահե-

ռական է յերրորդ կողմանէ. այսինքն եթէ իցէ ԱԴ : ԴԲ = ԱԵ : ԵԳ, յայնժամ հարկ է լինել ԴԵ ∥ ԲԳ:

Ապացուցութիւն. — Եթէ չիցէ ԴԵ ∥ ԲԳ, յայտ է եթէ մարթ է ՚ի կիտէն Դ ձգել այլ ուղիղ գիծ ԴԶ ∥ ԲԳ, ուստի և

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԶ (130. Հետև.):

Եւ քանզի ըստ մերումս ենթադրութեան

ԱԴ : ԴԲ = ԱԵ : ԵԳ,

ուրեմն նաև

ԱԴ + ԴԲ : ԱԴ = ԱԵ + ԵԳ : ԱԵ (119),

այսինքն

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ:

Ապա ուրեմն հարկ է լինել

ԱԳ : ԱԶ = ԱԳ : ԱԵ (115),

վասն այնորիկ և

ԱԶ = ԱԵ (117)

որ է անպատեհ: Հետևաբար որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ որ ընդ կէտն Դ անցանիցէ՝ չկարէ զուգահեռական լինել ՚ի գծէն ԲԳ. ապա ուրեմն է ԴԵ ∥ ԲԳ:

Հետևանք. — Ըստ նմին օրինակի եթէ ԱԲ և ԱԳ հատանիցին ՚ի գծէն ԴԵ, այնպէս զի իցէ ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ, ուղիղ գիծն ԴԵ զուգահեռական է ՚ի կողմանէն ԲԳ. քանզի որովհետև

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ,

նաև

ԱԴ : ԱԲ − ԱԴ = ԱԵ : ԱԳ − ԱԵ (121),

այսինքն

ԱԴ : ԲԴ = ԱԵ : ԵԳ.

ապա ուրեմն

ԴԵ ∥ ԲԳ (131):

132. Հայեցողութիւն. — Երկու եռանկիւնք ԱԲԳ, ԴԵԶ (Ձև 63) նմանք են միմեանց, եթէ երեք անկիւնք միոյ եռանկեան երից անկեանց միւսոյն կարգաւ հաւասարք իցեն. այսինքն եթէ իցէ մ = պ, ն = փ, ո = ր:

Ապացուցութիւն. — Եթէ իցէ ԱԲ = ԴԵ ուստի և ΔԱԲԳ

≅ΔԴԵԶ (63), վասն այնորիկ և լինիցի ΔԱԲԳ∾ΔԴԵԶ (128. Հետև.)։ Բայց եթէ ԱԲ չիցէ =ԴԵ, յայնժամ դիցի ԱԲ>ԴԵ։ Արդ ՚ի գծէն ԱԲ առցի ԱԷ=ԴԵ. և ձգեսցի ԷԸ ∥ ԲԳ, ուստի լինիցի

ջ=ն (43).

բայց

ն=փ,

ուրեմն

ջ=փ.

արդ որովհետև նաև

ֆ=պ,

և

ԱԷ=ԴԵ,

ուրեմն

ΔԱԷԸ≅ΔԴԵԶ (63),

վասն այնորիկ և

ԱԸ=ԴԶ,

և

ԷԸ=ԵԶ։

Արդ

ԱԲ : ԱԷ=ԱԳ : ԱԸ (130. Հետև. Ա),

ուրեմն նաև

ԱԲ : ԴԵ=ԱԳ : ԴԶ։

Դարձեալ ձգեսցի

ԷԹ ∥ ԱԳ,

ուստի և

ԱԲ : ԱԷ=ԲԳ : ԹԳ (130. Հետև. Ա)։

Բայց արդ է ևս

ԷԸ ∥ ԹԳ,

և

ԷԹ ∥ ԸԳ,

ապա ուրեմն նաև

ԹԳ=ԷԸ (92),

և որովհետև

ԷԸ=ԵԶ,

է և

ԹԳ=ԵԶ,

ապա ուրեմն

ԱԲ : ԴԵ=ԲԳ : ԵԶ:

Արդ որովհետև նաև

ԱԲ : ԴԵ=ԱԳ : ԴԶ,

ըստ նմին օրինակի

ԱԳ : ԴԶ=ԲԳ : ԵԶ,

վասն այնորիկ և

ΔԱԲԳ∼ΔԴԵԶ (128):

133. Հայեցողութիւն. — Երկու եռանկիւնք ԱԲԳ, ԴԵԶ (Ձև 63) նմանք են միմեանց եթէ մի անկիւն ճ միոյ եռանկեան հաւասար իցէ ղ անկեան միւսոյն, և եթէ երկոքին կողմանքն որ զանկիւնն զայն 'ի միջի փակիցեն յերկուսին եռանկիւնսն իցեն համեմատականք. այսինքն եթէ իցէ ԱԲ : ԴԵ =ԱԳ : ԴԶ:

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԱԻ=ԴԵ, և ԱԸ=ԴԶ, և ձգեսցի ԻԸ. արդ որովհետև նաև ճ=ղ, ուստի և

ΔԱԻԸ≅ԴԵԶ (64),

վասն այնորիկ

ջ=փ,

և

է=ր:

Արդ

ԱԲ : ԴԵ=ԱԳ : ԴԶ,

վասն այնորիկ նաև

ԱԲ : ԱԻ=ԱԳ : ԱԸ,

ապա ուրեմն

ԻԸ ∥ ԲԳ (131. Հետև.),

վասն այնորիկ և

ջ=ն,

և

է=ո,

ապա ուրեմն նաև

ն=փ,

և

ա=ր ,

վասն այնորիկ և

ΔԱԲԳ∾ΔԴԵԶ (132)։

134․ Հայեցողութիւն․ — Երկու եռանկիւնք ԱԲԳ, ԴԵԶ (Ձև 63) *նմանք են միմեանց եթէ երեք կողմանք միոյ եռանկեան երից կողմանց միւսոյն կարգաւ համեմատականք լիցին․ այսինքն եթէ լիցէ* ԱԲ : ԴԵ=ԱԳ : ԴԶ=ԲԳ : ԵԶ։

Ապացուցութիւն․ — *Իցէ գարձեալ* ԱԻ=ԴԵ, *և* ԱԸ=ԴԶ, *և ձգիցի* ԻԸ։ *Որովհետև*

ԱԲ : ԴԵ=ԱԳ : ԴԶ,

նաև

ԱԲ : ԱԻ=ԱԳ : ԱԸ·

արդ է եւ

ճ=մ,

ուրեմն

ΔԱԻԸ∾ΔԱԲԳ (133)·

վասն այնորիկ և

ԱԲ : ԱԻ=ԲԳ : ԻԸ,

կամ որովհետև

ԱԻ=ԴԵ,

նաև

ԱԲ : ԴԵ=ԲԳ : ԻԸ։

Ըստ մերումս ենթադրութեան

ԱԲ : ԴԵ=ԲԳ : ԵԶ (115),

ուրեմն

ԲԳ : ԻԸ=ԲԳ : ԵԶ,

վասն այնորիկ և

ԻԸ=ԵԶ (117)

Արդ որովհետև նաև

ԱԻ=ԴԵ,

և

ԱԸ=ԴԶ,

ուստի և

ΔԱԻԸ≅ΔԴԵԶ (65),

ուրեմն

ժ=պ ,

ջ=փ ,

ֆ=ր :

Արդ է ևս

ջ=ն ,

և

ֆ=ս ,

ուրեմն

ն=փ ,

և

ս=ր ,

վասն այնորիկ և

ΔԱԲԳ∾ΔԴԵԶ (132):

135 · Հայեցողութիւն . — Եթէ յուղղանկիւն եռանկեան ԱԲԳ (Ձև 64) 'ի գագաթանէ Ա ուղիղ անկեան ձգեսցի գիծ ուղղահայեաց ԱԴ 'ի վերայ ստորաձգին ԲԳ , յայնժամ հատանի եռանկիւնն ԱԲԳ յերկուս եռանկիւնս , որք նման են ողջոյն եռանկեան և միմեանց իսկ :

Ապացուցութիւն . — Յեռանկիւնս ԱԲԴ , ԱԲԳ յայտ է եթէ է

ն=Ո ,

և

ԲԱԳ=Ո ,

ուստի և

ն=ԲԱԳ ·

դարձեալ

ժ=ժ ,

վասն այնորիկ նաև

փ=պ (57 · Հետև · Ե) ,

ուրեմն

ΔԱԲԴ∾ΔԱԲԳ (132):

Ըստ նմին օրինակի յեռանկիւնս ԱԳԴ , ԱԲԳ յայտ է եթէ է

ս=Ո ,

և

ԲԱԳ=Ո,

ուստի և

ա=ԲԱԳ.

դարձեալ

պ=պ,

վասն այնորիկ նաև

ր=ճ,

ապա ուրեմն

ΔԱԳԴ∾ΔԱԲԳ:

Հուսկ յետոյ որովհետև

ր=ճ,

դարձեալ

պ=ա,

և

ա=ն=Ո,

վասն այնորիկ և

ΔԱԳԴ∾ΔԱԲԴ:

Հետևանք Ա. — Որովհետև ΔԱԲԳ∾ΔԱԲԴ, ուրեմն և ԲԳ:ԱԲ=ԱԲ:ԲԴ, կամ ԲԳ:ԱԲ:ԲԴ. և դարձեալ որովհետև ΔԱԲԳ∾ΔԱԳԴ, ուստի և ԲԳ:ԱԳ=ԱԳ:ԴԳ կամ ԲԳ:ԱԳ:ԴԳ. այսինքն է մի մի յիջիցն եռանկեան է միջին համեմատական ստորաձգլին և ինքեան առընթերակայ հատածոյն:

Հետևանք Բ. — Որովհետև ΔԱԲԴ∾ΔԱԳԴ, ուրեմն և ԲԴ:ԱԴ=ԱԴ:ԴԳ, կամ ԲԴ:ԱԴ:ԴԳ. այսինքն է ուղղահայեաց գիծն այն է միջին համեմատական հատածոց ստորաձգլին:

Հետևանք Գ. — Որովհետև ԲԳ:ԱԲ:ԲԴ և ԲԳ:ԱԳ:ԴԳ (Հետև. Ա), ըստ այս գայ եթէ $\overline{\text{ԱԲ}}^2$=ԲԳ·ԲԴ, և $\overline{\text{ԱԳ}}^2$=ԲԳ·ԴԳ. Իսկ 'ի միմեանս յաւելուցումք զերկուս հաւասարութիւնս զայսոսիկ անդամ առ անդամ, ելանէ

$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2$=ԲԳ·ԲԴ+ԲԳ·ԴԳ,

=ԲԳ(ԲԴ+ԴԳ),

=ԲԳ·ԲԳ,

և կամ

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2 \cdot$$

այսինքն է․ յուղղանկիւն եռանկիւնս երկրորդ կարողութիւն ստորաձգին հաւասար է բովանդակութեան երկրորդ կարողութեանց երկուց էջից։

Այս հայեցողութիւն անուանեալ կոչի առ հասարակ Պիւթագորեան՝ յանուն Պիւթագորայ մեծի իմաստասիրի որ զառաջինն եգիտ զայն, և 'ի շնորհակալութիւն մատոյց զհարիւրեզեանն պատարագ աստուծոյն գիտութեանց․ և այս խոկ է աղբիւր յորմէ բղխեն բազում ճշմարտութիւնք Երկրաչափութեան։

Եթէ յուղղանկիւն եռանկեան ծանուցեալ լիցին երկոքին կողմանքն, նոքօք մարթ է և զերրորդ անծանօթ կողմն գտանել։ Քանզի որովհետև $\overline{\text{ԲԳ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2$, վասն որոյ

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2-\overline{\text{ԱԳ}}^2,\ \text{և}\ \overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2-\overline{\text{ԱԲ}}^2,$$

հետևաբար $\text{ԲԳ}=\sqrt{}(\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2)$,

$$\text{ԱԲ}=\sqrt{}(\overline{\text{ԲԳ}}^2-\overline{\text{ԱԳ}}^2),\ \text{և}\ \text{ԱԳ}=\sqrt{}(\overline{\text{ԲԳ}}^2-\overline{\text{ԱԲ}}^2):$$

Զոր օրինակ, եթէ լիցին $\text{ԱԲ}=6$ և $\text{ԱԳ}=8$, յայնժամ լինիցի

$$\text{ԲԳ}=\sqrt{}(36+64)=\sqrt{}100=10 \cdot$$

եթէ լիցին $\text{ԲԳ}=10$ և $\text{ԱԳ}=8$, յայնժամ լինիցի

$$\text{ԱԲ}=\sqrt{}(100-64)=\sqrt{}36=6 \cdot$$

և եթէ լիցի $\text{ԲԳ}=10$ և $\text{ԱԲ}=6$, յայնժամ լինիցի

$$\text{ԱԳ}=\sqrt{}(100-36)=\sqrt{}64=8:$$

Այլ եթէ ուղղանկիւն եռանկիւնն հաւասարասրուն ևս լիցի, այսինքն $\text{ԱԲ}=\text{ԱԳ}$, յայնժամ $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2$, որով $\overline{\text{ԲԳ}}^2 =\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԲ}}^2=2\overline{\text{ԱԲ}}^2$, յորմէ $\text{ԲԳ}=\text{ԱԲ}\sqrt{2}$, և $\text{ԱԲ}=\frac{\text{ԲԳ}}{\sqrt{2}} =\frac{\text{ԲԳ}\sqrt{2}}{2}$.

ա̄․ Օրինակ․ — Գտանել զստորաձիգն ուղղանկիւն եռանկեան, յորժամ մին յէջիցն լիցի 240 մետր և միւսն 44 մետր։

բ̄․ Օրինակ․ — Գտանել զմին յէջից ուղղանկիւն եռանկեան, յորժամ ստորաձիգն լիցի 117 մետր և միւս էջն 45 մետր։

Գ․ Օրինակ․ — Գտանել զբարձրութիւն ի հաւասարակող եռանկեան, յորժամ կողն իցէ 5 մէտր։

Լուծումն․ — Որովհետև $\text{բ}^2=5^2-\frac{5^2}{4}=\frac{3\cdot 5^2}{4}$, ուստի և $\text{բ}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$։

136․ Առաջարկութիւն․ — Առ երիս ուղիղ գիծս ծանուցեալս Ա, Բ, Գ (Ձև 65) զչորրորդ համեմատականն գտանել։

ա․ Լուծումն․ — Ձգեսցին ԴԵ=Ա, և ԴԶ=Բ որ զինչ և իցէ անկեամբ, ածիցի ԵԶ և երկայնիցի ԴԵ յէ կոյս մինչև լինել ԵԷ=Գ, 'ի կէտէն Է ձգեսցի զուգահեռական առ ԵԶ մինչև հատանել զերկայնութիւն գծին ԴԶ 'ի կէտն Ը, և ԶԸ լինիցի ուղիղ գիծն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն․ — Որովհետև ԵԶ ∥ ԷԸ, յայտ է եթէ ԴԵ:ԴԶ=ԵԷ:ԶԸ (130․ Հետևանք Ա)․ բայց ԴԵ=Ա, ԴԶ=Բ, և ԵԷ=Գ, վասն այնորիկ Ա:Բ=Գ:ԶԸ։

բ․ Լուծումն․ — Ձգեսցին դարձեալ ԴԵ=Ա, և ԴԶ=Բ որ զինչ և իցէ անկեամբ, և ածիցի ԵԶ․ 'ի վերայ սորունցն ԴԵ հատանիցի ԴԷ′=Գ, 'ի կէտէն Է′ ձգեսցի Է′Ը′ ∥ ԵԶ, և ԴԸ′ լինիցի ուղիղ գիծն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն․ — Որովհետև Է′Ը′ ∥ ԵԶ, յայտ է եթէ ԴԵ:ԴԶ=ԴԷ′:ԴԸ′ (130․ Հետևանք Ա)․ բայց ԴԵ=Ա, ԴԶ=Բ, և ԴԷ′=Գ, վասն այնորիկ Ա:Բ=Գ:ԴԸ′։

137․ Առաջարկութիւն․ — Առ երկուս ուղիղ գիծս ծանուցեալս Ա և Բ զերրորդ համեմատականն գտանել։

ա․ Լուծումն․ — Առ ուղիղ գիծսն Ա, Բ, և Բ գտցի չորրորդ համեմատականն (136), որ իցէ Մ, յայտ է եթէ Ա:Բ=Բ:Մ, կամ Ա:Բ:Մ, վասն այնորիկ Մ լինիցի ուղիղ գիծն համեմատական խնդրեալ։

բ․ Լուծումն․ — Առցի ԳԴ=Ա (Ձև 66), և կանգնիցի 'ի վերայ գծին ԳԴ 'ի կէտն Դ ուղղահայեաց գիծն ԴԵ=Բ, ապա ձգել զԳԵ, յետ այնորիկ կանգնիցի 'ի վերայ նորա 'ի կէտն Ե ուղղահայեաց գիծ մի մինչև հատանել զերկայնութեն գծին ԳԴ 'ի կէտն Զ, և ԴԶ լինիցի ուղիղ գիծն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն․ — Որովհետև ԳԵԶ=Ո․ ուրեմն ΔԳԵԶ է ուղղանկիւն, վասն այնորիկ և ԳԴ:ԴԵ:ԴԶ (135. Հետեւանք Բ). բայց ԳԴ=Ա, ԴԵ=Բ, ուստի Ա:Բ:ԴԶ:

138. Առաջարկութիւն. — Առ երկուս ուղիղ գիծս ծանուցեալս Ա և Բ (Ձև 67) գտանել զմիջին համեմատականն:

Լուծում. — Ի վերայ ուղիղ գծին ԳԵ առնուցուն ԳԴ=Ա, ԴԵ=Բ, և 'ի կէտն Դ կանգնիցի ԴԶ⊥ԳԵ և հատուածիցի ԳԵ 'ի կէտն Կ: Ի Կ միջակէտէ անտի ԳԿ=$\frac{1}{2}$ԳԵ շառաւիղաւ ձգիցի աղեղն՝ որ զուղղահայեաց գիծն ԴԶ 'ի կէտն Զ հատանիցէ, որով և ԴԶ լինիցի խնդրեալ միջին համեմատականն:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցին ուղիղ գիծքն ԳԶ, ԵԶ և ԶԿ, յայնժամ յուղղանկիւն եռանկիւնն ԳԴԶ և ԵԴԶ լինիցի մ+ն=Ո=պ+փ+ր, և քանզի մ=ն+ր, և պ=փ (66), ուստի և փոխանակելով է 2ն+ր=2փ+ր, այսինքն է ն=փ. ապա մ=ր+փ, ուրեմն է ΔԳԴԶ∾ΔԵԴԶ (135), որով և ԳԴ:ԴԶ:ԴԵ. բայց ԳԴ=Ա, ԴԵ=Բ, ուստի Ա:ԴԶ:Բ:

139. Առաջարկութիւն. — Զուղիղ գիծ ինչ ԱԲ (Ձև 68) յորոշեալ մասունս հաւասարս բաժանել:

Լուծում. — Համարեսցուք եթէ կամք իցեն մեզ զգիծն ԱԲ, բաժանել 'ի հինգ հաւասար մասունս. ձգիցի 'ի ծայրէն Ա որ զինչ և իցէ անկեամբ ուղիղ ինչ գիծ ԱԳ, և 'ի վերայ նորա առնուցուն հինգ հաւասար մասունք ըստ կամս, այսինքն ԱԴ=ԴԵ=ԵԶ=ԶԷ=ԷԸ, և ձգիցի ԲԸ. յետ այնորիկ 'ի կիտիցն Դ, Ե, Զ, Է ձգիցին զուգահեռականք առ ԲԸ որք հատանիցեն զգիծն ԱԲ 'ի կէտսն Թ, Ժ, Ի, Լ, և ԱԲ 'ի հինգ մասունս հաւասարս բաժանիցի:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԴԹ, ԵԺ, ԶԻ, ԷԼ զուգահեռականք են առ ԲԸ, են և զուգահեռականք առ միմեանս (36): Արդ յΔԱԺԵ է ԱԹ:ԹԺ=ԱԴ:ԴԵ (130)՝ բայց

ԱԴ=ԴԵ.

ուրեմն նաև

ԱԹ=ԹԺ.

այսպէս

ԹԺ : ԺԻ=ԴԵ : ԵԶ (130. Հետև. Բ),

բայց

ԴԵ=ԵԶ,

ուրեմն նաև

ԹԺ=ԺԻ.

դարձեալ

ԺԻ : ԻԼ=ԵԶ : ԶԷ,

բայց

ԵԶ=ԶԷ,

ուրեմն նաև

ԺԻ=ԻԼ.

հուսկ յետոյ

ԻԼ : ԼԲ=ԶԷ : ԷԸ,

բայց

ԶԷ=ԷԸ,

ապա ուրեմն

ԻԼ=ԼԲ :

140. Առաջարկութիւն. — *Զծանուցեալ ուղիղ գիծ լինչ* ԱԲ (Ձև 69) *յայնպիսի մասունս բաժանել, որք ընդ միմեանս համեմատիցին որպէս համեմատիցին ընդ միմեանս ուղիղ գիծքն* Գ, Դ, Ե:

Լուծումն. — *Զգիցի 'ի ծայրէն* Ա *որ զինչ և իցէ անկեամբ ուղիղ լինչ գիծ* ԱԶ. *հատանիցին 'ի վերայ նորա* ԱԷ=Գ, ԷԸ=Դ, *և* ԸԹ=Ե, *ապա ձգիցի* ԲԹ, *և 'ի կէտից* Է *և* Ը *ածիցին զուգահեռականք առ* ԲԹ, *որք հատանիցեն զգիծն* ԱԲ *'ի կէտսն* Ժ *և* Ի, *և* ԱԲ *խնդրեալ համեմատութեամբ բաժանիցի:*

Ապացուցութիւն. — *Որովհետև* ԷԺ *և* ԸԻ *զուգահեռականք են առ* ԲԹ, *են և զուգահեռականք առ միմեանս* (56) *Ապա ուրեմն* յΔԱԸԻ

ԱԺ : ԺԻ=ԱԷ : ԷԸ (130).

բայց

ԱԷ=Գ,

և

ԷԸ=Դ.

ուրեմն նաև

Աժ ։ ժԻ=Գ ։ Դ ։

Դարձեալ

ժԻ ։ ԻԲ=ԻԸ ։ ԸԹ (130․ Հետև․ Բ),

բայց

ԻԸ=Դ,

և

ԸԹ=Ե,

ուրեմն նաև

ժԻ ։ ԻԲ=Դ ։ Ե ։

Արդ․ քանզի

Աժ ։ ժԻ=Գ ։ Դ,

և

ժԻ ։ ԻԲ=Դ ։ Ե,

ուրեմն

Աժ ։ ԻԲ=Գ ։ Ե (127) ։

141․ Հայեցողութիւն․ — *Ի նման եռանկիւնս* ԱԲԳ, ԴԵԶ (*Ձև* 70) *երկու համադիր կողմանք* ԲԳ *և* ԵԶ *համեմատին ընդ միմեանս որպէս ուղղահայեաց գիծքն* ԱԻ, *և* ԴԼ *որ ՚ի յանդիմանակաց անկեանց ձգիցին ՚ի վերայ նոցա, կամ ՚ի վերայ երկայնեալ կողմանց նոցա, ընդ միմեանս համեմատիցին ։*

Ապացուցութիւն․ — *Որովհետև* ΔԱԲԳ~ΔԴԵԶ, մ=ն, *և* փ=ր=Ո, *ուրեմն նաև* ո=պ (57․ *Հետև*․ Ե), *վասն այնորիկ և*

ΔԱԲԻ~ΔԴԵԼ (132)․

ապա ուրեմն

ԱԲ ։ ԴԵ=ԱԻ ։ ԴԼ,

բայց

ԱԲ ։ ԴԵ=ԲԳ ։ ԵԶ,

քանզի

ΔԱԲԳ~ΔԴԵԶ,

ուրեմն

ԲԳ ։ ԵԶ=ԱԻ ։ ԴԼ ։

Նոյն ապացուցութիւն է եթէ ուղղահայեաց գիծքն զերկայնեալ կողմանս գծիցն ԲԳ *և* ԵԶ *հատանիցեն ։*

142․ Առաջարկութիւն․ — *Ի վերայ ծանուցեալ ուղիղ գծին*

ԶԷ (Ձև 71) կանգնել բազմանկիւն որ այլում ԱԲԳԴԵ բազմանկեան նման լիցի :

Լուծում. — Բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ բաժանիցի անկիւնագծիւքն ԲԵ և ԳԵ յեռանկիւնս, 'ի վերայ գծին ԶԷ գրոշմիցին 'ի կէտսն Զ և Է անկիւնքն ա=մ և բ=ն, որոց սրունքն հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Ը. 'ի վերայ գծին ԷԸ գրոշմիցին 'ի կէտսն Է և Ը անկիւնքն տ=դ և ե=փ, որոց սրունքն հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Թ. հուսկ յետոյ 'ի վերայ գծին ԸԹ գրոշմիցին 'ի կէտսն Ը և Թ անկիւնքն է=ր և ը=ջ, որոց սրունքն հատանիցեն զմիմեանս 'ի կէտն Ժ, և ԶԷԹԺԸ լինիցի բազմանկիւնն խնդրեալ :

Ապացուցութիւն. — Որովհետեւ մ=ա և ն=բ, ուստի ա=գ (57. Հետև. Ե), ուրեմն

ΔԱԲԵ~ΔԶԷԸ (132).

դարձեալ որովհետեւ դ=տ և փ=ե, ուստի վ=ղ (57. Հետև. Ե), ուրեմն

ΔԲԵԳ~ΔԷԸԹ (132).

հուսկ յետոյ որովհետեւ ր=է, և ջ=ը, ուստի ֆ=ի (57. Հետև. Ե), ուրեմն

ΔԳԵԴ~ΔԹԸԺ (132):

Այս ուրեմն յերկուսին ևս բազմանկիւնսն է

մ=ա,

ն+դ=բ+տ,

վ+ջ=ղ+ը,

ֆ=ի,

ր+փ+ա=է+ե+գ,

վասն այնորիկ երկոքին բազմանկիւնքն հաւասարանկիւնք են :

Դարձեալ որովհետեւ 'ի նման եռանկիւնսն է ԱԲ : ԶԷ =ԱԵ : ԶԸ=ԲԵ : ԷԸ=ԲԳ : ԷԹ=ԵԳ : ԸԹ=ԳԴ : ԹԺ= ԴԵ : ԺԸ, ուրեմն համագիր կողմանքն են ջամեմատականք : Այս ուրեմն բազմանկիւնքն են միմեանց նմանք :

143. Հայեցողութիւն. — Նման բազմանկիւնք ԱԲԳԴԵ և ԶԷԹԺԸ (Ձև 71) 'ի համագիր անկիւնագծից բաժանին 'ի նման եռանկիւնս :

Ապացուցութիւն. — Ի նմանութենէ բազմանկեանց ծագէ ճ=ա,

և

ԱԲ : ՁԻ=ԱԵ : ՁԸ·

վասն այնորիկ

ΔԱԲԵ∼ΔՁԻԸ (155).

ուստի

ն=բ,

և

ԱԲ : ՁԻ=ԲԵ : ԻԸ:

Արդ քանզի

ԱԲ : ՁԻ=ԲԳ : ԻԹ,

ուրեմն

ԲԵ : ԻԸ=ԲԳ : ԻԹ (115),

և որովհետև

ն=բ,

և

ԱԲԳ=ՁԻԹ,

նաև

պ=ր,

ուստի նաև

ΔԲԳԵ∼ΔԻԹԸ (155),

ապա ուրեմն

կ=ւ,

և

ԲԳ : ԻԹ=ԵԳ : ԸԹ:

Դարձեալ քանզի

ԲԳ : ԻԹ=ԳԴ : ԹԺ,

ուրեմն

ԵԳ : ԸԹ=ԳԴ : ԹԺ (115),

և որովհետև

կ=ւ,

և

ԲԳԴ=ԻԹԺ,

նաև

ց=ը,

ուստի նաև

△ԵԳԴ∼△ԸԹԺ :

144. Հայեցողութիւն. — Շրջանակք նման բազմանկեանց ԱԲԳԴԵ և ԶԻԹԺԸ (Ձև 71) համեմատին ընդ միմեանս որպէս ընդ միմեանս համեմատիցին երկու համադիր կողմանք կամ անկիւնագիծք :

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ : ԶԻ = ԲԳ : ԻԹ = ԳԴ : ԹԺ = ԴԵ : ԺԸ = ԵԱ : ԸԶ, նաև ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ : ԶԻ+ԻԹ+ԹԺ+ԺԸ+ԸԶ = ԱԲ : ԶԻ = ԲԳ : ԻԹ, ... այլովքն հանդերձ (121). և քանզի 'ի նմանութենէ եռանկեանց ծագէ ԱԲ : ԶԻ = ԲԵ : ԻԸ, ... այլովքն հանդերձ, նաև ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ : ԶԻ+ԻԹ+ԹԺ+ԺԸ+ԸԶ = ԲԵ : ԻԸ, ... այլովքն հանդերձ: Ուրեմն շրջանակք երկուց նման բազմանկեանց այնպէս լինին համեմատին ընդ միմեանս, որպէս համադիր կողմանքն կամ անկիւնագիծքն ընդ միմեանս համեմատիցին :

145. Յաւելցուք յայսմ վայրի առաջարկութիւնս ինչ 'ի գործնական Երկրաչափութենէ, որք 'ի վերայ նմանութեան եռանկեանց հաստատեալ են :

Առաջարկութիւն. — Գտանել զերկայնութիւն ուղիղ ինչ գծի ԱԲ (Ձև 72), որոյ 'ի ծայրս միայն հնար իցէ գնալ և ոչ ընդ բովանդակ երկայնութիւնն :

Լուծումն. — Խնդրեսցի այնպիսի ինչ կէտ Գ, որպէս զի մարթ իցէ անտի մինչև ցԱ և ցԲ չափել: Արդ կացեալ 'ի վերայ այսր Գ կէտի ձգեսցի անկիւնն ԱԳԲ, 'ի վերայ սրունից այսր անկեան ըստ ծանուցեալ ինչ համեմատութեան ածեալ կացուսցին հեռաւորութիւնքն ԳԱ, ԳԲ. այսինքն չափեալ յառաջագոյն զայնս մեդրիւ, առցին այնչափ հազարորդամեդրք որչափ մեդրս ունիցին ԳԱ, ԳԲ. և դնեալ զկէտն Դ և Ե յօդեսցին ընդ միմեանս ԴԵ գծիւ. այս ԴԵ գիծս ըստ ծանուցեալ համեմատութեն ցուցանիցէ թէ որչափ իցէ ԱԲ երկայնութիւնն :

Ապացուցութիւն. — Ի նմանութենէ եռանկեանց ծագէ

ԱԲ : ԲԳ = ԴԵ : ԵԳ,

բայց

ԲԳ = ԵԳ × 1000,

ուրեմն նաև

ԱԲ = ԴԵ × 1000 :

Առաջարկութիւն. — Գտանել զհեռաւորութիւն երկուց վայրաց Ա և Բ (Ձև 73), յորժամ 'ի մին ևեթ 'ի նոցանէ, զոր օրինակ յԱ, գնալ հնար լիցի :

Լուծում. — Կալ 'ի տեղւոջ ուրեք, զոր օրինակ 'ի Գ, յորմէ զԱ և զԲ տեսանել և զհեռաւորութիւնն ԳԱ չափել կարիցես: Ձգեա 'ի վերայ թղթոյ գիծ ինչ ուղիղ, յորոյ վերայ ըստ ծանուցեալ համեմատութեան ած կացս զչափեալ հեռաւորութիւնն ԳԱ, համարեսցուք եթէ լիցի այն գա. 'ի վերայ այսր գծի 'ի կէտսն գ և ա յօրինեա անկիւնս հաւասարս ԳԱԲ և ԱԳԲ անկեանց, յայտ է եթէ սրունքն աբ և գբ 'ի կէտն բ զմիմեանս հատանիցեն. արդ աբ ըստ ծանուցեալ համեմատութեան ցուցանիցէ զհեռաւորութիւնն ԱԲ :

Ապացուցութիւն. — Ի նմանութենէ եռանկեանց ծագէ

ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ,

արդ

ԱԳ = ագ × 1000,

ուրեմն

ԱԲ = աբ × 1000 :

Առաջարկութիւն. — Գտանել զհեռաւորութիւն երկուց վայրաց Ա և Բ (Ձև 74) յորժամ չիցէ մարթ 'ի նոսա գնալ:

Լուծում. — Ընտրեա քեզ 'ի տեղւոջ ուրեք գիծ ինչ չափելի ԳԴ, յորոյ Գ և Դ ծայրից տեսանիցին Ա և Բ: Արդ ձգեա զանկիւնսն որք 'ի հեռաւորութեանց Ա և Բ կիտից 'ի Դ և 'ի Գ յօրինիցին. յետ այսորիկ ած զգիծն ԳԴ ըստ ծանուցեալ համեմատութեան 'ի վերայ թղթոյ և 'ի կէտսն գ և դ յօրինեա անկ. ագդ = անկ. ԱԳԴ, անկ. գդա = անկ. ԳԴԱ, անկ. բգդ = անկ. ԲԳԴ, անկ. բդգ = անկ. ԲԴԳ. ապա յայտ է եթէ գիծքն գբ, դբ 'ի կէտն բ և գա, դա 'ի կէտն ա հատանեն զմիմեանս. և աբ ըստ ծանուցեալ համեմատութեան ցուցանիցէ զերկայնութիւնն ԱԲ :

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ΔԱԳԴ ∼ Δագդ,

ուստի

ԳԴ : գդ = ԱԳ : ագ ,

ուրեմն

ԱԳ = ագ × 1000 ·

դարձեալ որովհետև

Δ ԲԳԴ ∾ Δ բգդ ,

ուստի

ԳԴ : գդ = ԲԳ : բգ ,

ուրեմն

ԲԳ = բգ × 1000 ·

բայց անկ. ագբ = անկ. ագդ — անկ. բգդ հաւասար է անկ. ԱԳԲ = *անկ.* ԱԳԴ — *անկ.* ԲԳԴ , *և*

ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ ,

ուրեմն (135)

ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ ·

բայց

ԱԳ = ագ × 1000 ,

ապա ուրեմն

ԱԲ = աբ × 1000 :

Առաջարկութիւն. — *Չբարձրութիւն ինչ* ԱԲ (*Ձև* 75) *զոր օրինակ աշտարակի կամ ապարանից գտանել:*

Լուծումն. — *կանգնեա ձող ինչ* ԴԵ *'ի վերայ գետնոյ, հայեաց 'ի կիտէն* Գ *'ի կէտն* Ա, *և նշանակեա զտեղին* Գ *յորում* ԱԴ *ուղղութիւնն զգետինն հարթ հատանիցէ. և* ԴԵ *ըստ ծանուցեալ համեմատութեան ցուցանիցէ զբարձրութիւնն* ԱԲ :

Ապացուցութիւն. — *Ի նմանութենէ եռանկեանց ծագէ*

ԱԲ : ԲԳ = ԴԵ : ԵԳ ,

բայց եթէ լիցէ

ԲԳ = ԵԳ × 1000 ,

լինիցի

ԱԲ = ԴԵ × 1000 :

ԳԼՈՒԽ ԵՕԹՆԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ՉԱՓՈՒ ԵՐԵՍԱՑ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՁԵՒՈՑ

Սահմանադրութիւնք :

146 · Ծանօթութիւն · — *Չափել զքանակութիւն, ասի խնդրել եթէ քանիցս անգամ այլ նման քանակութիւն 'ի նմա բովանդակիցի : Քանակութիւնն որով չափի այլ քանակութիւն, անուանեալ կոչի չափ :*

Եւ զի չափն և չափելին պարտին լինել համասեռ, վասն այնորիկ չափ մակերևութի պարտի լինել մակերևոյթ · իսկ ձև և մեծութիւն այսր չափու ըստ ինքեան է 'ի կամս տապատան : Եւ զի դարձեալ չափ գծից է ուղիղ գիծն, քանզի բովանդակութիւն իւր յերկուս կէտս է, և չափ անկեանց է ուղիղ անկիւնն, վասն այնորիկ չափ մակերևութից պարտ և պատշաճ է այնպիսի մակերևոյթ լինել, որ յամենայն կողմանց 'ի հաւասար ուղիղ գծից շուրջ պատեալ փակիցի և ուղիղ ունիցի զանկիւնսն, և այս է քառակուսին :

Մեծութիւն այսր չափու երևոյց ծագէ 'ի մեծութենէ միութեան գծից, և զի միութիւն չափու գծից 'ի տասնորդական դրութեան է մետր, տասնորդամետր, հարիւրորդամետր, վասն այնորիկ քառակուսին որ 'ի վերայ երկայնութեան մետրի, տասնորդամետրի, հարիւրորդամետրի կանգնեալ է, է չափ միութեան երևոյց, և ասի քառակուսի մետր, քառակուսի տասնորդամետր, քառակուսի հարիւրորդամետր :

Յառաջեկոյս իմացեալ առանի եթէ այսու միութեամբ ուղղանկիւնք ևեթ չափին, քանզի ուղղանկիւնային միու-

թեամբ անմարթ է չափել զոր զինչ և իցէ ձև որ խոտոր անկիւնս ունիցի. վասն այնորիկ զամենայն ձև խոտորանկիւնային պարտ է վերածել նախ յուղղանկիւնային ։

147. Հայեցուածն. — Տարածութիւն երեսաց ԱԲԳԴ (Ձև 76) ուղղանկեան հաւասար է արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն ։

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ միութիւնն գծի, զոր օրինակ մետրն, գտանիցի ʃ անգամ 'ի խարսխին ԱԲ, և ն անգամ 'ի բարձրութեանն ԱԴ ։ Բաժանիցի խարիսխն 'ի ʃ հաւասար մասունս և 'ի վերայ ամենայն մասանց կանգնիցին քառակուսիք, որով յուղղանկիւնն ԱԲԵԶ այնչափ ինչ անգամ քառակուսի մետր գտանի, որչափ ինչ մետր յԱԲ գտանիցի. այսինքն 'ի մեր դէպս ʃիցս. և դարձեալ ծանուցեալ ուղղանկիւնն ԱԲԵԶ այնչափ ինչ բովանդակի յուղղանկեանն ԱԲԳԴ, որչափ ինչ մետր յԱԴ գտանիցի, ըստ մերոյ ենթադրութեան նիցս, ուստի և ուղղանկիւնն ԱԲԳԴ=ʃ·ԱԲԵԶ =ʃ·ն քառակուսի մետր. այսինքն է. Տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան գտանիցի, եթէ խարիսխն բարձրութեամբ նորին (որ է ասել եթէ երկոքեանն եւ նոյն միութեամբ գծի ուստի և թուովք գրոշմեալ իցեն) բազմապատկիցի ։

Հետեւանք Ա. — Եթէ ԱԲԳԴ իցէ քառակուսի, ուստի և ԱԲ=ԱԴ, տարածութիւն երեսաց նորա է =ԱԲ·ԱԴ =ԱԲ·ԱԲ=$\overline{\text{ԱԲ}}^2$. այսինքն է. Տարածութիւն երեսաց քառակուսւոյ յայտ առնի երկրորդ կարողութեամբ միոյ կողմանն ։ Եւ սմին հակառակ, ամենայն երկրորդ կարողութիւնք թուոց ցուցանեն զքառակուսի ինչ, որոյ կողմն նշանակի նովին թուով. վասն այնորիկ եւ եղև սմանց 'ի թուաբանից զերկրորդ կարողութիւն կոչել քառակուսի ։

Հետեւանք Բ. — Մի հարիւրորդամետր ունի 10 հազարորդամետրս, մի քառակուսի հարիւրորդամետր ունիցի 10 անգամ 10 կամ հարիւր քառակուսի հազարորդամետրս ։

Մի տասնորդամետր ունի 10 հարիւրորդամետրս ; մի քառակուսի տասնորդամետր ունիցի 10 անգամ 10 կամ հարիւր քառակուսի հարիւրորդամետրս ։

Մի մետր ունի 10 տասնորդամետրս, մի քառակուսի մետր ունիցի 10 անգամ 10 կամ հարիւր քառակուսի տասնորդամետրս :

Մի տասնամետր ունի 10 մետրս, մի քառակուսի տասնամետր ունիցի 10 անգամ 10 կամ հարիւր քառակուսի մետրս:

Մի հարիւրամետր ունի 10 տասնամետրս, մի քառակուսի հարիւրամետր ունիցի 10 անգամ 10 կամ հարիւր քառակուսի տասնամետրս․ այլովքն հանդերձ :

Ի չափս դաշտաց և գաւառաց, քառակուսի հարիւրամետրն անուանեալ կոչի հեկտարեալ, քառակուսի տասնամետրն՝ արեալ և քառակուսի մետրն՝ սանտիարեալ:

Այս չափք մակերևութի վերածին 'ի միմեանս եթէ ստորակէտն երկու տեղեօք յաջ կամ յահեակ շարժիցի : Ուստի $16^{\text{ք.մ}}$, 651973 նոյն էր եթէ լինէր $1665^{\text{ք.տմ}}$, 1973 կամ $166519^{\text{ք.հմ}}$, 73 և կամ $16651973^{\text{ք.հմ}}$: Ըստ նմին օրինակի $273654^{\text{ք.մ}}$ նոյն էր եթէ լինէր $2736^{\text{ք.տմ}}$, 54 կամ $27^{\text{ք.հմ}}$, 3654 և կամ 27 հարիւրակալ 36 կալ և 54 հարիւրորդակալ:

ա․ Օրինակ․ — Գտանել զտարածութիւն երեսաց ուղղանկեան որոյ խարիսխն իցէ $4^{\text{մ}}\cdot 23$ և բարձրութիւնն $2^{\text{մ}}\cdot 61$:

Լուծումն․ — $4^{\text{մ}}\cdot 23\times 2^{\text{մ}}\cdot 61=11^{\text{ք.մ}}\cdot 0403$:

բ․ Օրինակ․ — Գտանել զտարածութիւն երեսաց քառակուսւոյ որոյ կողմն իցէ $5^{\text{մ}}\cdot 23$:

Լուծումն․ — $(5^{\text{մ}}\cdot 23)^2=5^{\text{մ}}\cdot 23\times 5^{\text{մ}}\cdot 23=27^{\text{ք.մ}}\cdot 3529$:

գ․ Օրինակ․ — Գտանել զխարիսխ ուղղանկեան որոյ բարձրութիւնն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot 56$ և տարածութիւն երեսացն հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի քառակուսւոյ որոյ կողմն իցէ $3^{\text{մ}}\cdot 12$:

Լուծումն․ — Տարածութիւն երեսաց քառակուսւոյն է $=(3^{\text{մ}}\cdot 12)^2=3^{\text{մ}}\cdot 12\times 3^{\text{մ}}\cdot 12=9^{\text{ք.մ}}\cdot 7344$․ ուստի խարիսխ ուղղանկեան լինիցի $=9^{\text{ք.մ}}\cdot 7344:1^{\text{մ}}\cdot 56=6^{\text{մ}}\cdot 24$:

դ․ Օրինակ․ — Գտանել զկողմն քառակուսւոյ որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $66^{\text{ք.մ}}\cdot 0969$:

Լուծումն․ — $\sqrt{66^{\text{ք.մ}}\cdot 0969}=8^{\text{մ}}\cdot 13$:

ե․ Օրինակ․ — Գտանել զկողմն քառակուսւոյ որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի ուղղանկեան որոյ խարիսխն իցէ $5^{\text{մ}}\cdot 21$ և բարձրութիւնն $2^{\text{մ}}\cdot 16$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան է $=5^{f}\cdot 21\times 2^{f}\cdot 16=11^{+.f}\cdot 2536$. ուստի կողմն քառակուսւոյն լինիցի $=\sqrt{11^{+.f}\cdot 2536}=3^{f}\cdot 35$:

148. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւն երեսաց զուգահեռագծի հաւասար է արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև որ զինչ և իցէ զուգահեռագիծ հաւասար է ուղղանկեան որոյ իցէ նոյն խարիսխ և հաւասար բարձրութիւն (101. Հետև. Գ.), արդ տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան հաւասար է արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն (147), ուրեմն նոյնպէս և տարածութիւն երեսաց զուգահեռագծի գտանիցի եթէ խարիսխ նորին բարձրութեամբն բազմապատկիցի:

ա. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց զուգահեռագծի որոյ խարիսխն իցէ $3^{f}\cdot 17$ և բարձրութիւնն $1^{f}\cdot 85$:

Լուծումն. — $3^{f}\cdot 17\times 1^{f}\cdot 85=5^{+.f}\cdot 8645$:

բ. Օրինակ. — Գտանել զբարձրութիւն զուգահեռագծի որոյ խարիսխն իցէ $2^{f}\cdot 43$ և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց ուղղանկեան որոյ խարիսխն իցէ $1^{f}\cdot 34$ և բարձրութիւնն $3^{f}\cdot 25$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան է $=1^{f}\cdot 34\times 3^{f}\cdot 25=4^{+.f}\cdot 3550$. ուստի բարձրութիւն զուգահեռագծին լինիցի $=4^{+.f}\cdot 3550 : 2^{f}\cdot 43=1^{f}\cdot 79$:

գ. Օրինակ. — Գտանել զկողմն քառակուսւոյ որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի զուգահեռագծի, որոյ խարիսխն իցէ $2^{f}\cdot 81$ և բարձրութիւնն $3^{f}\cdot 52$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց զուգահեռագծին է $=2^{f}\cdot 81\times 3^{f}\cdot 52=9^{+.f}8912$. ուստի կողմն քառակուսւոյն լինիցի $=\sqrt{9^{+.f}\cdot 8912}=3^{f}\cdot 14$:

149. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւն երեսաց եռանկեան հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև տարածութիւն երեսաց զուգահեռագծի հաւասար է արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն, և զի եռանկիւն որ զնոյն խարիսխ և զհաւասար բարձրութիւն ունիցի, է կէս զուգահեռագծին (102), ուրեմն նոյնպէս և տարածութիւն երեսաց եռանկեան գտանիցի եթէ խարիսխ նորին կիսով բարձրութեան կամ բարձրութիւն նորին կիսով խարսխին բազմապատկիցի :

ա. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց եռանկեան որոյ խարիսխն իցէ $3^{\text{մ}}\cdot61$ և բարձրութիւնն $1^{\text{մ}}\cdot72$:

Լուծումն. — $\frac{1}{2}\times3^{\text{մ}}\cdot61\times1^{\text{մ}}\cdot72=3^{\text{ք.մ}}\cdot1046$:

բ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց ուղղանկիւն եռանկեան որոյ մի էջն իցէ $2^{\text{մ}}\cdot53$ և միւսն $3^{\text{մ}}\cdot81$:

Լուծումն. — $\frac{1}{2}\times2^{\text{մ}}\cdot53\times3^{\text{մ}}\cdot81=4^{\text{ք.մ}}\cdot8196$.

գ. Օրինակ. — Գտանել զբարձրութիւն եռանկեան որոյ խարիսխն իցէ $3^{\text{մ}}\cdot52$, և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց քառակուսւոյ, որոյ կողմն իցէ $2^{\text{մ}}\cdot83$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց քառակուսւոյն է $=(2^{\text{մ}}\cdot83)^2=2^{\text{մ}}\cdot83\times2^{\text{մ}}\cdot83=8^{\text{ք.մ}}\cdot0089$, ուստի կէս բարձրութիւն եռանկեանն լինիցի $=8^{\text{ք.մ}}\cdot0089:3^{\text{մ}}\cdot52=2^{\text{մ}}\cdot27$, և բարձրութիւնն $4^{\text{մ}}\cdot54$:

դ. Օրինակ. — Գտանել զխարիսխ ուղղանկեան որոյ բարձրութիւնն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot62$, և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց եռանկեան, որոյ խարիսխն իցէ $5^{\text{մ}}\cdot41$ և բարձրութիւնն $2^{\text{մ}}\cdot53$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց եռանկեանն է $=\frac{1}{2}\times5^{\text{մ}}\cdot41\times2^{\text{մ}}\cdot53=6^{\text{ք.մ}}\cdot8436$, ուստի խարիսխ ուղղանկեանն լինիցի $=6^{\text{ք.մ}}\cdot8436:1^{\text{մ}}\cdot62=4^{\text{մ}}\cdot22$:

150. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւն երեսաց ԱԲԳԴ (Ձև 55) սեղանոյ հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ բովանդակութեան իւրոց զուգահեռական կողմանցն և բարձրութեան :

ա. Ապացուցութիւն. — Ձգեալ զանկիւնագիծն ԱԳ և զուղղահայեաց գիծն ԳԹ 'ի վերայ գծին ԱԲ, լինիցի ԳԹ հասարակաց բարձրութիւն ԱԲԳ և ԱԳԴ եռանկեանց : Արդ ու-րովհետև սեղանն $\text{ԱԲԳԴ}=\triangle\text{ԱԲԳ}+\triangle\text{ԱԳԴ}$, և $\triangle\text{ԱԲԳ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԳԹ}$, և $\triangle\text{ԱԳԴ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԳԴ}\cdot\text{ԳԹ}$, ուրեմն $\text{ԱԲԳԴ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԳԹ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԳԴ}\cdot\text{ԳԹ}={}^{1}/_{2}\cdot\text{ԳԹ}\,(\text{ԱԲ}+\text{ԳԴ})$· այսինքն Տարածութիւն երեսաց սեղանոյ հաւասար է կիսոյ ուղղանկեան որ կազմի յարտադրելոյ բովանդակութեան իւրոց զուգահեռական կողմանցն և բարձրութեան. կամ ՚ի թուաբանական միջնոյն զուգահեռական կողմանցն ընդ բարձրութեանն բազմապատկելոյ :

ը̃· Ապացուցութիւն.— Որովհետև $\text{ԱԲԳԴ}=\text{ԱԶԷԴ}$ (108), և ձգեալ զուղղահայեաց գիծն ԳԹ ՚ի վերայ գծին ԱԲ, լինիցի $\text{ԱԶԷԴ}=\text{ԱԶ}\cdot\text{ԳԹ}$, որով և $\text{ԱԲԳԴ}=\text{ԱԶ}\cdot\text{ԳԹ}$, կամ $\text{ԱԲԳԴ}=\text{ԵԸ}\cdot\text{ԳԹ}$· այսինքն Տարածութիւն երեսաց սեղանոյ հաւասար է արտադրելոյ բարձրութեան նորին և ուղիղ գծին, որ զերկուս զանզուգահեռական կողմանս նորին հատանիցէ :

թ̃· Օրինակ.— Գտանել զտարածութիւն երեսաց սեղանոյ, որոյ ՚ի զուգահեռական կողմանց մին իցէ $5^{\text{մ}}\cdot46$, միւսն $8^{\text{մ}}\cdot54$ և բարձրութիւնն $6^{\text{մ}}\cdot92$:

Լուծումն.— $\frac{1}{2}\times6^{\text{մ}}\cdot92\times(5^{\text{մ}}\cdot46+8^{\text{մ}}\cdot54)=48^{\text{ք.մ}}\cdot44$:

ժ̃· Օրինակ.— Գտանել զբարձրութիւն սեղանոյ, որոյ ՚ի զուգահեռական կողմանց մին իցէ $4^{\text{մ}}\cdot54$, միւսն $2^{\text{մ}}\cdot86$, և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց եռանկեան, որոյ խարիսխն իցէ $5^{\text{մ}}\cdot82$ և բարձրութիւնն $4^{\text{մ}}\cdot63$:

Լուծումն.— Տարածութիւն երեսաց եռանկեանն է $=\frac{1}{2}\times5^{\text{մ}}\cdot82\times4^{\text{մ}}\cdot63=11^{\text{ք.մ}}\cdot1583$, ուստի կէս բարձրութիւն սեղանոյն լինիցի $11^{\text{ք.մ}}\cdot1583:(4^{\text{մ}}\cdot54+2^{\text{մ}}\cdot86)=1^{\text{մ}}\cdot578\cdot\cdot$, և բարձրութիւնն $3^{\text{մ}}\cdot156\cdot\cdot\cdot$:

ի̃· Օրինակ.— Գտանել զկողմն քառակուսւոյ, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի սեղանոյ, որոյ ՚ի զուգահեռական կողմանց մին իցէ $2^{\text{մ}}\cdot86$, միւսն $5^{\text{մ}}\cdot14$ և բարձրութիւնն $1^{\text{մ}}\cdot98$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց սեղանոյն է $=\frac{1}{2}\times1^{\text{մ}}\cdot98\times(2^{\text{մ}}\cdot86+5^{\text{մ}}\cdot14)=7^{\text{ք.մ}}\cdot92$, ուստի կողմն քառակուսւոյն լինիցի $=\sqrt{7^{\text{ք.մ}}\cdot92}=2^{\text{մ}}\cdot81$:

Գ. Օրինակ. — Գտանել զբարձրութիւն զուգահեռագծի որոյ խարիսխն իցէ $4^{\text{մ}}\cdot62$ և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի սեղանոյ, որոյ 'ի զուգահեռական կողմանց մին իցէ $2^{\text{մ}}\cdot83$, և միւսն $4^{\text{մ}}\cdot17$ և բարձրութիւնն $3^{\text{մ}}\cdot64$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց սեղանոյն է $=\frac{1}{2}\times3^{\text{մ}}\cdot64\times(2^{\text{մ}}\cdot83+4^{\text{մ}}\cdot17)=12^{\text{ք.մ}}\cdot74$, ուստի բարձրութեն զուգահեռագծին լինիցի $=12^{\text{ք.մ}}\cdot74 : 4^{\text{մ}}\cdot62=2^{\text{մ}}\cdot75$:

151. Հաւաստումն. — Տարածութիւն երեսաց ԱԲԳԴ (Ձև 77) սեղանային քառանկեան հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ միոյ յանկիւնագծիցն և բովանդակութեան ուղղահայեաց գծից ձգելոց 'ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման անկիւնագծին :

Ապացուցումն. — Ձգիցի անկիւնագիծն ԱԳ, յայտ է եթէ բաժանի սեղանային քառանկիւնն յերկուս եռանկիւնս, այսինքն $\text{ԱԲԳԴ}=\Delta\text{ԱԲԳ}+\Delta\text{ԱԴԳ}$: Ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման ԱԳ անկիւնագծին ձգիցին ուղղահայեաց գիծքն ԲԵ և ԴԶ, ուստի $\Delta\text{ԱԲԳ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԵ}$ և $\Delta\text{ԱԴԳ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԴԶ}$, ուրեմն և $\text{ԱԲԳԴ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԵ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԴԶ}=\frac{1}{2}\text{ԱԳ}(\text{ԲԵ}+\text{ԴԶ})$:

Դ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց սեղանային քառանկեան, որոյ մի յանկիւնագծիցն իցէ $7^{\text{մ}}\cdot52$ և ուղղահայեաց գիծքն ձգեալք 'ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման անկիւնագծին իցեն $3^{\text{մ}}\cdot81$ և $5^{\text{մ}}\cdot73$:

Լուծումն. — $\frac{1}{2}\times7^{\text{մ}}\cdot52\times(3^{\text{մ}}\cdot81+5^{\text{մ}}\cdot73)=35^{\text{ք.մ}}\cdot8504$:

Ե. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն միոյ յանկիւնագծից սեղանային քառանկեան, եթէ ուղղահայեաց գիծքն ձգեալք 'ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման նորին՝ լիցին մին $2^{մ}\cdot 52$, միւսն $3^{մ}\cdot 48$ և տարածութիւն երեսաց քառանկեանն $4^{ք.մ.}\cdot 56$:

Լուծումն. — Կէս անկիւնագծի քառանկեանն լինիցի $= 4^{ք.մ.}\cdot 56 : (2^{մ}\cdot 52 + 3^{մ}\cdot 48) = 0^{մ}\cdot 76$, ուստի անկիւնագիծն լինիցի $1^{մ}\cdot 56$:

Գ. Օրինակ. — Գտանել զկողմն քառակուսւոյ, որոյ տարածութիւն երեսացն լիցէ հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի սեղանային քառանկեան, որոյ մի յանկիւնագծից լիցէ $8^{մ}\cdot 22$ և երկոքին ուղղահայեաց գիծքն ձգեալք 'ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման նորին՝ լիցին մին $5^{մ}\cdot 43$ և միւսն $3^{մ}\cdot 87$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց սեղանային քառանկեանն է $= \frac{1}{2} \times 8^{մ}\cdot 22 \times (5^{մ}\cdot 43 + 3^{մ}\cdot 87) = 38^{ք.մ.}\cdot 2230$, ուստի կողմն քառակուսւոյն լինիցի $= \sqrt{38^{ք.մ.}\cdot 2230} = 6^{մ}\cdot 18$:

132. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւն երեսաց որ զինչ և լիցէ ԱԲԳԴԵԶ (Ձև 78) բազմանկեան հաւասար է բովանդակութեան ամենայն եռանկեանց կամ ուղղանկիւն եռանկեանց և սեղանոց յորս բաժանիցի բազմանկիւնն :

Ա. Ապացուցութիւն. — Բաժանիցի բազմանկիւնն 'ի բովանդակ եռանկիւնս և ձգիցին ուղղահայեաց գիծքն ԲԿ, ԳԸ, ԵԹ և ԶԺ, լինիցի $\Delta\text{ԱԲԳ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԿ}$, $\Delta\text{ԱԳԴ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԴ}\cdot\text{ԳԸ}$, $\Delta\text{ԱԴԵ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԴ}\cdot\text{ԵԹ}$ և $\Delta\text{ԱԵԶ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԵ}\cdot\text{ԶԺ}$, ուստի և $\text{ԱԲԳԴԵԶ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{ԱԳԴ} + \Delta\text{ԱԴԵ} + \Delta\text{ԱԵԶ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԿ} + \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԴ}\cdot\text{ԳԸ} + \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԴ}\cdot\text{ԵԹ} + \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԵ}\cdot\text{ԶԺ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԿ} + \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԴ}\,(\text{ԳԸ} + \text{ԵԹ}) + \frac{1}{2}\cdot\text{ԱԵ}\cdot\text{ԶԺ}$:

Բ. Ապացուցութիւն. — Ձգիցի անկիւնագիծն ԱԴ, և 'ի վերայ նորին 'ի գագաթանց ամենայն անկեանցն ուղղեցին ուղղահայեաց գիծքն ԲԻ, ԳԸ, ԵԹ և ԶԺ, յորմէ ծագիցեն ուղղանկիւն եռանկիւնք և սեղանք, լինիցի

$$\Delta \text{ԱԲԻ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԻ}\cdot\text{ԲԻ},\ \Delta\text{ԳԴԸ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԳԸ}\cdot\text{ԴԸ},\ \Delta\text{ԴԵԹ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԴԹ}\cdot\text{ԵԹ},\ \Delta\text{ԱԶԺ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԺ}\cdot\text{ԶԺ},\ \text{ԲԻԳԸ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԻԸ}(\text{ԲԻ}+\text{ԳԸ})$$

և $\text{ԵԹԶԺ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԹԺ}\,(\text{ԵԹ}+\text{ԶԺ})$, ուստի և

$$\text{ԱԲԳԴԵԶ}=\Delta\text{ԱԲԻ}+\Delta\text{ԳԴԸ}+\Delta\text{ԴԵԹ}+\Delta\text{ԱԶԺ}+\text{ԲԻԳԸ}+\text{ԵԹԶԺ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԻ}\cdot\text{ԲԻ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԳԸ}\cdot\text{ԴԸ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԴԹ}\cdot\text{ԵԹ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԺ}\cdot\text{ԶԺ}+\frac{1}{2}\cdot\text{ԻԸ}\,(\text{ԲԻ}+\text{ԳԸ})+\frac{1}{2}\cdot\text{ԹԺ}\,(\text{ԵԹ}+\text{ԶԺ})=\frac{1}{2}\cdot[\text{ԱԻ}\cdot\text{ԲԻ}+\text{ԳԸ}\cdot\text{ԴԸ}+\text{ԴԹ}\cdot\text{ԵԹ}+\text{ԱԺ}\cdot\text{ԶԺ}+\text{ԻԸ}\,(\text{ԲԻ}+\text{ԳԸ})+\text{ԹԺ}\,(\text{ԵԹ}+\text{ԶԺ})]:$$

133. Հայեցողութիւն. — *Տարածութեն երեւաց ԱԲԳԴԵԶ (Ձև 79) որ զինչ և իցէ ն կողմամբք կանոնաւոր բազմանկեան հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ շրջանակի նորին և ուղղահայեաց գծին որ 'ի կեդրոնէն 'ի վերայ միոյ 'ի կողմանցն անկանիցի:*

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԱԿ, ԲԿ, ԳԿ, ... որովք բազմանկիւնն 'ի ն պատշաճական եռանկիւնս բաժանիցի, յորոց մի է $\Delta\text{ԱԲԿ}$: Իսկ արդ $\Delta\text{ԱԲԿ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԻԿ}$, ուստի և $\text{ԱԲԳԴԵԶ}=\text{ն}\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԻԿ}$. և քանզի շրջանակ բազմանկեանն է $=\text{ն}\cdot\text{ԱԲ}$, զոր եթէ համարեսցուք $=\text{Շ}$, լինիցի $\text{ԱԲԳԴԵԶ}=\frac{1}{2}\cdot\text{Շ}\cdot\text{ԻԿ}$:

ա. Օրինակ. — *Գտանել զտարածութիւն երեւաց կանոնաւոր տասնանկեան, որոյ կողմն իցէ $2^{\prime}\cdot42$, և ուղղահայեաց գծին որ 'ի կեդրոնէն 'ի վերայ միոյ 'ի կողմանցն անկանիցի իցէ $1^{\prime}\cdot83$:*

Լուծումն. — $\frac{1}{2}\times2^{\prime}\cdot42\times10\times1^{\prime}\cdot83=22^{+\prime}\cdot1430$:

Ե. Օրինակ. — Գտանել զբարձրութիւն եռանկեան որոյ խարիսխն իցէ $2^{\text{մ}}\cdot 82$, և տարածութիւն երեսաց նորա հաւասար տարածութեան երեսաց կանոնաւոր ութանկեան, որոյ կողմն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot 84$ և ուղղահայեաց գիծն որ 'ի կեդրոնէն 'ի վերայ միոյ 'ի կողմանցն անկանիցի իցէ $2^{\text{մ}}\cdot 46$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց կանոնաւոր ութանկեան է $=\frac{1}{2}\times 1^{\text{մ}}\cdot 84\times 8\times 2^{\text{մ}}\cdot 46=18^{+.\text{մ}}\cdot 1056$, ուստի կէս բարձրութիւն եռանկեանն լինիցի $=18^{+.\text{մ}}\cdot 1056:2^{\text{մ}}\cdot 82=6^{\text{մ}}\cdot 42$, և բարձրութիւնն՝ $12^{\text{մ}}\cdot 84$:

Զ. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն ուղղահայեաց գծին, որ ձգի 'ի կեդրոնէ 'ի վերայ միոյ 'ի կողմանցն կանոնաւոր երկոտասանանկեան, որոյ կողմն իցէ $2^{\text{մ}}\cdot 40$, և տարածութիւն երեսացն հաւասար տարածութեան երեսաց սեղանոյ որոյ բարձրութիւնն իցէ $4^{\text{մ}}\cdot 84$ և 'ի զուգահեռական կողմանց մին $10^{\text{մ}}\cdot 88$ և միւսն $5^{\text{մ}}\cdot 12$:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց սեղանոյ է $=\frac{1}{2}\times 4^{\text{մ}}\cdot 84\times(10^{\text{մ}}\cdot 88+5^{\text{մ}}\cdot 12)=38^{+.\text{մ}}\cdot 72$, ուստի երկայնութիւն ուղղահայեաց գծին լինիցի $=38^{+.\text{մ}}\cdot 72:\frac{1}{2}\times 12\times 2^{\text{մ}}\cdot 40=2^{\text{մ}}\cdot 688\cdots$:

ԳԼՈՒԽ ՈՒԹԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԵԱՆ ԵՐԵՍԱՑ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՁԵՒՈՑ

Առաջադրութիւնք :

154. Հայեցողութիւն. — *Տարածութիւնք երեսաց երկուց ուղղանկեանց համեմատին ընդ միմեանս ըստ բաղադրեալ համեմատութեան բարձրութեանց իւրեանց և խարսխաց :*

Ապացուցութիւն. — *Իցեն երկու ուղղանկեանց տարածութիւնք երեսացն* Տ *և* պ, *խարիսխքն՝* Խ *և* խ, *և բարձրութիւնքն՝* Բ *և* բ, *յայտ է եթէ լինիցի*

Տ=ԽԲ, և պ=խբ (147),

ուստի և

Տ : պ=ԽԲ : խբ :

Հետևանք Ա. — *Եթէ երկոքին ուղղանկիւնքն* Տ *և* պ *միմեանց հաւասարք իցեն, յայնժամ հարկ է և* ԽԲ=խբ *լինել, ուստի* Խ:խ=բ:Բ. *այսինքն 'ի հաւասար ուղղանկիւնս բարձրութիւնքն խոտորնակս են ընդ խարսխացն համեմատին : Փոխադարձաբար եթէ իցէ* Խ:խ=բ:Բ, *ծագէ* ԽԲ=խբ, *յորմէ* Տ=պ :

Հետևանք Բ. — *Եթէ* բ *իցէ մի միութիւն երկայնութեան, ուստի և* =1 *մետրի, և ուղղանկիւնն* պ *քառակուսի, որով և տարածութիւն երեսացն* =1 *քառակուսի մետրի, յայտ է եթէ լինիցի* Տ:1=ԽԲ:$(1)^2$. *այսինքն* Տ:1=ԽԲ:1, *յորմէ* Տ=ԽԲ. *որ է ասել եթէ տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան հաւասար է արտադրելոյ բարձրութեանն և խարսխին :*

Հետեւանք Գ. — Երկու ուղղանկիւնք, որոց հաւասար խարիսխ և հաւասար բարձրութիւն իցէ միմեանց հաւասարք են։

Եթէ քառեակ ուղղութիւնք Խ, Բ, խ, բ իցեն 'ի համեմատութեան, որպէս զի լինել Խ : Բ = խ : բ, ուղղանկիւն ծայրից, այսինքն ուղղանկիւն որոյ խարիսխն իցէ Խ և բարձրութիւնն բ, հաւասար է ուղղանկեան միջնոց, այսինքն ուղղանկեան որոյ խարիսխն իցէ խ և բարձրութիւնն Բ։

135. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ զուղղանկիւնն ԱԲԳԴ (Ձև 80), ձգել այլ հաւասար ուղղանկիւն որոյ խարիսխն իցէ տուեալ գիծն ԵԶ։

Լուծումն. — Առ երիս ուղղութիւնսն ԵԶ, ԱԲ և ԱԴ գտցի չորրորդ համեմատականն ԵԸ (136), և ԵԸ լինիցի բարձրութիւն խնդրեալ ուղղանկեանն։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

$$\text{ԵԶ} : \text{ԱԲ} = \text{ԱԴ} : \text{ԵԸ},$$

ուստի

$$\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԴ} = \text{ԵԶ} \cdot \text{ԵԸ},$$

ապա ուրեմն

$$\text{ԵԶԷԸ} = \text{ԱԲԳԴ}:$$

136. Առաջարկութիւն. — Ձգել քառակուսի մի որ հաւասար իցէ ԱԲԳԴ (Ձև 81) ուղղանկեան ինչ ծանուցելոյ։

Լուծումն. — Առ խարիսխն ԱԲ և առ բարձրութիւնն ԱԴ գտցի միջին համեմատականն (138), և քառակուսին ԵԶԷԸ կանգնեալ 'ի վերայ միջին համեմատականիս լինիցի խնդրեալ քառակուսին։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

$$\text{ԱԲ} : \text{ԵԶ} = \text{ԵԶ} : \text{ԱԴ},$$

ուստի

$$\overline{\text{ԵԶ}}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԴ},$$

ապա ուրեմն քառակուսին կանգնեալ 'ի վերայ ԵԶ կողման հաւասար է ԱԲԳԴ ուղղանկեանն ծանուցելոյ։

Հետեւանք. — Ընդհանրապէս փոխակերպութիւն ասի առաջարկութիւնն գտանելոյ քառակուսի մի որ տարածութեամբ երեսացն հաւասար իցէ որ զինչ և իցէ ձևոյ ծանուցելոյ։ Ապա ուրեմն քառակուսութիւն ուղղանկեան գտանի եթէ խնդրիցի մէջին համեմատականն առ խարիսխն և առ բարձրութիւնն :

137. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւնք երեսաց երկուց զուգահեռագծից համեմատին ընդ միմեանս ըստ բաղադրեալ համեմատութեան բարձրութեանց իւրեանց և խարսխաց :

Ապացուցութիւն. — Իցեն երկուց զուգահեռագծից տարածութիւնք երեսացն Տ և տ, խարիսխքն՝ Խ և խ, և բարձրութիւնքն՝ Բ և բ : Քանզի որովհետև

Տ=ԽԲ, և տ=խբ (148).

ուրեմն

Տ : տ=ԽԲ : խբ :

Հետևանք Ա. — ա. Եթէ Խ=խ և Բ=բ համարիցիմք, յայտ է եթէ ԽԲ=խբ, ուստի և Տ=տ. այսինքն զուգահեռագիծք, որոց հաւասար իցէ խարիսխ և բարձրութիւն՝ միմեանց հաւասարք են :

բ. Իսկ եթէ իցէ Տ=տ, յայնժամ ԽԲ=խբ, յորմէ և Բ:բ=խ:Խ. այսինքն 'ի զուգահեռագիծս բարձրութիւնքն խոտորնակս իմն ընդ խարսխացն համեմատին :

գ. Այլ եթէ իցէ Բ=բ, յայնժամ Տ:տ=Խ:խ, և եթէ իցէ Խ=խ, յայնժամ Տ:տ=Բ:բ. այսինքն զուգահեռագիծք որոց հաւասար բարձրութիւնք իցեն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս համեմատիցին խարիսխք իւրեանց. իսկ որոց միանգամ հաւասար խարիսխք իցեն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս բարձրութիւնք նոցա ընդ միմեանս համեմատիցին :

Հետևանք Բ. — Որովհետև տարածութիւն երեսաց զուգահեռագծի հաւասար է արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն, ուրեմն քառակուսութիւն զուգահեռագծի գտանի, եթէ խնդրիցի մէջին համեմատականն առ խարիսխն և առ բարձրութիւնն : Քանզի եթէ իցէ Խ խարիսխն, Բ բարձրութիւնն, և Գ մէջի համեմատականն առ Խ և առ Բ, լինիցի

Խ : Գ=Գ : Բ,

ուստի

$\overline{\text{Գ}}^{2}=\text{ԽԲ}$:

138. Հայեցողութիւն. — Տարածութիւնք երեսաց երկուց եռանկեանց համեմատին ընդ միմեանս ըստ բաղադրեալ համեմատութեան բարձրութեանցն և խարսխաց :

Ապացուցութիւն. — Իցեն երկուց եռանկեանց տարածութիւնք երեսացն Տ և փ, խարիսխքն՝ Խ և խ, և բարձրութիւնքն՝ Բ և բ, յայտ է եթէ

Տ=½ԽԲ, և փ=½խբ (149),

ուստի և

Տ : փ=½ԽԲ : ½խբ=ԽԲ : խբ :

Հետևանք Ա. — ա. Եթէ իցէ Խ:խ=բ:Բ ճշմարիտ համեմատութիւն, յայնժամ լինիցի ԽԲ=խբ, ուստի և Տ=փ. այսինքն երկու եռանկիւնք հաւասարք են, եթէ բարձրութիւնք նոցա ընդ խարսխացն խոտորնակս համեմատիցին :

բ. Եթէ իցէ Բ=բ և Խ=խ, ուստի և ԽԲ=խբ, յայնժամ և Տ=փ. այսինքն եռանկիւնք որոց հաւասար իցէ բարձրութիւն և հաւասար խարիսխն, միմեանց հաւասարք են :

գ. Եթէ երկու եռանկիւնքն Տ և փ հաւասարք իցեն, յայնժամ և ԽԲ=խբ, ուստի և Խ:խ=բ:Բ. այսինքն՝ի հաւասար եռանկիւնս խարիսխքն ընդ բարձրութեանցն խոտորնակս իմն համեմատին :

դ. Եթէ իցէ Խ=խ, յայնժամ Տ:փ=Բ:բ. և եթէ իցէ Բ=բ, յայնժամ Տ:փ=Խ:խ. այսինքն եռանկիւնք որոց հաւասար խարիսխ իցէ, ընդ բարձրութիւնսն, իսկ որոց հաւասար բարձրութիւնք՝ ընդ խարիսխսն ուղիղ համեմատականք են :

Հետևանք Բ. — Որովհետև տարածութիւն երեսաց եռանկեան հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ խարսխին և բարձրութեանն, ուրեմն քառակուսութիւն եռանկեան գտանի եթէ խնդրիցի միջին համեմատականն առ խարիսխն և առ կէս բարձրութիւնն, կամ առ բարձրութիւնն և առ կէս խարսխն :

Հետևանք Գ. — Որովհետև տարածութիւն երեսաց սեղանոյ հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ բովանդակութեան իւրոյ զուգահեռական կողմանցն և բարձրութեան, ուրեմն քառակուսութիւն սեղանոյ գտանի, եթէ խնդրիցի միջին համեմատականն առ կէս բովանդակութիւն խարսխացն և առ բարձրութիւնն, կամ առ բարձրութիւնն և առ ուղիղ գիծն, որ զերկուս զանզուգահեռական կողմանս նորին հատանիցէ:

159. Հայեցողութիւն. — Եթէ երկուց ԱԲԳ և ԱԴԵ (Ձև 82) եռանկեանց մի անկիւն Ա իցէ հասարակաց, տա-

րածութիւնք երեսաց նոցա համեմատին ընդ միմեանս, որպէս ուղղանկիւնք կազմեալք 'ի կողմանց որ զնոյն անկիւն 'ի մէջ փակիցեն, ընդ միմեանս համեմատիցին. այսինքն է

ΔԱԲԳ : ΔԱԴԵ=ԱԲ·ԱԳ : ԱԴ·ԱԵ:

Ապացուցութիւն. — *Ձգեսցի գիծն* ԲԵ, *և լինիցի* (158. Հետև. Ա. Գ.)

ΔԱԲԳ : ΔԱԲԵ=ԱԳ : ԱԵ,

և

ΔԱԲԵ : ΔԱԴԵ=ԱԲ : ԱԴ,

զորս բազմապատկեալ անդամ առ անդամ, լինիցի

ΔԱԲԳ : ΔԱԴԵ=ԱԲ·ԱԳ : ԱԴ·ԱԵ:

Հետևանք. — *Եթէ լիցի*

ԱԲ·ԱԳ=ԱԴ·ԱԵ,

յայնժամ երկու եռանկիւնքն միմեանց հաւասարք լինին. ուստի և

ԱԲ : ԱԴ=ԱԵ : ԱԳ:

160. Հայեցողութիւն. — *Տարածութիւնք երեսաց երկուց* ԱԲԳ *և* ԴԵԶ (Ձև 70) *նման եռանկեանց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս քառակուսիք համադէր կողմանց ընդ միմեանս համեմատիցին:*

Ապացուցութիւն. — *Ի գագաթանցն* Ա *և* Դ *ձգեսցին ուղղահայեաց գիծքն* ԱԻ *և* ԴԼ: *Որովհետև* ի=լ=Ո, բ=ե, *ուրեմն* ΔԱԲԻ∼ΔԴԵԼ, *յորմէ*

ԱԲ : ԴԵ=ԱԻ : ԴԼ (132).

և քանզի ևս ΔԱԲԳ∼ΔԴԵԶ, *ուրեմն*

ԱԲ : ԴԵ=ԲԳ : ԵԶ.

զորս բազմապատկեալ անդամ առ անդամ, լինիցի

$\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ԴԵ}}^2$=ԲԳ·ԱԻ : ԵԶ·ԴԼ:

Իսկ արդ

ΔԱԲԳ : ΔԴԵԶ=ԲԳ·ԱԻ : ԵԶ·ԴԼ (158),

ուրեմն է

ΔԱԲԳ : ΔԴԵԶ=$\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ԴԵ}}^2$,

և

ΔԱԲԳ : ΔԴԵԶ=$\overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{ԵԶ}}^2$,

և

$$\Delta \text{ԱԲԳ} : \Delta \text{ԴԵԶ} = \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ԴԶ}}^2,$$

քանզի

$$\text{ԱԲ} : \text{ԴԵ} = \text{ԲԳ} : \text{ԵԶ} = \text{ԱԳ} : \text{ԴԶ} :$$

Հետեւանք Ա. — *Որովհետեւ* (141),

$$\text{ԱԲ} : \text{ԴԵ} = \text{ԱԻ} : \text{ԴԼ},$$

ուստի և

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ԴԵ}}^2 = \overline{\text{ԱԻ}}^2 : \overline{\text{ԴԼ}}^2,$$

ուրեմն

$$\Delta \text{ԱԲԳ} : \Delta \text{ԴԵԶ} = \overline{\text{ԱԻ}}^2 : \overline{\text{ԴԼ}}^2 .$$

այսինքն է տարածութիւնք երեսաց նման եռանկեանց համեմատին ընդ միմեանս որպէս քառակուսիք բարձրութեանցն ընդ միմեանս համեմատիցին :

Հետեւանք Բ. — *Եթէ իցէ* ԱԳ=2ԴԶ, *յայնժամ լինիցի*

$$\Delta \text{ԱԲԳ} : \Delta \text{ԴԵԶ} = 4\overline{\text{ԴԶ}}^2 : \overline{\text{ԴԶ}}^2 = 4 : 1 .$$

այսինքն է եթէ կողմանք միոյ յեռանկեանց իցեն կրկնապատիկ համազօր կողմանց երկրորդին, տարածութիւն երեսաց առաջնոյն լինիցի քառապատիկ երկրորդին :

Եթէ իցէ ԱԳ=3ԴԶ, *յայնժամ լինիցի*

$$\Delta \text{ԱԲԳ} : \Delta \text{ԴԵԶ} = 9 : 1,$$

և ընդհանրապէս եթէ իցէ ԱԳ=ՆԴԶ, *յայնժամ լինիցի*

$$\Delta \text{ԱԲԳ} : \Delta \text{ԴԵԶ} = \text{Ն}^2 : 1 :$$

161. Հայեցողութիւն. — *Քառակուսին* ԱԳԴԵ (Ձև 83) *կանգնեալ 'ի վերայ բովանդակութեան երկուց գծից* ԱԲ+ԲԳ, *հաւասար է բովանդակութեան քառակուսեաց կանգնելոց 'ի վերայ միոյ միոյ 'ի մասանցն* ԱԲ *և* ԲԳ, *յաւելեալ յայնս և զերկպատիկ ուղղանկիւնն կազմեալ յերկոցունց մասանցն* ԱԲ *և* ԱԳ. *այսինքն* $(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԲԳ}}^2 + 2 \cdot \text{ԱԲ} \cdot \text{ԲԳ}$:

Ապացուցութիւն. — *Ձգիցի անկիւնագիծն* ԱԴ, *և ընդ* Բ *ձգիցի* ԲԶ ∥ ԳԴ *մինչև հատանել* զԱԴ *յ*Է, *հուսկ յետոյ ընդ* Է *ձգիցի* ԸԹ ∥ ԱԳ : *Արդ որովհետև*

$$\text{ԱԳ} = \text{ԳԴ},$$

ուրեմն

$$\text{ԳԱԴ} = \text{ԳԴԱ} \quad (66) .$$

բայց նաև

$$\text{ԲԻԱ}=\text{ԳԴԱ}\quad(43),$$

ուրեմն

$$\text{ԳԱԴ}=\text{ԲԻԱ},$$

վասն այնորիկ և

$$\text{ԱԲ}=\text{ԲԻ}\quad(68)\cdot$$

ապա ուրեմն ԱԲԻԸ *է զուգահեռագիծ հաւասարակող, և ուղղահեան միանգամայն* $\text{ԲԱԸ}=\text{Ո}$, *ուստի* ԱԲԻԸ *է քառակուսի, ուրեմն* $\text{ԱԲԻԸ}=\overline{\text{ԱԲ}}^2$:

Ըստ նմին օրինակի ցուցանի լինել

$$\text{ԻԹԴՁ}=\overline{\text{ԻԹ}}^2,$$

բայց

$$\text{ԻԹ}=\text{ԲԳ},$$

ուրեմն

$$\text{ԻԹԴՁ}=\overline{\text{ԲԳ}}^2:$$

Դարձեալ

$$\text{ԲԳԹԻ}=\text{ԲԻ}\cdot\text{ԲԳ}\quad(147),$$

բայց

$$\text{ԲԻ}=\text{ԱԲ},$$

ապա ուրեմն

$$\text{ԲԳԹԻ}=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}:$$

Հուսկ յետոյ

$$\text{ԸԻՁԵ}=\text{ԲԳԹԻ}\quad(104),$$

ապա ուրեմն

$$\text{ԸԻՁԵ}=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}:$$

Վասն այնորիկ

$$\begin{aligned}\text{ԱԳԴԵ}&=\text{ԱԲԻԸ}+\text{ԻԹԴՁ}+\text{ԲԳԹԻ}+\text{ԸԻՁԵ}\cdot\\&=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2+\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}+\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ},\\&=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2+2\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}:\end{aligned}$$

Բայց

$$\text{ԱԳԴԵ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2=(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})^2,$$

ապա ուրեմն

$$(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2+2\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}:$$

Հետեւանք. — *Եթէ իցէ* $\text{ԱԲ}=\text{ա}$, *և* $\text{ԲԳ}=\text{բ}$, *յայնժամ լինիցի* $(\text{ա}+\text{բ})^2=\text{ա}^2+\text{բ}^2+2\text{աբ}=\text{ա}^2+2\text{աբ}+\text{բ}^2$:

162. Հայեցողութիւն. — *Քառակուսին* ԱԳԴԵ (Ձև 84) կանգնեալ 'ի վերայ տարբերութեան երկուց գծից ԱԲ—ԲԳ, հաւասար է բովանդակութեան քառակուսեաց կանգնելոց 'ի վերայ միոյ միոյ 'ի մասանցն ԱԲ և ԲԳ, բարձեալ զերկպատիկ ուղղանկիւնն կազմեալ յերկոցունց մասանցն ԱԲ և ԲԳ. այսինքն $(\text{ԱԲ}-\text{ԲԳ})^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2-2\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ}$ ։

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցի անկիւնագիծն ԱԶ 'ի քառակուսին ԱԲԶԷ, որ կանգնի 'ի վերայ գծին ԱԲ. և ընդ Գ ձգեսցի ԳԸ ∥ ԱԷ մինչև հատանել զԱԶ 'ի Դ. հուսկ յետոյ ընդ Դ ձգեսցի ԵԹ ∥ ԱԲ, և ցուցանի որպէս 'ի նախընթաց հայեցողութեան լինել $\text{ԱԳԴԵ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2$, $\text{ԴԹԶԸ}=\overline{\text{ԲԳ}}^2$, և $\text{ԵԴԸԷ}=\text{ԲԳԴԹ}=\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԳ}$ ։ Երկայնեսցին ԹԲ, և ԴԳ 'ի Ժ և յԻ կոյս, մինչև լինել ԲԺ=ԳԻ=ԲԳ, և ձգեսցի ԺԻ. որովհետև ԲԺ=և ∥ ԳԻ, ուստի ԺԻ ∥ ԲԳ (90)· արդ որովհետև ԲԳ=ԲԺ, և ԳԲԺ=Ո, ուստի $\text{ԳԲԺԻ}=\overline{\text{ԲԳ}}^2$ ։ Յորմէ ԱԳԴԵ=ԱԲԶԷ+ԳԲԺԻ−ԵԹԶԷ−ԴԹԺԻ ։ Բայց որովհետև

$$\text{ԵԹ}=\text{ԱԲ},$$

դարձեալ

$$\text{ԶԹ}=\text{ԴԹ}=\text{ԲԳ},$$

և

$$\text{ԴԻ}=\text{ԴԳ}+\text{ԳԻ}=\text{ԱԳ}+\text{ԳԲ}=\text{ԱԲ},$$

ուստի

$$\text{ԵԹԶԷ}=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ},$$

և

$$\text{ԴԹԺԻ}=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ},$$

ուրեմն

$$\text{ԱԳԴԵ}=\text{ԱԲԶԷ}+\text{ԳԲԺԻ}-2\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ},$$

այսինքն է

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2-2\cdot\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ} \text{ ։}$$

Հետևանք. — Եթէ իցէ ԱԲ=ա և ԲԳ=բ. յայնժամ լինիցի $(\text{ա}-\text{բ})^2=\text{ա}^2+\text{բ}^2-2\text{աբ}=\text{ա}^2-2\text{աբ}+\text{բ}^2$ ։

165. Հայեցողութիւն. — Տարբերութիւն քառակուսեաց երկուց ուղիղ գծից ԱԲ և ԲԳ (Ձև 85) հաւասար է ուղղանկեան կանգնելոյ 'ի վերայ բովանդակութեան և 'ի վերայ տարբերութեան նոցա. այսինքն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԳ}}^2=(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})(\text{ԱԲ}-\text{ԲԳ}) :$$

Ապացուցութիւն. — Ի քառակուսին ԱԲԴԵ որ կանգնի 'ի վերայ գծին ԱԲ ցուցանի, որպէս 'ի նախընթաց յերկուս հայեցողութիւնս, լինել ԱԳԷԸ$=\overline{\text{ԱԳ}}^2$, ԷԹԴԶ$=\overline{\text{ԲԳ}}^2$, ԸԷԶԵ=ԲԳԷԹ=ԱԳ·ԲԳ: Երկայնիցին ԵԱ, և ԶԳ յԻ և 'ի Ժ կոյս, մինչև լինել ԱԻ=ԳԺ=ԲԳ. որովհետև ԵԻ ∥ ԶԺ, և ԳԱԻ=Ո, ուստի ԱԳԺԻ=ԱԳ·ԱԻ=ԱԳ·ԲԳ, ուրեմն ԱԳԺԻ=ԲԳԷԹ: Արդ որովհետև

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԳ}}^2=\text{ԱԲԴԵ}-\text{ԷԹԴԶ},$$
$$=\text{ԱԳԶԵ}+\text{ԲԳԷԹ},$$
$$=\text{ԱԳԶԵ}+\text{ԱԳԺԻ},$$
$$=\text{ԵԻԺԶ},$$
$$=\text{ԵԻ}\cdot\text{ԻԺ} :$$

Բայց

$$\text{ԵԻ}=\text{ԵԱ}+\text{ԱԻ},$$
$$=\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ}.$$

և

$$\text{ԻԺ}=\text{ԱԳ},$$
$$=\text{ԱԲ}-\text{ԲԳ}.$$

ուրեմն

$$\text{ԵԻԺԶ}=(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})(\text{ԱԲ}-\text{ԲԳ}),$$

վասն այնորիկ նաև

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԳ}}^2=(\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ})(\text{ԱԲ}-\text{ԲԳ}) :$$

164. Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի վերայ կողմանց ԲԳ, ԱԲ, ԱԳ ուղղանկիւն եռանկեան ԱԲԳ (Ձև 86) ձգիցին քառակուսիք, քառակուսին ԲԳԴԵ ձգեալ 'ի վերայ ստորաձգին հաւասար է բովանդակութե քառակուսեաց ԱԲԶԷ և ԱԳԸԹ ձգելոց 'ի վերայ էջիցն ԱԲ և ԱԳ:

Ապացուցութիւն. — Ի գագաթանէն Ա ձգեսցի ԱԻ ∥ ԲԵ, յորմէ ԲԳ հատանիցի 'ի Ժ և ԲԳԴԵ բաժանիցի յերկուս ուղղանկիւնս ԲԺԻԵ և ԺԳԴԻ, և լինիցի

ա. ԲԺԻԵ$=\overline{\text{ԱԲ}}^2$:

Քանզի եթէ ձգիցեմք զանկիւնագիծսն ԱԵ և ԶԳ, յայնժամ լինիցի

$$\text{ԱԲԵ}=\text{Ո}+\text{ԱԲԳ},$$

և

ԶԲԳ=Ո+ԱԲԳ,

ուրեմն

ԱԲԵ=ԶԲԳ·

դարձեալ

ԱԲ=ԶԲ,

և

ԲԵ=ԲԳ,

ուրեմն

ΔԱԲԵ≅ΔԲԶԳ (64)։

Արդ

ΔԱԲԵ≅$\frac{1}{2}$ԲԺԻԵ (102),

և

ΔԶԲԳ=$\frac{1}{2}$ԱԲԶԷ (102),

ուրեմն

$\frac{1}{2}$ԲԺԻԵ=$\frac{1}{2}$ԱԲԶԷ,

վասն այնորիկ նաև

ԲԺԻԵ=ԱԲԶԷ,

այսինքն

ԲԺԻԵ=$\overline{ԱԲ}^2$։

բ̃ · ԺԳԴԻ=$\overline{ԱԳ}^2$։ *Քանզի եթէ ձգեսցեմք զանկիւնագիծսն* ԲԸ *և* ԱԴ, *յայժամ լինիցի*

ԱԳԴ=Ո+ԱԳԲ,

և

ԸԳԲ=Ո+ԱԳԲ,

ուրեմն

ԱԳԴ=ԸԳԲ·

դարձեալ որովհետև

ԱԳ=ԸԳ,

և

ԳԴ=ԳԲ,

ուրեմն

ΔԱԳԴ≅ΔԸԳԲ (64)։

Արդ

ΔԱԳԴ=$\frac{1}{2}$ԺԳԴԻ (102),

եւ

$$\Delta\,\text{ԸԳԲ}=\tfrac{1}{2}\text{ԱԳԸԹ} \quad (102),$$

ուրեմն

$$\tfrac{1}{2}\text{ԺԳԴԻ}=\tfrac{1}{2}\text{ԱԳԸԹ},$$

վասն այնորիկ եւ

$$\text{ԺԳԴԻ}=\text{ԱԳԸԹ},$$

այսինքն

$$\text{ԺԳԴԻ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2:$$

Գ. Արդ որովհետեւ

$$\text{ԲԺԻԵ}=\overline{\text{ԱԲ}}^2,$$

եւ

$$\text{ԺԳԴԻ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2,$$

ուրեմն

$$\text{ԲԺԻԵ}+\text{ԺԳԴԻ}=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\text{ԱԳ}^2:$$

Բայց

$$\text{ԲԺԻԵ}+\text{ԺԳԴԻ}=\text{ԲԳԴԵ},$$
$$=\overline{\text{ԲԳ}}^2,$$

հետեւաբար

$$\overline{\text{ԲԳ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2:$$

Հետեւանք Ա. — Որովհետեւ

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԺԻԵ},$$

եւ

$$\text{ԲԺԻԵ}=\text{ԲԵ}\cdot\text{ԲԺ}=\text{ԲԳ}\cdot\text{ԲԺ},$$

ուստի

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԳ}\cdot\text{ԲԺ}:$$

Դարձեալ որովհետեւ

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\text{ԺԳԴԻ},$$

եւ

$$\text{ԺԳԴԻ}=\text{ԳԴ}\cdot\text{ԳԺ}=\text{ԳԲ}\cdot\text{ԳԺ},$$

ուստի

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\text{ԳԲ}\cdot\text{ԳԺ}.$$

ուրեմն քառակուսին միոյ յէջից հաւասար է ուղղանկեան կազմելոյ յինքեան առընթերակայ հատածոյ ստորաձգին եւ 'ի ստորաձգէն:

Հետեւանք Բ. — Որովհետեւ յ ΔԱԲԺ անկիւնն ԱԺԲ=Ո, *ուստի*

$$\overline{\text{ԲԺ}}^2+\overline{\text{ԱԺ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2\,.$$

բայց

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԺ}\cdot\text{ԲԵ}\,,$$

ուրեմն նաեւ

$$\overline{\text{ԲԺ}}^2+\overline{\text{ԱԺ}}^2=\text{ԲԺ}\cdot\text{ԲԵ}\,:$$

Արդ լինիցի

$$\text{ԲԽ}=\text{ԲԺ}\,,$$

և ձգիցի

$$\text{ԽԼ}\parallel\text{ԲԺ}\,,$$

վասն որոյ

$$\text{ԲԺ}\cdot\text{ԼԽ}=\overline{\text{ԲԺ}}^2\,,$$

հետեւաբար

$$\text{ԽԼ}\cdot\text{ԻԵ}=\overline{\text{ԱԺ}}^2\,:$$

Բայց արդ

$$\text{ԽԼ}\cdot\text{ԻԵ}=\text{ԽԼ}\cdot\text{ԽԵ}\,,$$

և

$$\text{ԽԼ}=\text{ԲԺ}\,,$$

և

$$\begin{aligned}\text{ԽԵ}&=\text{ԲԵ}-\text{ԲԽ}\,,\\&=\text{ԲԳ}-\text{ԲԺ}\,,\\&=\text{ԺԳ}\,,\end{aligned}$$

ապա ուրեմն

$$\text{ԽԼ}\cdot\text{ԻԵ}=\text{ԲԺ}\cdot\text{ԺԳ}\,,$$

վասն այնորիկ նաեւ

$$\overline{\text{ԱԺ}}^2=\text{ԲԺ}\cdot\text{ԺԳ}\,,$$

հետեւաբար քառակուսի ուղղահայեցին ուղղանկիւն եռանկեան հաւասար է ուղղանկեան կազմելոյ 'ի հատածոց ստորաձգին :

Հետեւանք Գ. — *Եթէ 'ի քառակուսին* ԱԲԳԴ (Ձև 87) *ձգիցի անկիւնագիծ մի, քառակուսին կազմեալ 'ի վերայ անկիւնագծին է երկպատիկ տուեալ քառակուսւոյն. քանզի*

$$\begin{aligned}\overline{\text{ԱԳ}}^2&=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2\,,\\&=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԲ}}^2=2\overline{\text{ԱԲ}}^2\,:\end{aligned}$$

Որովհետեւ

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ԱԲ}}^2 = 2 : 1,$$

ուստի

$$\text{ԱԳ} : \text{ԱԲ} = \sqrt{2} : 1 \cdot$$

այս ուրեմն անկիւնագիծ քառակուսւոյ անչափական է ընդ. կողմն :

Հետեւանք Դ. — *Աստուածին հաւասար և խոտորնակին հայեցողութեանս. զի եթէ 'ի միում* ԱԲԳ (Ձև 88) *եռանկեան քառակուսի մեծագոյն կողման հաւասար իցէ բովանդակութեան քառակուսեաց այլոց երկուց կողմանց, եռանկիւնն այն է ուղղանկիւն. այսինքն եթէ իցէ* $\overline{\text{ԲԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2$, *յայնժամ* $\text{Տ} = \text{Ո}$: *Քանզի եթէ յԱ կանգնիցի* $\text{ԱԴ} \perp \text{ԱԳ}$ *և* $\text{ԱԴ} = \text{ԱԲ}$ *գործիցի, յայտ է եթէ* $\overline{\text{ԴԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԴ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2$, *քանզի* $\text{Ն} = \text{Ո}$ *ըստ կազմածոյն : Եւ զի* $\text{ԱԴ} = \text{ԱԲ}$, *ուրեմն և* $\overline{\text{ԴԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2$, *ուստի* $\overline{\text{ԴԳ}}^2 = \overline{\text{ԲԳ}}^2$, *կամ* $\text{ԴԳ} = \text{ԲԳ}$, *ուրեմն* $\Delta\text{ԱԳԴ} \cong \Delta\text{ԱԲԳ}$ (65), *հետեւաբար և* $\text{Տ} = \text{Ն} = \text{Ո}$:

Հետեւանք Ե. — *Եթէ մի էջն ուղղանկիւն եռանկեան* ԱԲԳ (Ձև 89) *երկպատիկ մեծ իցէ քան զմիւս էջն, և 'ի սորա բաժանէ անտի առցի մասն ինչ հաւասար փոքր էջին, մնացեալ մասնն է միջին համեմատական մեծի էջին, և տարբերութեան որ գտանի, յորժամ այն մնացեալ մասն առաջադրին հանիցի 'ի մեծագոյն էջէն : Քանզի եթէ իցէ* $\text{ԲԳ} = 2\text{ԱԲ}$, *և* $\text{ԱԴ} = \text{ԱԲ}$, *յայտ է եթէ* $\text{ԱԳ} = \sqrt{(\overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԲԳ}}^2)} = \sqrt{(\overline{\text{ԱԲ}}^2 + 4\overline{\text{ԱԲ}}^2)}$ $= \sqrt{5\overline{\text{ԱԲ}}^2} = \text{ԱԲ}\sqrt{5}$, *տաս և* $\text{ԳԴ} = \text{ԱԳ} - \text{ԱԴ} =$ $\text{ԱԲ}\sqrt{5} - \text{ԱԲ}$, *և* $\overline{\text{ԳԴ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 (\sqrt{5} - \text{ԱԲ})^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2(6 - 2\sqrt{5})$: *Դարձեալ գտանի* $\text{ԲԳ} - \text{ԳԴ} = 2\text{ԱԲ} - (\text{ԱԲ}\sqrt{5} - \text{ԱԲ}) =$ $\text{ԱԲ}(3 - \sqrt{5})$, *և տաս* $\text{ԲԳ}(\text{ԲԳ} - \text{ԳԴ}) = 2\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԲ}(3 - \sqrt{5})$ $= \overline{\text{ԱԲ}}^2(6 - 2\sqrt{5})$: *Այս ուրեմն է* $\text{ԲԳ}(\text{ԲԳ} - \text{ԳԴ}) = \overline{\text{ԳԴ}}^2$, *յորմէ* $\text{ԲԳ} : \text{ԳԴ} = \text{ԳԴ} : \text{ԲԳ} - \text{ԳԴ}$:

165. Առաջարկութիւն. — *փոխել զերկայնաւորն* ԱԲԳԴ (Ձև 90) *'ի քառակուսի :*

ա. Լուծումն. — *Երկայնիցի* ԱԲ *մինչև ցԵ, որպէս զի* $\text{ԲԵ} = \text{ԲԳ}$ *իցէ, հատանիցի* ԱԵ *'ի Զ, յետ այնորիկ 'ի Զ կեդրոնէ անտի* $\text{ԶԱ} = \text{ԶԵ}$ *շառաւիղաւ ձգիցի կէս բոլորակ, որ ընդ Ա և Ե անցանիցէ, և երկայնիցի* ԳԲ *մինչև ցըրջապատ բոլորակին, և* ԲԿ *լինիցի կողմն խնդրելոյ քառակուսւոյն :*

Ապացուցութիւն. — Ձգիցին ուղիղ գիծքն ԱԷ և ԵԷ: Արդ ԱԷԵ=Ո (80. հետև.), ուրեմն ΔԱԷԵ է ուղղանկիւն, և ԷԲ ուղղահայեաց գիծն ձգեալ 'ի գագաթանէ ուղիղ անկեան 'ի վերայ ստորաձգին, ուստի

$$\overline{\text{ԷԲ}}^2=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԵ} \text{ (164. հետև. Բ)}.$$

բայց

$$\text{ԲԵ}=\text{ԲԳ},$$

վասն այնորիկ նաև

$$\overline{\text{ԷԲ}}^2=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԲԳ},$$
$$=\text{ԱԲԳԴ}:$$

Բ. Լուծումն. — Հատարակիցի մեծագոյն կողմն ԱԲ յԵ (Ձև 91), յետ այնորիկ յԵ կեդրոնէ անտի ԵԱ=ԵԲ շառաւիղաւ ձգիցի կէս բոլորակ, որ ընդ Ա և ընդ Բ անցանիցէ, և ապա հատանիցի 'ի կողմանէն ԱԲ մասն ԱՁ=ԱԴ, և 'ի Ձ կանգնիցի ուղղահայեաց մինչև ցշրջապատ բոլորակին, հուսկ յետոյ ձգիցի ԱԷ. և ԱԷ լինիցի կողմն խնդրեալ քառակուսւոյն:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցի ուղիղ գիծն ԲԷ, լինիցի ΔԱԲԷ ուղղանկիւն (80. հետև.), և ԷՁ ուղղահայեաց գիծն ձգեալ 'ի գագաթանէ ուղիղ անկեան ԱԷԲ 'ի վերայ ստորաձգին ԱԲ. ուստի

$$\overline{\text{ԱԷ}}^2=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԱՁ} \text{ (164. հետև. Ա)}.$$

բայց արդ

$$\text{ԱՁ}=\text{ԱԴ},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԷ}}^2=\text{ԱԲ}\cdot\text{ԱԴ},$$
$$=\text{ԱԲԳԴ}:$$

166. Առաջարկութիւն. — Ձգել քառակուսի ինչ որ այլոց երկուց կամ բազում քառակուսեաց միանգամայն հաւասար իցէ. այսինքն $=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԵՁ}}^2+\overline{\text{ԷԸ}}^2$ (Ձև 92):

Լուծումն. — Ի վերայ գծին ԱԲ յԱ կանգնիցի ուղղահայեացն ԱԹ=ԳԴ, և ձգիցի ԲԹ. 'ի վերայ ուղղութեանն ԲԹ 'ի Թ կանգնիցի ուղղահայեացն ԹԺ=ԵՁ, և ձգիցի ԲԺ. 'ի կատարած 'ի վերայ ուղղութեանն ԲԺ 'ի Ժ կանգնիցի ուղղահայեացն ԺԻ=ԷԸ, և ձգիցի ԲԻ. և ԲԻ լինիցի կողմն խնդրեալ քառակուսւոյն:

Ապացուցութիւն. — Որովհետեւ եռանկիւնքն ԱԲԹ, ԲԹԺ, ԲԺԻ ուղղանկիւնք են, ուստի

$$\overline{\text{ԲԹ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԹ}}^2 \quad (164)\cdot$$

բայց

$$\text{ԱԹ}=\text{ԳԴ},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԲԹ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2:$$

Դարձեալ որովհետեւ

$$\overline{\text{ԲԺ}}^2=\overline{\text{ԲԹ}}^2+\overline{\text{ԹԺ}}^2,$$

բայց

$$\overline{\text{ԲԹ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2,$$

եւ

$$\text{ԹԺ}=\text{ԵԶ},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԲԺ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԵԶ}}^2:$$

Հուսկ յետոյ

$$\overline{\text{ԲԻ}}^2=\overline{\text{ԲԺ}}^2+\overline{\text{ԺԻ}}^2\cdot$$

բայց

$$\overline{\text{ԲԺ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԵԶ}}^2,$$

եւ

$$\text{ԺԻ}=\text{ԷԸ},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԲԻ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԵԶ}}^2+\overline{\text{ԷԸ}}^2:$$

167. Առաջարկութիւն. — Գծել քառակուսի մի, որ լինի հաւասար տարբերութեան երկուց քառակուսեաց ծանուցելոց $\overline{\text{ԱԲ}}^2$ եւ $\overline{\text{ԳԴ}}^2$ (Ձև 93):

Ա. Լուծում. — Հատարակիցի մեծագոյն գծին ԱԲ յԵ, յետ այնորիկ յԵ կեդրոնէ անով ԵԱ=ԵԲ շառաւիղաւ ձգիցի կէս բոլորակ, որ ընդ Ա եւ ընդ Բ անցանիցէ: Ապա յԱ կէտէ ԳԴ շառաւիղաւ ձգիցի աղեղն մի բոլորակի, որ զկէս բոլորակն հատանիցէ 'ի Զ, եւ ձգիցի ԲԶ. եւ ԲԶ լինիցի կողմն խնդրեալ քառակուսւոյն:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցի ԱԶ, եւ լինիցի

$$\text{ԱԶԲ}=\text{Ո} \quad (80\cdot \text{Հետեւ.}),$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱԶ}}^2+\overline{\text{ԲԶ}}^2 \quad (164),$$

ուստի

$$\overline{\text{ԲԶ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԱԶ}}^2 .$$

բայց

$$\overline{\text{ԱԶ}}^2=\text{ԳԴ} ,$$

ապա ուրեմն

$$\overline{\text{ԲԶ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԳԴ}}^2 :$$

Է. Լուծումն. — *Ի վերայ փոքրագոյն գծին* ԳԴ (Ձև 94) *'ի* Դ *կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծն* ԴԶ, *յետ այնորիկ 'ի* Գ *կէտէ* ԱԲ *շառաւիղաւ ձգեսցի աղեղն ինչ բոլորակի, որ զուղղահայեաց գիծն հատանիցէ յ*Է. *և* ԴԷ *լինիցի կողմն խնդրեալ քառակուսւոյն* :

Ապացուցութիւն. — *Ձգեսցի* ԳԷ, *և լինիցի*

$$\text{ԳԴԷ}=\text{Ո} ,$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԴԷ}}^2=\overline{\text{ԳԷ}}^2 \quad (164),$$

ուստի

$$\overline{\text{ԴԷ}}^2=\overline{\text{ԳԷ}}^2-\overline{\text{ԳԴ}}^2 .$$

բայց

$$\text{ԳԷ}=\text{ԱԲ} ,$$

ապա ուրեմն

$$\overline{\text{ԴԷ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԳԴ}}^2 :$$

168. Հայեցուածութիւն. — *Յոր զինչ և իցէ* ԱԲԳ (Ձև 95) *բթանկիւն եռանկեան, քառակուսի* ԱԲ *կողման որ կայ յանդիման* ԱԳԲ *բութ անկեան, հաւասար է բովանդակութեան քառակուսեաց այլոց երկոցունց կողմանց* ԱԳ *և* ԲԳ, *յոր յաւելեալ և զերկպատիկ ուղղանկիւն* ԲԳ *միոյ կողմանն և* ԳԴ *հատածին, որ կայ 'ի մէջ* Գ *գագաթան բութ անկեան և ոտին* Դ *բարձրութեանն* ԱԴ. *այսինքն* $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2+2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}$:

Ապացուցութիւն. — *Որովհետև*

$$\text{ԱԴԲ}=\text{Ո} ,$$

ուստի

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2 \quad (164).$$

Արդ

$$\text{ԲԴ}=\text{ԲԳ}+\text{ԳԴ},$$

և

$$\overline{\text{ԲԴ}}^2=(\text{ԲԳ}+\text{ԳԴ})^2$$
$$=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ},$$

յորմէ և

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}+\overline{\text{ԱԴ}}^2$$
$$=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2+2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}:$$

Բայց քանզի

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2 \quad (164),$$

որովհետև

$$\text{ԱԴԳ}=\text{Ո},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2+2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}:$$

169. *Հայեցողութիւն.* — Ցոր զինչ և իցէ ԱԲԳ (Ձև 96) սրանկիւն եռանկեան, քառակուսին ԱԲ կողման որ կայ դէմ յանդիման ԱԳԲ սուր անկեան, հաւասար է բովանդակութեան քառակուսեաց այլոց երկոցունց կողմանց ԱԳ և ԲԳ, բարձեալ անտի զկրկնապատիկ ուղղանկիւն ԲԳ միոյ 'ի կողմանցն յայնցանէ և ԳԴ հատածին, որ կայ 'ի մէջ Գ գագաթման սուր անկեան և ոտիցն Դ բարձրութեանն ԱԴ. այսինքն $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}:$

Ապացուցութիւն. — Կամ ուղղահայեաց գիծն անկանի 'ի մէջ եռանկեան, յորժամ ԱԲԳ անկիւնն սուր իցէ. և կամ արտաքոյ եռանկեան, եթէ ԱԲԳ բութ իցէ:

ա. Եթէ ուղղահայեաց գիծն անկանիցի 'ի մէջ եռանկեան, որովհետև

$$\text{ԱԴԲ}=\text{Ո},$$

ուստի

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2 \quad (164):$$

Արդ

$$\text{ԲԴ}=\text{ԲԳ}-\text{ԳԴ},$$

և

$$\overline{\text{ԲԴ}}^2=(\text{ԲԳ}-\text{ԳԴ})^2,$$
$$=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ},$$

յորմէ և

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}+\overline{\text{ԱԴ}}^2:$$

Բայց քանզի

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2\quad(164),$$

որովհետև

$$\text{ԱԴԳ}=\text{Ո},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}:$$

Բ. Այլ սակայն եթէ ուղղահայեաց գիծն անկանիցի արտաքոյ եռանկեան, որովհետև

$$\text{ԱԴԲ}=\text{Ո},$$

ուստի

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2\quad(164):$$

Արդ

$$\text{ԲԴ}=\text{ԳԴ}-\text{ԲԳ}.$$

և

$$\overline{\text{ԲԴ}}^2=(\text{ԳԴ}-\text{ԲԳ})^2,$$
$$=\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ},$$

յայտ է

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}+\overline{\text{ԱԴ}}^2:$$

Բայց քանզի

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2\quad(164),$$

որովհետև

$$\text{ԱԴԳ}=\text{Ո},$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2-2\cdot\text{ԲԳ}\cdot\text{ԳԴ}:$$

170. Հայեցողութիւն. — Յոր զինչ և իցէ ԱԲԳ (Ձև 97) եռանկեան եթէ 'ի Գ գագաթանէ ձգիցի 'ի միջակէտ խարսխին գիծն ԳԵ, լինիցի $\overline{\text{ԱԳ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2=2\cdot\overline{\text{ԳԵ}}^2+2\cdot\overline{\text{ԱԵ}}^2$:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցի ուղղահայեաց գիծն ԳԴ 'ի վերայ խարսխին ԱԲ, ապա ուրեմն 'ի ԲԳԵ եռանկեան ըստ (169) համարոյն լինիցի:

$$\overline{\text{ԲԳ}}^2=\overline{\text{ԲԵ}}^2+\overline{\text{ԳԵ}}^2-2\cdot\text{ԲԵ}\cdot\text{ԴԵ},$$

և յԱԳԵ եռանկեան ըստ (168) համարոյն լինիցի

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԱԵ}}^2+\overline{\text{ԳԵ}}^2+2\cdot\text{ԱԵ}\cdot\text{ԴԵ},$$

իսկ 'ի միմեանս յաւելուցումք զերկոսին հաւասարութիւնս, դիտելով զի ԱԵ=ԲԵ, ելանիցէ

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2=2\cdot\overline{\text{ԱԵ}}^2+2\cdot\overline{\text{ԳԵ}}^2 :$$

Հետեւանք. — Որովհետեւ յոր զինչ և իցէ զուգահեռագծի ԱԲԳԴ (Ձև 42) ԱԵ=ԳԵ, ԲԵ=ԴԵ (93), ապա ուրեմն յԱԲԳ եռանկեան

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2=2\cdot\overline{\text{ԱԵ}}^2+2\cdot\overline{\text{ԲԵ}}^2,$$

և յԱԳԴ եռանկեան

$$\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2=2\cdot\overline{\text{ԱԵ}}^2+2\cdot\overline{\text{ԴԵ}}^2,$$

Իբրև 'ի միմեանս յաւելուցումք զերկոսին հաւասարութիւնս, դնելով զի ԲԵ=ԴԵ, ելանիցէ

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2=4\cdot\overline{\text{ԱԵ}}^2+4\cdot\overline{\text{ԲԵ}}^2 :$$

Եւ քանզի

$$4\overline{\text{ԱԵ}}^2=(2\text{ԱԵ})^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2,$$

և

$$4\overline{\text{ԲԵ}}^2=(2\text{ԲԵ})^2=\overline{\text{ԲԴ}}^2,$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2.$$

այսինքն յամենայն զուգահեռագծի բովանդակութիւն քառակուսեաց կողմանցն հաւասար է բովանդակութեան քառակուսեաց անկիւնագծիցն :

171. Հայեցողութիւն. — Նման բազմանկիւնք ԱԲԳԴԵ և ՁԷԸԹԺ (Ձև 98) համեմատին ընդ միմեանս, որպէս քառակուսիք համագիր կողմանց կամ համագիր անկիւնագծից ընդ միմեանս համեմատելին :

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին համագիր անկիւնագիծքն ԱԳ, ԱԴ, ՁԸ, ՁԹ, որովք նման բազմանկիւնքն բաժանին 'ի բովանդակ նման եռանկիւնս, որք ընդ միմեանս համեմատին որպէս միանգամ քառակուսիք համագիր կողմանցն իւրեանց. այսինքն

$$\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ՁԷԸ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ՁԸ}}^2 \quad (160),$$

և

$$\Delta\text{ԱԳԴ} : \Delta\text{ՁԸԹ}=\overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ՁԸ}}^2 \quad (160),$$

ուրեմն

$$\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ՁԷԸ}=\Delta\text{ԱԳԴ} : \Delta\text{ՁԸԹ} \quad (115) :$$

Դարձեալ

$$\Delta\text{ԱԳԴ} : \Delta\text{ՁԸԹ}=\overline{\text{ԱԴ}}^2 : \overline{\text{ՁԹ}}^2,$$

և

$$\Delta\text{ԱԴԵ} : \Delta\text{ԶԹԺ} = \overline{\text{ԱԴ}}^2 : \overline{\text{ԶԹ}}^2,$$

ուրեմն

$$\Delta\text{ԱԳԴ} : \Delta\text{ԶԸԹ} = \Delta\text{ԱԴԵ} : \Delta\text{ԶԹԺ} :$$

Արդ քանզի

$$\begin{aligned}\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ԶԷԸ} &= \Delta\text{ԱԳԴ} : \Delta\text{ԶԸԹ} \\ &= \Delta\text{ԱԴԵ} : \Delta\text{ԶԹԺ} :\end{aligned}$$

նաև

$$\left\{\begin{array}{r}\Delta\text{ԱԲԳ} \\ +\Delta\text{ԱԳԴ} \\ +\Delta\text{ԱԴԵ}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{r}\Delta\text{ԶԷԸ} \\ +\Delta\text{ԶԸԹ} \\ +\Delta\text{ԶԺԹ}\end{array}\right\} = \Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ԶԷԸ}, \text{ №.}$$

այսինքն

$$\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{ԶԷԸԹԺ} = \Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ԶԷԸ}, \text{ №.}$$

բայց

$$\begin{aligned}\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{ԶԷԸ} &= \overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ԶԷ}}^2, \\ &= \overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{ԷԸ}}^2, \\ &= \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ԶԸ}}^2, \text{ №.}\end{aligned}$$

ապա ուրեմն

$$\begin{aligned}\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{ԶԷԸԹԺ} &= \overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ԶԷ}}^2, \\ &= \overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{ԷԸ}}^2, \\ &= \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ԶԸ}}^2,\end{aligned}$$

այլովքն հանդերձ ։

ԳԼՈՒԽ ԻՆՆԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ԲՈԼՈՐԱԿԻ

Առաջադրութիւնք:

172. Ծանօթութիւն. — Որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ ԱԲ (Ձև 99) որ հատանիցէ զշրջապատն յերկուս կէտս, անուանեալ կոչի հատանող բոլորակի: Մասն հատանողին որ կայցէ 'ի բոլորակին, զոր օրինակ ԳԴ, և ընդհանրապէս որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ որ զերկուս Գ և Ե, կամ Գ և Զ կէտս շրջապատին ընդ միմեանս յօդիցէ, ասի լար բոլորակի: Որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ, զոր օրինակ ԷԸ, որ որչափ և երկայնիցի 'ի միում կէտի Թ բախիցէ զշրջապատն, ասի շօշափող բոլորակի. և կէտն Թ կէտ շօշափման: Այսպէս երկու բոլորակք շօշափին զմիմեանս, յորժամ շրջապատք նոցա ունիցին մի կէտ հասարակաց: Մասն ինչ բոլորակի շուրջ փակեալ 'ի միջէ աղեղանէ և 'ի լարէ նորա աղեղան, զոր օրինակ ԳԹԴԳ կամ ԳԶԵԻԼԴԳ, անուանի հատած բոլորակի: Անկիւն, որոյ սրունքն իցեն լարք, և գագաթն իցէ 'ի շրջապատի, զոր օրինակ ԶԳԵ, ԵԳԴ, ասի անկիւն շրջապատի. այլ եթէ սրունքն իցեն շառաւիղք, հետևաբար և գագաթն իցէ 'ի կեդրոնի, անուանեալ կոչի անկիւն կեդրոնական: Անկիւնք շրջապատի և կեդրոնական ասին գտանիլ 'ի վերայ աղեղանն. որ կայ 'ի միջին վայրի սրունից նոցա. որպիսի ինչ անկիւնն ԶԳԵ 'ի վերայ ԶԵ աղեղան գտանի, ԵԳԴ 'ի վերայ ԵԴ աղեղան, և ԻԺԼ 'ի վերայ ԻԼ աղեղան: Հուսկ յետոյ մասն երեսաց բոլորակի, որ յերկուց շառաւիղաց և յաղեղանէ՝ որ 'ի միջի նոցա կայցէ, շուրջանակի ամհամանիցի, զոր օրինակ ԻԺԼԻ, կոչի հապաւաձեւ բոլորակի:

173. Ծանօթութիւն. — Շրջապատն որ զինչ և իցէ շառաւիղաւ ձգեալ իցէ, յ360 հաւասար մասունս բաժանի, որք և անուանեալ կոչին աստիճանք: Եւ մի մի աստիճան բաժանի դարձեալ 'ի 60 հաւասար մասունս, որք ասին մանրամասունք, և մի մի մանրամասն 'ի 60 հաւասար մասունս, որք անուանին մանրերկրորդք: Աստիճանք, մանրամասունք և մանրերկրորդք բացատրին 'ի ձեւն նշանացս °, ′, ″, վասն որոյ 22° 54′ 18″ յայտ արարեալ ցուցանէ աստիճանս 22, մանրամասունս 54, և մանրերկրորդս 18:

Ի տասնորդական չափս շրջապատն 'ի 400 աստիճանս բաժանի, որով կէս բոլորակին՝ յ200 և քառորդն բոլորակի, որ եթէ միութիւն համարի, 'ի 100 աստիճանս: Եւ մի մի աստիճան բաժանի դարձեալ 'ի 100 մանրամասունս, մի մի մանրամասն 'ի 100 մանրերկրորդս, այլովքն հանդերձ: Ուստի աղեղն ինչ բոլորակի 90° 75′ 58″ համառօտիւք ևս դրոշմիցի 90°·7558, կամ եթէ միութիւն համարիցի քառորդն բոլորակի, լինիցի 0ᶜ·907558: Աստիճանքս անուանին տասնորդական աստիճանք, և առաջինքն վաթսնորդական աստիճանք:

Արդ եթէ աղեղն ինչ բոլորակի Ա տասնորդական աստիճանաց խնդրիցի բացատրել ա վաթսնորդական աստիճանօք, յայտ է եթէ

$$\text{Ա} : \text{ա} = 100:90,$$

ուստի և լինիցի

$$\text{ա} = \frac{90}{100}\text{Ա} = \text{Ա} - \frac{1}{10}\text{Ա},$$

և

$$\text{Ա} = \frac{100}{90}\text{ա} = \text{ա} + \frac{1}{9}\text{ա}:$$

ա. Օրինակ. — Վերածել զաղեղն ինչ բոլորակի 70° 95 4″, 3 տասնորդական աստիճանաց 'ի վաթսնորդական աստիճանս:

Լուծումն. — ա = 70° 95043 − 7° 095043 = 63° 855387 = 63° 51′ 19″, 39.

Է · Օրինակ · — Վերածել զաղեղն ինչ բոլորակի 58° 27′ 45″ վաթսնորդական աստիճանաց 'ի տասնորդական աստիճանս :

Լուծումն · — Ա=58°, 4625+6°, 495833=64°, 958333 =64° 95′ 83″, 33 :

174 · Հայեցողութիւն · — Ուղղահայեաց գիծն ԳԴ որ անկանի 'ի Գ կեդրոնէ 'ի վերայ ԱԲ (Զև 100) լարին հատանէ զլարն 'ի Դ :

Ապացուցութիւն · — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԱԳ և ԲԳ :

Արդ

ԱԳ=ԲԳ,

դարձեալ

ԳԱԴ=ԳԲԴ (66),

և

ԳԴԱ=ԳԴԲ=Ու,

ուրեմն

ΔԱԳԴ≅ΔԲԳԴ (63),

վասն այնորիկ և

ԱԴ=ԲԴ,

այսինքն ԱԲ հատանեսցի 'ի Դ :

175 · Հայեցողութիւն · — Որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ ԳԴ (Զև 100) որ զԳ կեդրոն բոլորակին ընդ Դ միջոցի ԱԲ լարին կապիցէ, կայ ուղղահայեաց 'ի վերայ լարին :

Ապացուցութիւն · — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԱԳ և ԲԳ :

Արդ

ԴԳ=ԳԴ,

դարձեալ

ԱԴ=ԲԴ,

և

ԱԳ=ԲԳ,

վասն այնորիկ

ΔԱԳԴ≅ΔԲԳԴ (63),

ուրեմն

ԳԴԱ=ԳԴԲ,

հետևաբար

ԳԴԱ=Ո,

կամ ԳԴ կայ ուղղահայեաց 'ի վերայ ԱԲ լարին :

176 · Հայեցողութիւն . — Ուղղահայեաց գիծն որ կանգնիցի 'ի Դ միջոցի ԱԲ լարին (Ձև 100) իբրև երկայնեալ ընդ Գ կեդրոն բոլորակին անցանիցէ :

Ապացուցութիւն . — Ձգեսցի ուղիղ գիծ 'ի Դ կէտէ առ Գ կէտ, որ կայցէ ուղղահայեաց 'ի վերայ ԱԲ լարին (175) : Բայց 'ի Դ կէտի մարթ է մի եւեթ ուղղահայեաց գիծ կանգնել առ ԱԲ (82), և այն է ԳԴ, վասն այնորիկ որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ, որ 'ի Դ ձգեսցի ուղղահայեաց առ ԱԲ, անկանիցի 'ի վերայ ԳԴ գծին, և հետևաբար անցանիցէ ընդ կեդրոնն Գ :

177 · Հայեցողութիւն . — Երկու լարք ԱԲ և ԴԵ (Ձև 101) որ չիցեն տրամագիծ, զմիմեանս հատարակել չկարեն :

Ապացուցութիւն . — Հատանիցեն երկոքեան լարքն 'ի Զ, ձգեսցի ուղիղ գիծն ԳԶ 'ի կեդրոնէն Գ առ կէտն Զ : Արդ եթէ լինէր Զ միջոց երկոցունց լարիցն, յայնժամ լինէր և ԳԶԱ=Ո, և ԳԶԴ=Ո (175), ուստի և ԳԶԱ=ԳԶԴ, որ անպատեհ իմն է : Ուրեմն չէ մարթ Զ կէտի լինել միջոց հասարակաց երկոցունց լարիցն :

178 · Առաջարկութիւն . — Ծանուցեալ զբոլորակն ԱԲԴԵԱ կամ զաղեղն ԱԲԴ (Ձև 102) գտանել զկեդրոնն :

Լուծում . — Յոր զինչ և իցէ Բ կէտէ ձգեսցին երկու լարք ԱԲ և ԲԴ, հատարակեսցին երկոքեան լարքն 'ի կէտսն Զ և Է, և 'ի վերայ միջոցի նոցա կանգնեսցին ԶԸ և ԷԹ ուղղահայեաց գիծք · և կէտն Գ հատանելոյ նոցա զմիմեանս լինիցի կեդրոնն խնդրեալ :

Ապացուցութիւն . — Որովհետև ԶԸ կանգնի ուղղահայեաց 'ի Զ միջոցի ԱԲ լարին, ուրեմն հարկ է կեդրոնին 'ի նմին կալ (176) · Նոյնպէս որովհետև ԷԹ կանգնի ուղղահայեաց յԷ միջոցի ԲԴ լարին, ուրեմն հարկ է կեդրոնին 'ի նմին կալ · և քանզի կեդրոնն կայ 'ի վերայ երկոցունց ուղղահայեաց գըծիցն միանգամայն, ուստի 'ի կէտն հատանելոյ զմիմեանս կայցէ, այսինքն 'ի Գ :

179 · Հայեցողութիւն . — Ամենայն լար որ ոչ ընդ կեդրոն

բոլորակին անցանիցէ, փոքրագոյն է քան զտրամագիծն ԱԲ (Ձև 103)։

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԴԵ որ զինչ և իցէ այլ լար. ձգեցին ուղիղ գիծքն ԳԴ և ԳԵ։ Արդ

$$\text{ԳԴ}=\text{ԳԱ},$$

և

$$\text{ԳԵ}=\text{ԳԲ},$$

ուրեմն

$$\text{ԳԴ}+\text{ԳԵ}=\text{ԳԱ}+\text{ԳԲ},$$
$$=\text{ԱԲ},$$

բայց

$$\text{ԳԴ}+\text{ԳԵ}>\text{ԴԵ}\quad(70),$$

վասն այնորիկ նաև

$$\text{ԱԲ}>\text{ԴԵ}։$$

180. Հայեցողութիւն. — Երկու լարք ԱԲ, ԴԵ (Ձև 104) որ հաւասար հեռի կայցեն 'ի կեդրոնէն Գ, միմեանց հաւասարք են. փոխադարձաբար երկու հաւասար լարք, հաւասար հեռի կան 'ի կեդրոնէ։

Ապացուցութիւն. — ա. Իցէ ԳԶ=ԳԷ։ Ձգեցին ուղիղ գիծքն ԳԲ և ԳԴ։ Արդ

$$\text{ԳԲ}=\text{ԳԴ},$$

դարձեալ

$$\text{ԳԶ}=\text{ԳԷ},$$

և

$$\text{ԳԶԲ}=\text{ԳԷԴ}=\text{Ո},$$

ուրեմն

$$\Delta\text{ԳԲԶ}\cong\Delta\text{ԳԴԷ}\ (164.\ \text{Հետև. Գ.}),$$

վասն այնորիկ և

$$\text{ԲԶ}=\text{ԴԷ}.$$

բայց ԱԲ հատարակեցաւ 'ի գծէն ԳԶ, և ԴԵ 'ի գծէն ԳԷ (174), հետևաբար

$$\text{ԱԲ}=2\text{ԲԶ},$$

և

$$\text{ԴԵ}=2\text{ԴԷ},$$

ուրեմն նաև

$$\text{ԱԲ}=\text{ԴԵ}:$$

բ. Իսկ ԱԲ=ԴԵ։ Արդ ԱԲ հաւասարակի 'ի գծէն ԳԶ, և ԴԵ 'ի գծէն ԳԷ (174), վասն այնորիկ նաև

$$\text{ԲԶ}=\text{ԴԷ}\cdot$$

բայց նաև

$$\text{ԳԲ}=\text{ԳԴ},$$

և

$$\text{ԳԶԲ}=\text{ԳԷԴ}=\text{Ո},$$

ուրեմն

$$\Delta\text{ԳԲԶ}\cong\Delta\text{ԳԴԷ}\ (164\cdot\ \text{հետև.}\ \text{դ}):$$

վասն այնորիկ և

$$\text{ԳԶ}=\text{ԳԷ}:$$

181 · Հակադարձութիւն. — Յերկուց լարից ԱԲ և ԴԵ (Ձև 105) որ անհաւասար հեռի կային 'ի կեդրոնէն Գ, հեռագոյն ԱԲ փոքրագոյն է քան զմերձաւորագոյնն ԴԵ. և փոխադարձաբար յերկուց անհաւասար լարից փոքրագոյնն ԱԲ հեռագոյն է 'ի կեդրոնէն Գ քան զմեծագոյնն ԴԵ։

Ապացուցութիւն. — *ա.* Իսկ ԳԶ>ԳԷ։ Զգծեսցին ուղիղ գիծքն ԳԲ և ԳԴ, և լինիցի

$$\overline{\text{ԳԲ}}^2=\overline{\text{ԳԶ}}^2+\overline{\text{ԶԲ}}^2,$$

և

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2=\overline{\text{ԳԷ}}^2+\overline{\text{ԴԷ}}^2\quad(164)\cdot$$

բայց

$$\text{ԳԲ}=\text{ԳԴ},$$

ուրեմն նաև

$$\overline{\text{ԳԲ}}^2=\overline{\text{ԳԴ}}^2,$$

վասն այնորիկ և

$$\overline{\text{ԳԶ}}^2+\overline{\text{ԶԲ}}^2=\overline{\text{ԳԷ}}^2+\overline{\text{ԴԷ}}^2:$$

Արդ որովհետև

$$\text{ԳԶ}>\text{ԳԷ},$$

ուրեմն և

$$\overline{\text{ԳԶ}}^2>\overline{\text{ԳԷ}}^2,$$

ուստի

$$\overline{\text{ԶԲ}}^2<\overline{\text{ԴԷ}}^2,$$

վասն այնորիկ և

$$\text{ՁԲ}<\text{ԴԷ}:$$

Հուսկ յետոյ

$$\text{ԱԲ}=2\text{ՁԲ},$$

և

$$\text{ԴԵ}=2\text{ԴԷ}\quad(174),$$

վասն այնորիկ

$$\text{ԸԲ}<\text{ԴԵ}:$$

բ̄. Իցէ ԱԲ<ԴԵ: Արդ քանզի

$$\text{ՁԲ}={}^1/_2\text{ԱԲ},$$

և

$$\text{ԴԷ}={}^1/_2\text{ԴԵ}\quad(174),$$

ուրեմն

$$\text{ՁԲ}<\text{ԴԷ},$$

վասն այնորիկ և

$$\overline{\text{ՁԲ}}^2<\overline{\text{ԴԷ}}^2:$$

Բայց դարձեալ է

$$\overline{\text{ԳԲ}}^2=\overline{\text{ՁԲ}}^2+\overline{\text{ԳՁ}}^2,$$

և

$$\overline{\text{ԳԴ}}^2=\overline{\text{ԴԷ}}^2+\overline{\text{ԳԷ}}^2,$$

և քանզի

$$\overline{\text{ԳԲ}}^2=\overline{\text{ԳԴ}}^2.$$

ապա ուրեմն

$$\overline{\text{ՁԲ}}^2+\overline{\text{ԳՁ}}^2=\overline{\text{ԴԷ}}^2+\overline{\text{ԳԷ}}^2.$$

արդ

$$\overline{\text{ՁԲ}}^2<\overline{\text{ԴԷ}}^2,$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԳՁ}}^2>\overline{\text{ԳԷ}}^2,$$

վասն այնորիկ և

$$\text{ԳՁ}>\text{ԳԷ}:$$

182. Հայեցողութիւն. — *Ուղղահայեաց գիծն ԱԲ կանգնեալ 'ի Գ ծայր ԳԴ (Ձև 106) շառաւիղին, է շօշափող Դ կիսոյ բոլորակին*

Ապացուցութիւն. — *Որովհետև* $\text{ԳԴԱ}=\text{Ո}$, *ուրեմն ԳԴ կարճագոյն քան զայլ ուղիղ գիծսն է, զորս 'ի Գ կեդրոնէ առ ԱԲ (84) ձգել հնար իցէ, այսինքն քան զամենայն կէտս*

ԱԲ շրջափողին կէտն Դ առաւել մերձ կայ առ Գ կեդրոն բոլորակին։ Արդ քանզի Դ կէտն գտանի 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին, և որովհետև որ զինչ և իցէ այլ կէտ ԱԲ շրջափողին բաց 'ի Դ կիտէ առաւել քան զԴ հեռի կայ 'ի Գ կեդրոնէ, ուստի արտաքոյ կայ բոլորակին։ Ուրեմն ԱԲ բաց 'ի Դ կիտէ անտի չունի այլ կէտ հասարակաց ընդ բոլորակին, վասն այնորիկ է շրջափող (172)։

Հետեւանք. — Ապա ուրեմն եթէ կամք լիցին 'ի վերայ որ զինչ և իցէ Դ կիտի շրջապատի բոլորակին ձգել շրջափող, պարտ է ընդ կէտն Դ ձգել զշառաւիղն ԳԴ, և 'ի վերայ նորին 'ի Դ կանգնել զուղղահայեաց գիծն ԱԲ։

183. Հայեցողութիւն. — Ընդ Դ կէտ շրջափման շրջապատին ԴԷ և շրջափողին ԱԲ (Ձև 107) անմարթ է ձգել այլ ուղիղ գիծ։

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ ընդ կէտն Դ ձգիցի որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ ԵԶ. որովհետև ԳԴԱ=Ո. յայտ է եթէ ԳԴԵ<Ո իցէ, կամ սուր. ուրեմն ԳԴ կայցէ խոտոր 'ի վերայ ԵԶ գծի, և հետևաբար մարթ է 'ի Գ կիտէ ձգել առ ԵԶ զուղղահայեաց գիծն ԳԸ, որ կարճագոյն է քան զԳԴ (84)։ Արդ քանզի ընդհանրապէս ամենայն ուղիղ գիծք որ 'ի Գ կեդրոնէ ձգին առ ԴԸ են <ԳԴ (86), ուստի որ զինչ և իցէ այլ կէտ ԴԸ գծին բաց 'ի Դ կիտէ առաւել քան զԴ մերձ կայ առ կեդրոնն Գ. և որովհետև Դ գտանի 'ի վերայ շրջապատին, ուրեմն որ զինչ և իցէ այլ կէտ ԴԸ գծին գտանի 'ի ներքին կողմն բոլորակին, և վասն այնորիկ ԵԶ ոչ անցանէ ընդ կէտն հասարակաց շրջապատին և շրջափողին։

Հետեւանք Ա. — Եւ քանզի որ զինչ և իցէ ուղիղ գիծ ԴԵ որ անցանիցէ ընդ կէտն Դ և 'ի ԴԱ ուղղութենէ վերայ չանկանիցի, գտանի 'ի ներքին կողմն բոլորակին, ուստի ուղղութիւն նորա հեռանայ 'ի շրջափողէն ԴԱ քան զոր հեռանայցէ շրջապատն 'ի շրջափողէն։ Ապա ուրեմն սկսեալ 'ի Դ կիտէ ուղղութեն բոլորակին առաւել մերձ կայ ուղղութեան ԴԱ շրջափողին քան զուղղութիւն որ զինչ և իցէ ԴԵ ուղիղ գծի, որչափ և մերձ կայցէ առ ԴԱ շրջափողն։ Եւ քանզի բացահայեցութեն ուղղութեան բոլորակին 'ի շօշափողէն 'ի Դ կէտն փոքրագոյն է քան զամենայն բացահայեցութիւն հնարաւոր, և է =0, այսինքն ուղղութիւն բոլորակին և ուղղութիւն ԴԱ շօշափողին 'ի Դ կէտն է նոյն, վասն այնորիկ իսկ բոլորակն է կոր գիծ, զի անդէն թողեալ զառաջին ուղղութիւնն՝ անցանէ յայլ: Այլով օրինակաւ. եթէ զմտաւ ածցուք զշրջապատ բոլորակի կոր ինչ գիծ ծագեալ 'ի շարժմանէ միոյ կէտի, որ անդադար փոխէ զուղղութիւն իւր, և համարեսցուք եթէ 'ի հասանելն 'ի կէտն Դ դադարիցէ 'ի փոփոխելոյ զուղղութիւն, և 'ի կիտէ անտի սկսանիցի շարժիլ ըստ միոյ ևեթ ուղղութե, այնուհետև 'ի Դ կիտէ և անդր ըստ ուղիղ գծի շարժիցի, մանաւանդ անկանիցի 'ի վերայ շօշափողին ԴԱ որ ձգիցի առ բոլորակն 'ի կէտն Դ:

Հետևանք Բ. — Վասն այնորիկ 'ի սահմանել զուղղութի բոլորակի 'ի միում ծանուցեալ կէտի, ձգիցի առ նա շօշափող:

Հետևանք Գ. — Եւ քանզի անկիւն ասի քանակութիւն փոխադարձ բացահայեցութեան երկուց ուղիղ գծից 'ի միմեանց, ուստի անկիւնն կազմեալ յերկուց աղեղանց բոլորակի, որք հատանեն զմիմեանս փոխանակաւ, ոչ այլ ինչ է եթէ ոչ անկիւնն կազմեալ 'ի շօշափողաց ձգելոց առ նոսա 'ի կէտն յորում հատանիցեն զմիմեանս:

Հետևանք Դ. — Կարևորութիւն առաջադրութեանցս երևիցի 'ի Բնաբանութեան, յորժամ բան լինիցի զոեսութենէ կեդրոնախոյս զօրութեան և զշարժմանէ ըստ շօշափողի:

184. Հայեցողութիւն. — Եթէ ուղիղ գիծն ԱԲ (Ձև 106) զբոլորակն 'ի միում Դ կէտի շօշափիցէ, շառաւիղն ԳԴ որ ձգիցի 'ի Գ կեդրոնէ 'ի վերայ կիտի շօշափման, է ուղղահայեաց առ շօշափողն:

Ապացուցութիւն. — Եթէ ԳԴ չլինէր ուղղահայեաց, այլ խոտոր առ ԱԲ, մարթ էր 'ի Գ կեդրոնէ ձգել ուղղահայեաց առ ԱԲ, որ փոքրագոյն լինէր քան զԳԴ (84). ուստի կէտ մի ուղիղ գծին ԱԲ մերձ լինէր առ Գ. քան զկէտն Դ:

Արդ քանզի Դ կէտն գտանի 'ի վերայ շրջապատին, որով կէտն այն գտանիցի 'ի ներքին կողմն բոլորակին, ուստի մասն ինչ ուղիղ գծին ԱԲ անկանիցի 'ի ներքս բոլորակին, և հետեսաբար հատանիցէ զբոլորակն: Բայց ԱԲ է շօշափող. ուստի ԳԴ ոչ կարէ լինել խոտոր առ ԱԲ, այլ ուրեմն ուղղահայեաց է առ նա :

Հետեւանք. — Եւ քանզի ԳԴ ուղղահայեաց է առ ԱԲ 'ի Դ կիտի շօշափման, և որովհետև ԱԴ սահմանէ 'ի Դ զուղղութիւն բոլորակին (183. Հետև. Ա), մարթ է նաև ասել եթէ ԳԴ ուղղահայեաց է 'ի Դ առ շրջապատ բոլորակին: Ուրեմն ընդհանրապէս որ զինչ և իցէ շառաւիղ՝ ուղղահայեաց է առ շրջապատն :

185. Հակադարձութիւն. — Ուղղահայեաց գիծն որ 'ի վերայ ԱԲ շօշափողին անկանիցի 'ի Դ (Ձև 106) կիտի շօշափման, անցանէ ընդ Գ կեդրոն բոլորակին :

Ապացուցութիւն. — Ի Գ կեդրոնէ ձգիցի ուղիղ գիծ առ Դ, յայտ է եթէ ԳԴ լինիցի ուղղահայեաց առ ԱԲ (184): Եւ քանզի 'ի Դ կիտէ մարթ է միոյ միայնոյ ուղղահայեաց գծի ամբառնալ (82), և այն է ԳԴ, ուստի որ զինչ և իցէ այլ ուղղահայեաց գիծ որ 'ի վերայ ԱԲ շօշափողին կանգնիցի 'ի Դ կիտի, հարկ է զի անկանիցի 'ի վերայ շառաւիղին ԳԴ, ուրեմն անցանիցէ ընդ կեդրոնն Գ :

186. Առաջարկութիւն. — Ի միջէ Ա (Ձև 108) կիտէ ծանուցելոյ, որ արտաքոյ բոլորակին կայցէ, ձգել շօշափող առ բոլորակն :

Լուծումն. — Ի կիտէն Ա ձգիցի առ Գ կեդրոն բոլորակին ուղիղ գիծն ԱԳ, հատարակիցի ԱԳ 'ի Բ, և 'ի Բ կիտէ անտի իբրև 'ի կեդրոնէ ԲԱ=ԲԳ շառաւիղաւ ձգիցի բոլորակ մի, որ անցանիցէ ընդ կէտսն Ա և Գ, և զբոլորակն 'ի Դ և յԵ հատանիցէ, հուսկ յետոյ ձգիցի ԱԴ կամ ԱԵ. և ԱԴ կամ ԱԵ լինիցի շօշափողն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Ձգիցի ԳԴ կամ ԳԵ, յայտ է եթէ ԱԴԳ=Ո կամ ԱԵԳ=Ո (80. Հետև.). ուստի ԱԴ կամ ԱԵ է շօշափող (182) :

Հետեւանք Ա. — Եւ քանզի երկու բոլորակքն հատանեն զմիմեանս յերկուս կէտս, ուստի յԱ կիտէ մարթ է երկուս շօշափողս ձգել առ բոլորակն :

Հետեւանք Բ. — Երկու շօշափողքն ԱԴ և ԱԵ որ յԱ կիտէ ձգիցին, միմեանց հաւասարք են. քանզի

ԱԳ=ԱԳ,

դարձեալ

ԳԴ=ԳԵ,

և

ԱԴԳ=ԱԵԳ=Ո,

ուրեմն

ΔԱԳԴ≅ΔԱԳԵ (164. Հետև. Դ),

վասն այնորիկ և

ԱԴ=ԱԵ:

Հետեւանք Գ. — Ուղիղ գիծն որ յԱ կիտէ ձգի առ Գ կեդրոնն հասարակէ զանկիւնն յԱ, որ կազմի յերկուց ԱԴ և ԱԵ շօշափողաց. քանզի որովհետեւ ըստ նախընթաց հետեւանաց

ΔԱԳԴ≅ΔԱԳԵ,

յայտ է եթէ

ԳԱԴ=ԳԱԵ:

187. Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի միջէ Ա (Ձև 109–111) կիտէ որ կայցէ արտաքոյ կեդրոնին ձգիցին բազում ուղիղ գիծք առ շրջապատ բոլորակին, ուղիղ գիծն որ անցանիցէ ընդ կեդրոնն՝ մեծագոյն է, և ուղիղ գիծն որոյ երկայնութիւնն անցանիցէ ընդ կեդրոնն՝ փոքրագոյն է քան զայլ ուղիղ գիծսն:

Ապացուցութիւն. — ա. Իցէ Ա կէտն 'ի ներքոյ բոլորակին (Ձև 109), և ԱԲ ուղիղ գիծն որ անցանիցէ ընդ կեդրոնն, և ԱԵ ուղիղ գիծն՝ որոյ երկայնութիւնն անցանիցէ ընդ կեդրոնն. ուրեմն ԱԲ մեծագոյն է քան զոր և իցէ այլ ուղիղ գիծ, զոր օրինակ քան զԱԴ. քանզի եթէ ձգիցի ԳԴ, յայտ է եթէ լինիցի

ԳԲ=ԳԴ,

ուրեմն

ԱԳ+ԳԲ=ԱԳ+ԳԴ,

բայց

ԱԳ+ԳԴ>ԱԴ (70),

վասն այնորիկ նաև

ԱԳ+ԳԲ>ԱԴ,

այսինքն

$$\text{ԱԲ}>\text{ԱԴ}\,:$$

Նոյնպէս դարձեալ ԱԵ փոքրագոյն է քան զոր ինչ և իցէ ուղիղ գիծ, զոր օրինակ քան զԱԶ. քանզի եթէ ձգիցի ԳԶ, յայտ է եթէ լինիցի

$$\text{ԳԶ}<\text{ԱԳ}+\text{ԱԶ} \quad (70),$$

բայց

$$\begin{aligned}\text{ԳԶ}&=\text{ԳԵ},\\ &=\text{ԱԳ}+\text{ԱԵ},\end{aligned}$$

ուրեմն

$$\text{ԱԳ}+\text{ԱԵ}<\text{ԱԳ}+\text{ԱԶ},$$

ուստի

$$\text{ԱԵ}<\text{ԱԶ}\,:$$

Է. Եթէ Ա կէտն իցէ 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին (Ձև 110), յայնժամ ԱԲ լինիցի տրամագիծ, ուստի մեծագոյն քան զոր և իցէ այլ ուղիղ գիծ ԱԴ, որ յԱ կիտէ անտի ձգիցի առ բոլորակն (179)։ Իսկ փոքրագոյն գիծն լինիցի $=0$։

Ը. Իցէ Ա կէտն արտաքոյ բոլորակին (Ձև 111), և ԱԲ ուղիղ գիծն՝ որ անցանիցէ ընդ կեդրոն բոլորակին, լինիցի դարձեալ ԱԲ$>$ԱԵ, ԱԴ$<$ԱԸ. քանզի եթէ ձգիցի ԳԵ, յայտ է եթէ լինիցի

$$\text{ԳԲ}=\text{ԳԵ},$$

ուրեմն

$$\begin{aligned}\text{ԱԲ}&=\text{ԱԳ}+\text{ԳԲ},\\ &=\text{ԱԳ}+\text{ԳԵ}.\end{aligned}$$

բայց

$$\text{ԱԳ}+\text{ԳԵ}>\text{ԱԵ} \quad (70).$$

ուրեմն նաև

$$\text{ԱԲ}>\text{ԱԵ}\,:$$

Ձգիցի դարձեալ ԳԸ, և լինիցի

$$\text{ԱԳ}<\text{ԱԸ}+\text{ԳԸ}.$$

բայց

$$\text{ԱԳ}=\text{ԱԴ}+\text{ԳԴ},$$

ուրեմն

$$\text{ԱԴ}+\text{ԳԴ}<\text{ԱԸ}+\text{ԳԸ}.$$

և որովհետև

ԳԴ=ԳԸ,

ուստի

ԱԴ<ԱԸ:

188. Հայեցողութիւն. — Քան զամենայն ուղիղ գիծս, զորս մարթ իցէ 'ի միջէ Ա (Ձև 109—111) կէտէ, որ կայցէ արտաքոյ կեդրոնին, ձգել առ շրջապատ բոլորակին, մեծագոյն այն է որոյ կէտն կատարածի 'ի վերայ շրջապատին հեռագոյն իցէ յայլից փոքրագոյն ուղիղ գծին, և մերձագոյն ոտից մեծագունին:

Ապացուցութիւն. — ա. Իցէ Ա կէտն 'ի ներքոյ բոլորակին (Ձև 109), և լինիցի ԱԴ>ԱԻ. քանզի եթէ ձգիցին ուղիղ գիծքն ԳԴ, ԳԻ, ԴԻ, յայտ է եթէ լինիցի

ԳԴ=ԳԻ,

ուրեմն

ԳԻԴ=ԳԴԻ (66).

բայց

ԱԻԴ>ԳԻԴ,

ուրեմն նաև

ԱԻԴ>ԳԴԻ.

բայց

ԳԴԻ>ԱԴԻ,

ուստի ևս առաւել

ԱԻԴ>ԱԴԻ,

վասն այնորիկ և

ԱԴ>ԱԻ (69):

բ. Եթէ իցէ Ա կէտն 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին (Ձև 110), ըստ նմին օրինակի ցուցանի լինել ԱԴ>ԱԵ. քանզի

ԳԴ=ԳԵ,

ուրեմն

ԳԵԴ=ԳԴԵ.

բայց

ԱԵԴ>ԳԵԴ,

ուրեմն նաև

ԱԵԴ>ԳԴԵ.

բայց

ԳԴԵ>ԱԴԵ,

ուստի ևս առաւել

ԱԵԴ>ԱԴԵ,

վասն այնորիկ և

ԱԴ>ԱԵ:

Բ. Իսկ Ա կէտն արտաքոյ բոլորակին (Ձև 111), ըստ նմին օրինակի ցուցանի լինել ԱԵ>ԱԶ. քանզի յայտ է եթէ

ԳԵ=ԳԶ,

ուրեմն

ԳԶԵ=ԳԵԶ.

բայց

ԱԶԵ>ԳԶԵ,

ուրեմն

ԱԶԵ>ԳԵԶ.

բայց

ԳԵԶ>ԱԵԶ,

ուրեմն

ԱԶԵ>ԱԵԶ,

վասն այնորիկ և

ԱԵ>ԱԶ:

Իսկ եթէ երկու ուղիղ գիծքն իջեն ըստ ԱԻ և ըստ ԱՐ գծից, ձգեսցին դարձեալ ուղիղ գիծքն ԳԻ, ԳՐ, ԻՐ, և երկայնեսցին ԳԻ և ԳՐ 'ի Թ և 'ի Ժ կողմ: Արդ

ԳԻ=ԳՐ,

ուրեմն

ԳՐԻ=ԳԻՐ (66).

բայց

ԳՐԻ+ԺՐԻ=ԳԻՐ+ԹԻՐ=2Ո.

վասն այնորիկ նաև

ԺՐԻ=ԹԻՐ.

բայց

ԱՐԻ>ԺՐԻ,

ուրեմն նաև

ԱՐԻ>ԹԻՐ.

բայց

ԹԷԸ>ԱԷԸ,

ուստի

ԱԸԷ>ԱԷԸ,

վասն այնորիկ և

ԱԷ>ԱԸ:

189. Հայեցողութիւն. — *Ի միջէ* Ա (*Ձև* 109–111) *կէտէ որ կայցէ արտաքոյ կեդրոնին, մարթ է ձգել առ շրջապատն այնպիսի ուղիղ գիծս որ երկու երկու եւեթ միմեանց հաւասարք իցեն:*

Ապացուցութիւն. — *ա. Իցէ* Ա *կէտն 'ի ներքոյ բոլորակին* (*Ձև* 109), *'ի վերայ* ԱԳ *գծի 'ի* Գ *յօրինիցի անկիւն մի* ԱԳԸ=ԱԳԷ, *և ձգիցի* ԱԸ, *և է*

ԱԳ=ԱԳ·

դարձեալ

ԳԷ=ԳԸ,

և

ԱԳԷ=ԱԳԸ,

ուրեմն

ΔԱԳԷ≅ΔԱԳԸ (64),

վասն այնորիկ և

ԱԷ=ԱԸ:

բ. Իցէ Ա *կէտն 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին* (*Ձև* 110), *յօրինիցի անկիւնն* ԱԳԶ=ԱԳԵ, *և ձգիցի* ԱԶ, *և է*

ԱԳ=ԱԳ,

դարձեալ

ԳԵ=ԳԶ,

և

ԱԳԵ=ԱԳԶ,

ուրեմն

ΔԱԳԵ≅ΔԱԳԶ (64),

վասն այնորիկ և

ԱԵ=ԱԶ:

գ. Հուսկ յետոյ իցէ Ա *կէտն արտաքոյ բոլորակին* (*Ձև* 111), *յօրինիցի դարձեալ անկիւնն* ԱԳԻ=ԱԳԵ *'ի վերայ ուղիղ գծին* ԱԳ *'ի* Գ, *և ձգիցի* ԱԻ, *և է*

ԱԳ=ԱԳ,

դարձեալ

ԳԵ=ԳԻ,

և

ԱԳԵ=ԱԳԻ,

ուրեմն

ΔԱԳԵ≅ΔԱԳԻ (64),

վասն այնորիկ և

ԱԵ=ԱԻ։

Այս ուրեմն որպիսի՛ լինչ և իցէ ուղիղ գիծն որ յԱ կիտէ անտի ձգիցի առ շրջապատ բոլորակին, բաց 'ի մեծագունէն և 'ի փոքրագունէն, մարթ է ձգել միշտ այլ ուղիղ գիծ հաւասար նմին։ Իսկ որ զինչ և իցէ այլ ուղիղ գիծ, որոյ կէտ կատարածի անկանիցի 'ի վերայ շրջապատին կամ մերձագոյն իցէ ուոից մեծագունին, է երկայնագոյն (188), կամ մերձագոյն իցէ ուոից փոքրագունին, է կարճագոյն 'ի միոյ 'ի գծից աստի (188)։ Հետևաբար յԱ կիտէ մարթ է երկուց ևեթ հաւասար ուղիղ գծից անկանել առ շրջապատն։

Հետեւանք. — Եթէ համեմատիցեն երրեակ առաջադրութիւնքն 187, 188, 189 ընդ 84-87 առաջադրութեանն, տեսանիցի միաբանութիւն նոցա, որ պարապին զգծից կիտի միոյ առ ուղիղ գիծն՝ ընդ սոսա, որ քննեն զգիծս կիտի միոյ առ շրջապատ բոլորակին։ Այս միաբանութիւն առաւելապէս երևիցի, յորժամ զմտաւ ածիցի եթէ որ և իցէ ուղիղ գիծ որ ինքնին կամ երկայնեալ անցանիցէ ընդ կեդրոնն, է ուղղահայեաց առ շրջապատն (184)։

190. Հայեցողութիւն. — Բոլորակ մի և ուղիղ գիծ մի յերկուս ևեթ կէտս կարեն զմիմեանս հատանել։

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ ուղիղ գիծ մի հատանիցէ զբոլորակն աւելի քան յերկուս կէտս. յայնժամ մարթ է 'ի կեդրոնէն ձգել շառաւիղս 'ի վերայ կիտիցն հատման, որ միմեանց հաւասարք լինէին։ Որով հնար էր 'ի կեդրոնէն աւելի քան զերկուս հաւասար ուղիղ գիծս ձգել 'ի վերայ այնր ուղիղ գծի, որ է անհնարին (87)։

191. Հայեցողութիւն. — Երկու բոլորակք, որոց նոյն կեդրոն իցէ, չկարեն զմիմեանս հատանել, և ոչ շօշափել։

Ապացուցութիւն. — Երկուց բոլորակաց շառաւիղքն կամ հաւասարք են, և կամ անհաւասարք։ Եթէ շառաւիղքն հաւասարք իցեն, կէտք շրջապատի միոյն ընդ կէտս շրջապատի միւսոյն հաւասար հեռի կան 'ի կեդրոնէ, ուստի շրջապատք երկոցունցն 'ի վերայ միմեանց անկանիցին և բոլորակքն զմիմեանս ծածկիցեն։ Ապա եթէ շառաւիղքն անհաւասարք իցեն, կէտք շրջապատի մեծագոյն շառաւիղաւ բոլորակին հեռագոյն են քան զկէտս շրջապատի փոքրագոյն շառաւիղաւ բոլորակին 'ի կեդրոնէ, հետեւաբար կէտք շրջապատի առաջին բոլորակին արտաքոյ կան շրջապատի երկրորդին։ Ուրեմն երկուց բոլորակաց ամենայն կէտք շրջապատի կամ են հասարակաց, և 'ի վերայ միմեանց անկանիցին, և կամ չիցէ նոցա և ոչ մի կէտ հասարակաց։

Հետեւանք. — Բոլորակք, որոց նոյն կեդրոն իցէ, ասին համակենդրոն։

192. Հայեցողութիւն. — Երկու բոլորակք յերկուս ևեթ կէտս կարեն զմիմեանս հատանել։

Ապացուցութիւն. — Եթէ երկու բոլորակք զմիմեանս հատանիցեն, չունիցին կեդրոն հասարակաց (191). արդ եթէ երկու բոլորակք զմիմեանս հատանիցեն աւելի քան յերկուս կէտս, այսինքն եթէ շրջապատք երկուց բոլորակաց ունիցին աւելի քան զերկուս կէտս հասարակաց, յայնժամ մարթ էր 'ի կեդրոնէ միոյն 'ի նոցանէ ձգել առ հասարակաց կէտսն ուղիղ գիծս, որ իբրև շառաւիղք, միմեանց հաւասարք լինէին։ Իսկ որովհետև կեդրոն առաջին բոլորակին արտաքոյ է կեդրոնի երկրորդին, յայնժամ հնար էր յերկրորդում բոլորակի 'ի միջէ կիտէ որ կայցէ արտաքոյ կեդրոնին՝ ձգել առ շրջապատն աւելի քան զերկուս հաւասար ուղիղ գիծս, որ է անհնարին (187. 189)։ Հետեւաբար նաև երկու բոլորակք յերկուս ևեթ կէտս կարեն զմիմեանս հատանել։

193. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ երիս կէտս Ա, Բ, Գ (Ձև 102) ձգել բոլորակ։

Լուծումն. — Յօդիցին ընդ Բ կէտքն Ա և Գ, հասարակիցին ուղիղ գիծքն ԱԲ և ԲԳ 'ի կէտսն Զ և Է, և 'ի վերայ նոցա կանգնիցին ԶԸ և ԷԹ ուղղահայեաց գիծքն որ 'ի Գ զմի-

մեանս հատանիցեն, և Գ լինիցի կեդրոն խնդրեալ բոլորա-
կին, և ԳԱ շառաւիղ նորա։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ՋՐ ուղղահայեաց է առ ԱԲ 'ի Ջ միջին կիտի, Գ հաւասար հեռի կայ 'ի կիտից Ա և Բ (88). նոյնպէս Գ հաւասար հեռի կայ 'ի կիտից Բ և Դ (88). ուրեմն Գ հաւասար հեռի կայ յերից ծանուցեալ կիտից Ա, Բ, Դ, վասն այնորիկ բոլորակն որ 'ի Գ կեդրոնէ ԳԱ շառաւիղաւ ձգիցի, անցանիցէ և ընդ Բ և ընդ Դ։

Հետեւանք Ա. — Որպէս զի հնարաւոր իցէ լուծումս, ծանուցեալ կէտքն Ա, Բ, Դ հարկ է զի չկայցեն 'ի միում ուղիղ գծի. քանզի եթէ մարթ լինէր ընդ երիս կէտս ուղիղ ինչ գծի ձգել բոլորակ, յայնժամ բոլորակն և ուղիղ գիծն յերիս կէտս զմիմեանս հատանէին, որ է անհնարին (190)։

Հետեւանք Բ. — Ընդ ծանուցեալ երիս կէտս Ա, Բ, Դ մի և եթ բոլորակ հնար է ձգել. քանզի եթէ մարթ լինէր ընդ երիս կէտսն ընդ այնոսիկ միւս ևս բոլորակ ձգել, յերիս կէտս զմիմեանս հատանէին, որ է անհնարին (192)։

Հետեւանք Գ. — Արդ ուրեմն 'ի ձեռն նախընթաց առաջարկութեանս մարթ է ընդ երիս գագաթունս եռանկեան ձգել բոլորակ։

194. Հայեցողութիւն. — Երկու բոլորակք շօշափեն արտաքոյ զմիմեանս, եթէ ԱԲ հեռաւորութիւն Ա և Բ (Ձև 112) կեդրոնից նոցա հաւասար իցէ բովանդակութեան երկոցունց շառաւիղաց։

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԲԳ շառաւիղ առաջին բոլորակին. քանզի որովհետև ԱԲ հաւասար է բովանդակութեան երկոցունց շառաւիղաց, ԱԳ լինիցի շառաւիղ երկրորդ բոլորակին, հետևաբար կէտն Գ հասարակաց է երկոցունց բոլորակաց։ Արդ քան զամենայն ուղիղ գիծս, զորս մարթ իցէ յԱ կիտէ ձգել առ առաջին բոլորակն, որոյ կեդրոնն է Բ, ԱԳ գիծն կարճագոյն է (187). ուրեմն որ և իցէ այլ ուղիղ գիծ, զոր օրինակ ԱԴ, է >ԱԳ, այսինքն որ և իցէ այլ կէտ առաջին բոլորակին հեռագոյն է յԱ կիտէ, որ է կեդրոն երկրորդ բոլորակին, քան զկէտն Գ։ Իսկ որովհետև Գ կայ 'ի շրջապատի երկրորդ բոլորակին, ուստի որ և իցէ այլ կէտ, զոր օրինակ Դ, կայ արտաքոյ բոլորակին : Ապա ուրեմն երկոքին բոլորակքն բաց 'ի Գ կիտէ չկարեն այլ կէտ ունել հասարակաց, հետևաբար և շօշափեն զմիմեանս 'ի Գ կիտի (172):

195. Հայեցողութիւն. — Երկու բոլորակք շօշափեն 'ի ներքոյ զմիմեանս, եթէ ԱԲ հեռաւորութիւն Ա և Բ (Ձև 113) կեդրոնից նոցա հաւասար իցէ տարբերութեան երկոցունց շառաւիղաց :

Ապացուցութիւն. — Իցէ Ա կեդրոն և ԱԳ շառաւիղ մեծագոյն բոլորակին. քանզի որովհետև Բ է կեդրոն փոքրագոյն բոլորակին և ԱԲ տարբերութիւն երկոցունց շառաւեղաց, ԲԳ լինիցի շառաւիղ երկրորդ բոլորակին. հետևաբար կէտն Գ հասարակաց է երկոցունց բոլորակաց: Արդ քան զամենայն ուղիղ գիծս ,, զորս մարթ իցէ յԱ կիտէ ձգել առ փոքրագոյն բոլորակն, ԱԳ գիծն երկայնագոյն է (187), ուրեմն որ և իցէ այլ ուղիղ գիծ, զոր օրինակ ԱԴ, է <ԱԳ: Իսկ որովհետև Գ կայ 'ի շրջապատի մեծագոյն բոլորակին, և որ և իցէ այլ կէտ փոքրագոյն բոլորակին մերձ գոլով առ Ա, կեդրոն մեծագոյն բոլորակին, քան զկէտն Գ, ուստի որ և իցէ այլ կէտ փոքրագոյն բոլորակին կայ 'ի ներքոյ մեծագունին: Ապա ուրեմն երկոքին բոլորակքն ունին զԳ կէտ միայն հասարակաց, և փոքրագոյն բոլորակն հանդերձ այլ ամենայն կիտիւք իւրովք կայ 'ի ներքոյ մեծագունին, հետևաբար շօշափեն զմիմեանս 'ի Գ կիտի (172):

Հետեանք. — Ուղիղ գիծն, որ զկեդրոնս երկուց բոլորակաց ընդ միմեանս կապիցէ, անուանեալ կոչի ԳԻԾ ԿԵԴՐՈՆԱԿԱՆ: Ի 194, 195 առաջադրութեանց իմացեալ տեսանի եթէ երկու բոլորակք ներքոյ և կամ արտաքոյ զմիմեանս շօշափիցեն, կեդրոնական գիծն կամ երկայնութիւն նորա անցանէ ընդ կէտն շօշափման. ապա ուրեմն երկու կեդրոնքն և կէտն շօշափման 'ի մի և 'ի նոյն ուղղութեան վերայ կան :

196. Հայեցողութիւն. — Կեդրոնական անկիւնն ԱԳԲ է կրկնապատիկ ԱԴԲ, ԱԵԲ, ԱԷԲ (Ձև 114) անկեան շրջապատի, որ ընդ նմա 'ի վերայ նոյն ԱԲ աղեղան գտանիցի:

Ապացուցութիւն. — ա. Համարեսցուք եթէ գագաթն ԱԳԲ *կեդրոնական անկեան 'ի վերայ ԱԴ աղեղան ԱԴԲ շրջապատի անկեան գտանիցի. յայտ է եթէ լինիցի*

ԱԳԲ=ԳԴԲ+ԳԲԴ (58).

բայց քանզի

ԳԴ=ԳԲ,

ուրեմն

ԳԲԴ=ԳԴԲ (66),

վասն այնորիկ

ԱԳԲ=2ԳԴԲ,

=2ԱԴԲ:

ե. Համարեսցուք եթէ գագաթն ԱԳԲ կեդրոնական անկեան 'ի ներքոյ ԱԵԲ շրջապատի անկեան գտանիցի. ձգեսցի յԵ կիտէ ԵԶ տրամագիծն, լինիցի

ԱԳԶ=2ԱԵԶ (Ապաց. ա.),

և

ԲԳԶ=2ԲԵԶ (Ապաց. ա.),

ուրեմն

ԱԳԶ+ԲԳԶ=2ԱԵԶ+2ԲԵԶ,

այսինքն

ԱԳԲ=2(ԱԵԶ+ԲԵԶ),

=2ԱԵԲ:

զ. Համարեսցուք եթէ գագաթն ԱԳԲ կեդրոնական անկեան արտաքոյ ԱԷԲ շրջապատի անկեան գտանիցի. ձգեսցի յԷ կիտէ ԷԸ տրամագիծն, լինիցի

ԸԳԲ=2ԸԷԲ (Ապաց. ա.),

և

ԸԳԱ=2ԸԷԱ (Ապաց. ա.),

ուրեմն

ԸԳԲ−ԸԳԱ=2ԸԷԲ−2ԸԷԱ,

այսինքն

ԱԳԲ=2(ԸԷԲ−ԸԷԱ),

=2ԱԷԲ:

197. Հայեցողութիւն. — *Անկիւնք շրջապատի ԱԳԲ, ԱԴԲ, ԱԵԲ, ԱԶԲ, և* (Ձև 115), *որ 'ի վերայ նոյն ԱԲ աղեղան գտանիցին, միմեանց հաւասարք են:*

Ապացուցութիւն. — Ձգիցին ԱԷ և ԲԷ շառաւիղքն, լինիցի

ԱԳԲ=$^1/_2$ԱԷԲ,

և

ԱԴԲ=$^1/_2$ԱԷԲ (196),

ուրեմն

ԱԳԲ=ԱԴԲ:

Ըստ նմին օրինակի յուցանի լինել

ԱԳԲ=ԱԵԲ=ԱԶԲ,

այլովքն հանդերձ:

Հետեւանք. — Փոխանակ ասելոյ եթէ անկիւնն ԱԳԲ, ԱԴԲ, այլովքն հանդերձ կայ 'ի վերայ ԱԲ աղեղան, մարթ է ասել նաև եթէ անկանիցի յԱԳԴԵԶԲ հատածի բոլորակի. համարելով հատածս այս ծագեալ 'ի լարէ իմիքէ ձգելոյ յԱ կիտէ 'ի Բ: Վասն այնորիկ զնախընթաց հայեցողութիւնն մարթ է բացատրել և այսպէս. եթէ անկիւնք շրջագատի, որ կան 'ի մի և 'ի նոյն հատածի բոլորակի, միմեանց հաւասարք են:

198. Հայեցողութիւն. — Անկիւնն ԲԱԳ (Ձև 116) 'ի կէս բոլորակի է =Ո. անկիւնն ԵԸԳ 'ի փոքրագոյն հատածի բոլորակի է >Ո կամ բութ. հուսկ յետոյ անկիւնն ԻԶԳ 'ի մեծագոյն հատածի բոլորակի է <Ո կամ սուր.

Ապացուցութիւն. — ա. ԲԱԳ=Ո (80. Հետև)., զի ԲԳ է տրամագիծ:

բ. Իցէ ԵԱԸԳ փոքր քան զկիսաբոլորակ. ձգիցին 'ի Գ կիտէ տրամագիծն ԲԳ, և գիծն ԸԲ: Արդ ԲԸԳ է անկիւն 'ի կիսաբոլորակի, ուստի ԲԸԳ=Ո. բայց ԵԸԳ>ԲԸԳ, ուրեմն ԵԸԳ>Ո:

գ. Իցէ ԻԵԱԸԳ մեծ քան զկիսաբոլորակ. ձգիցին 'ի Գ կիտէ տրամագիծն ԲԳ, և գիծն ԶԲ: Արդ ԲԶԳ է անկիւն 'ի կիսաբոլորակի, ուստի ԲԶԳ=Ո. բայց ԻԶԳ<ԲԶԳ, ուրեմն ԻԶԳ<Ո: Իսկ որովհետև ամենայն անկիւն 'ի կիսաբոլորակի ԲԶԱԳ է =ԲԱԳ, ամենայն անկիւն 'ի հատածի բոլորակի ԵԱԸԳ է =ԵԸԳ, և ամենայն անկիւն 'ի հատածի բոլորակի ԻԵԱԸԳ է =ԻԶԳ (197), ընդհանրապէս ամենայն անկիւն 'ի կիսաբոլորակի է =Ո, ամենայն անկիւն 'ի հատածի բոլորակի ԵԱԸԳ է >Ո, և ամենայն անկիւն 'ի հատածի բոլորակի ԷԵԱԸԳ է <Ո:

199. Հայեցողութիւն. — Յորում և լիցէ ԱԲԳԴ (Ձև 117) քառանկեան, որոյ գագաթունք անկեանցն շուրջ զբոլորակաւ ձգիցին 'ի ներքոյ, յանդիմանակաց անկիւնքն երկու երկու' են =2Ո:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին անկիւնագիծքն ԱԳ և ԲԴ: Արդ

ԱԳԲ=ԱԴԲ (197),

և

ԱԳԴ=ԱԲԴ (197),

ուստի

ԱԳԲ+ԱԳԴ=ԱԴԲ+ԱԲԴ,

այսինքն

ԲԳԴ=ԱԴԲ+ԱԲԴ:

Բայց արդ

ԱԴԲ+ԱԲԴ+ԲԱԴ=2Ո (57),

ուստի նաև

ԲԳԴ+ԲԱԴ=2Ո:

Դարձեալ որովհետև բովանդակութիւն ամենայն անկեանց քառանկեան ԱԲԳԴ=4Ո (60), ուրեմն և ԱԲԳ+ԱԴԳ=2Ո:

200. Հայեցողութիւն. — Եթէ ձգիցի 'ի միջէ Դ կէտէ շրջապատի բոլորակին մի շօշափող ԱԲ և մի լար ԴԵ (Ձև 118), անկիւնքն որ 'ի շօշափողէն և 'ի լարէն կազմիցին, հաւասար են անկեան շրջապատի, որոյ սրունքն անցանիցեն ընդ ծայր աղեղանն որ 'ի միջին վայրի շօշափողին և լարին կայցէ. ուրեմն ԵԴԲ հաւասար է անկեան շրջապատի որ 'ի վերայ ԵԸԴ աղեղան գտանիցի, և ԵԴԱ հաւասար է անկեան շրջապատի որ 'ի վերայ ԵԶԷԴ աղեղան գտանիցի:

Ապացուցութիւն. — Ի Դ կէտէ ձգեսցի տրամագիծն ԴԶ, և յԵ կէտէ ուղիղ գիծն ԵԶ: Արդ յայտ է եթէ

ԶԴԲ=Ո (184).

դարձեալ որովհետև

ԶԵԴ=Ո (198)·

ուրեմն և

ԵԶԴ+ԵԴԶ=Ո (37),

վասն այնորիկ և

ԶԴԲ=ԵԶԴ+ԵԴԶ·

բայց

ԶԴԲ=ԵԴԲ+ԵԴԶ,

ապա ուրեմն

ԵԴԲ+ԵԴԶ=ԵԶԴ+ԵԴԶ,

ուստի և

ԵԴԲ=ԵԶԴ:

Արդ որովհետև որ զինչ և իցէ այլ անկիւն, զոր օրինակ ԵԷԴ, *որ 'ի վերայ* ԵԸԴ *աղեղան կայցէ, հաւասար է* ԵԶԴ *անկեան* (197), *ուստի* ԵԴԲ *հաւասար է որ զինչ և իցէ անկեան որ 'ի վերայ* ԵԸԴ *աղեղան կայցէ: Դարձեալ յայտ է եթէ*

ԵԶԴ+ԵԸԴ=2Ո (199),

և

ԵԴԲ+ԵԴԱ=2Ո (37),

ուրեմն

ԵԶԴ+ԵԸԴ=ԵԴԲ+ԵԴԱ·

բայց

ԵԶԴ=ԵԴԲ,

յորմէ նաև

ԵԸԴ=ԵԴԱ·

ուստի ԵԴԱ *հաւասար է նաև որ զինչ և իցէ այլ անկեան որ 'ի վերայ* ԵԶԷԴ *աղեղան կայցէ* (197):

201 · **Առաջարկութիւն**. — *Հատանել 'ի ծանուցեալ բոլորակէ հատած ինչ, որպէս զի անկիւնքն, զորս բովանդակիցէ յինքեան, հաւասարք իցեն այս ինչ* ʃ *անկեան* (Զև 119):

Լուծումն. — *Ի վերայ շրջագծի բոլորակին առցի որ զինչ և իցէ* Ա *կէտ, ձգեսցի ընդ կէտն այն շօշափող մի* ԱԳ *առ բոլորակն* (182 · *Հետև*.), *և կազմեսցի 'ի վերայ* ԱԳ *շօշափողին անկիւնն* ԳԱԲ=ʃ (77)· *և յ*ԱԲ *լարէն հատանիցի խնդրեալ հատածն* ԱԸԲ:

Ապացուցութիւն. — Որ զինչ և իցէ անկիւն որ 'ի վերայ ԱԲ աղեղան, կամ որ նոյն է յԱԸԲ հատածին կայցէ հաւասար է ԳԱԲ անկեան (200)․ բայց ԳԱԲ=ն, ապա ուրեմն որ զինչ և իցէ անկիւն, որ 'ի նմին հատածի կայցէ, հաւասար է ն անկեան։

202. Առաջարկութիւն. — Ի վերայ ԱԲ (Ձև 120) ուղիղ գծի ծանուցելոյ ձգել հատած ինչ բոլորակի, որպէս զի անկիւնքն զորս բովանդակիցէ յինքեան, հաւասարք իցեն այս ինչ ն անկեան։

Լուծումն. — Ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծին յԱ ծայրն յօրինեսցի անկիւն ինչ ԲԱԳ=ն, 'ի վերայ ԱԲ գծին 'ի Դ միջոցի կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծն ԴԵ, և 'ի վերայ ԱԳ գծի յԱ կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծն ԱԶ, որ հատանիցեն զմիմեանս յԷ. յԷ կէտէ ԷԱ շառաւիղաւ ձգեսցի բոլորակ ինչ, և ԱԸԲ լինիցի խնդրեալ հատածն։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԲ հատարակեցաւ 'ի Դ, և ԴԵ ուղղահայեաց է առ ԱԲ 'ի Դ միջոցի, ուստի կէտն Է հաւասար հեռի կայ 'ի կիտիցն Ա և Բ (88)․ ուրեմն բոլորակն ձգեալ յԷ կեդրոնէ ԷԱ շառաւիղաւ, անցանէ և ընդ Բ, և ԱԲ է լար այնր բոլորակի։ Դարձեալ որովհետև ԷԱԳ=Ո, վասն այնորիկ ԱԳ կայ ուղղահայեաց 'ի վերայ ԷԱ շառաւիղին, ուրեմն ԱԳ իցէ շօշափող 'ի կէտն Ա (182), հետևաբար անկիւնն ԲԱԳ հաւասար է անկեանց որ յԱԸԲ հատածի բոլորակի կայցեն (200)։ Եւ քանզի ԲԱԳ=ն, ապա ուրեմն որ զինչ և իցէ անկիւն որ յԱԸԲ հատածի բոլորակի կայցէ, հաւասար է ն անկեան։

Հետեւանք. — Այս առաջարկութիւն միաձայնի ընդ հետագայիդ. 'ի վերայ ԱԲ խարսխին ձգել եռանկիւն, որոյ անկիւն գագաթան հաւասար իցէ այս ինչ ն անկեան։ Այս ինքն է. որ զինչ և իցէ եռանկիւն, որոյ խարիսխն իցէ ԱԲ, և գագաթն գտանիցի 'ի վերայ ԱԸԲ աղեղան, ունիցի զպայմանս հանգամանս։

203. Հայեցողութիւն. — Ի հաւասար բոլորակս հաւասար կեդրոնական անկիւնքն ԳԱԴ, ԵԲԶ (Ձև 121) կան 'ի վերայ հաւասար աղեղանց և 'ի վերայ հաւասար լարից։

Ապացուցութիւն. — Համարեսցուք եթէ կեդրոնք երկուց բոլորակացն այնպէս իմն զետեղեալ կայցեն 'ի վերայ միմեանց, որպէս զի Բ անկանիցի յԱ, և ԲԵ յԱԳ. այսու և Ե ևս 'ի Գ անկանիցի, քանզի բոլորակքն, հետևաբար և ԲԵ և ԱԳ շառաւիղք նոցա, միմեանց հաւասարք են. վասն այնորիկ և շըրջապատք երկուց բոլորակացն անկանիցին 'ի վերայ միմեանց: Եւ քանզի ԳԱԴ=ԵԲԶ, ուստի և ԲԶ անկանիցի յԱԴ ուրով և Զ 'ի Դ: Արդ որովհետև Ե անկանիցի 'ի Գ, Զ 'ի Դ, և երկու շրջապատքն ըստ ամենայն կէտից իւրեանց 'ի մէջ նոյն սահմանաց փակեալ գոլով, աղեղն ԵԺԶ 'ի վերայ ԳԹԴ աղեղան անկանիցի. հետևաբար երկու աղեղունքն ծածկեն զմիմեանս, ուստի և միմեանց հաւասարք են: Դարձեալ որովհետև Ե անկանիցի 'ի Գ, և Զ 'ի Դ, 'ի հարկէ իսկ և լարն ԵԶ 'ի վերայ ԳԴ լարին անկանիցի, յորմէ և ԳԴ=ԵԶ:

Հետևանք. — Ըստ այսմ օրինակի 'ի նոյն բոլորակս հաւասար կեդրոնական անկիւնք կան 'ի վերայ հաւասար աղեղանց և 'ի վերայ հաւասար լարից:

204. Հակադարձութիւն. — Ի հաւասար բոլորակս հաւասար անկիւնք շրջապատի ԳԷԴ, ԵԸԶ (Ձև 121), կան 'ի վերայ հաւասար աղեղանց և 'ի վերայ հաւասար լարից:

Ապացուցութիւն. — Ի կեդրոնիցն Ա և Բ ձգեսցին շառաւիղքն ԱԳ, ԱԴ, ԲԵ, ԲԶ, յայտ է եթէ

ԳԱԴ=2ԳԷԴ (196),

և

ԵԲԶ=2ԵԸԶ (196),

բայց

ԳԷԴ=ԵԸԶ,

ուրեմն նաև

ԳԱԴ=ԵԲԶ,

ուստի և

ԳԹԴ=ԵԺԶ,

և

ԳԴ=ԵԶ (203):

Հետևանք. — Ըստ այսմ օրինակի 'ի նոյն բոլորակս հաւասար անկիւնք շրջապատի կան 'ի վերայ հաւասար աղեղանց և 'ի վերայ հաւասար լարից :

205 · Հայեցողութիւն · — Ի հաւասար բոլորակս հաւասար աղեղանց ԳԹԴ, ԵԺԶ (Ձև 121), կշռին հաւասար կեդրոնական և շրջապատի անկիւնք, և հաւասար լարք :

Ապացուցութիւն · — Համարեսցուք եթէ կեդրոնք երկուց բոլորակաց այնպէս իմն զետեղեալ կայցեն 'ի վերայ միմեանց, որպէս զի Բ անկանիցի յԱ, և ԲԵ յԱԳ, այսու և Ե ևս 'ի Գ անկանիցի, քանզի բոլորակքն, հետևաբար ԲԵ և ԱԳ շառաւիղք նոցա, միմեանց հաւասարք են : Վասն այնորիկ և շրջապատք երկոցունց բոլորակացն անկանիցին 'ի վերայ միմեանց, ուստի Զ անկանիցի 'ի Դ, քանզի ԳԹԴ=ԵԺԶ · և որովհետև Բ անկանիցի յԱ, և Զ 'ի Դ, 'ի հարկէ իսկ ԲԶ անկանիցի յԱԴ : Արդ քանզի ԲԵ յԱԳ անկանիցի, և ԲԶ յԱԴ, յայտ է եթէ

ԳԱԴ=ԵԲԶ ·

բայց

ԳԻԴ=1/2ԳԱԴ (196),

և

ԵԸԶ=1/2ԵԲԶ (196),

ուրեմն նաև

ԳԻԴ=ԵԸԶ,

ուստի և

ԳԴ=ԵԶ (203, 204) :

Հետևանք · — Ըստ սմին նմանութեան ցուցանի և 'ի նոյն բոլորակս :

206 · Հայեցողութիւն · — Ի հաւասար բոլորակս հաւասար լարից ԳԴ, ԵԶ (Ձև 121), կշռին հաւասար կեդրոնական և շրջապատի անկիւնք, և հաւասար աղեղունք :

Ապացուցութիւն · — Որովհետև բոլորակքն միմեանց հաւասարք են, յայտ է եթէ

ԱԳ=ԲԵ,

և

ԱԴ=ԲԶ ·

և քանզի

ԳԴ=ԵԶ ·

ուրեմն

ΔԱԳԴ≅ΔԲԵԶ (65),

վասն այնորիկ և

ԳԱԴ=ԵԲԶ,

հետեւաբար

$^1/_2$ԳԱԴ=$^1/_2$ԵԲԶ,

այսինքն

ԳԷԴ=ԵԸԶ (196),

և հուսկ յետոյ

ԳԹԴ=ԵԺԶ (205):

Հետեւանք. — *Ըստ սմին նմանութեան ցուցանի և 'ի նոյն բոլորակս:*

207. Հակադարձութիւն. — *Եթէ 'ի միում բոլորակի երկու լարք* ԱԲ, ԳԴ (*Ձև* 122) *զուգահեռականք իցեն 'ի միմեանց, յայնժամ աղեղունքն* ԱԳ, ԲԴ, *որ կան 'ի մէջ նոցա միմեանց հաւասարք են:*

Ապացուցութիւն. — *Ձգեսցի* ԱԴ, *յայտ է եթէ* ԲԱԴ=ԱԴԳ (46), *որովհետև* ԱԲ ∥ ԳԴ, *ուստի և* ԲԴ=ԱԳ (204. *Հետև.*):

208. Առաջարկութիւն. — *Զծանուցեալ ինչ աղեղն* ԱԳԲ (*Ձև* 123) *հատարակել:*

Լուծում. — *Գտանիցի* Գ *կեդրոն ծանուցեալ աղեղանն* (178), *ձգեսցին* ԱԳ, ԲԳ, *և հատարակեսցի անկիւնն* ԱԳԲ *'ի ձեռն* ԳԴ *շառաւիղին, և լինիցի աղ.* ԱԴ=*աղ.* ԲԴ:

Ապացուցութիւն. — *Որովհետև* ԱԳԲ *հատարակեցաւ, յայտ է եթէ* ԱԳԴ=ԲԳԴ, *ուստի և աղ.* ԱԴ= *աղ.* ԲԴ (203. *Հետև.*):

Հետեւանք Ա. — *Փոխանակ հատարակելոյ զկեդրոնական անկիւնն* ԱԳԲ, *մարթ է լուծանել զառաջարկութիւնս զայս և ըստ այսմ օրինակի: Ձգեսցի լարն* ԱԲ, *և 'ի վերայ* ԱԲ *լարին յ*Ե *միջոցի կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծն* ԵԴ: *Քանզի եթէ ձգեսցին ուղիղ գիծքն* ԱԴ, ԲԴ, *յայտ է եթէ լինիցի* ԱԴ=ԲԴ (88), *ուստի և աղ.* ԱԴ=*աղ.* ԲԴ (203. *Հետև.*):

Հետեւանք Բ. — *Ըստ սմին օրինակի հատարակելով զմի մի մասն, մարթ է զաղեղն ինչ 'ի* 4, 8, 16, 32, 64, ... 2^n *հա-*

ւասար մասունս բաժանել: Եւ քանզի ուղիղ անկեան ևեթ հնար է յերիս հաւասար մասունս տրոհել, ուստի աղէղն այն ևեթ որ կշռիցէ կեդրոնական Ո անկեան մարթի յերիս հաւասար մասունս բաժանել, և հատորակելով զմի մի մասն, բաժանիցի 'ի 6, 12, 24, 48, ··· $3 \cdot 2^n$ հաւասար մասունս:

209 · Հայեցողութիւն. — Եթէ երկու լարք ԱԲ, ԳԴ (Ձև 124) 'ի բոլորակի զմիմեանս հատանիցեն, հատածք լարիցն խոտորնակս ընդ միմեանս համեմատին. այսինքն ԱԵ : ԵԳ=ԵԴ : ԵԲ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ԱԴ, ԲԳ: Որովհետև

ճ=ն (40),

և

ա=գ (197),

և

բ=ր (197),

ուրեմն

ΔԱԵԴ∾ΔԳԵԲ (132).

ուստի և

ԱԵ : ԵԳ=ԵԴ : ԵԲ:

Հետևանք. — Ի համեմատութենէս ԱԵ : ԵԳ=ԵԴ : ԵԲ ծագէ ԱԵ·ԵԲ=ԵԳ·ԵԴ. այսինքն եթէ երկու լարք 'ի բոլորակի զմիմեանս հատանիցեն, ուղղանկիւն հատածից միոյն հաւասար է ուղղանկեան հատածից երկրորդին:

210 · Հայեցողութիւն. — Եթէ յԱ կէտէ, որ արտաքոյ կայցէ բոլորակի, ձգեսցին երկու ԱԳ, ԱԵ (Ձև 125) հատանողք, հատածքն ԱԲ և ԱԴ, որ արտաքոյ են բոլորակին, խոտորնակս իմն համեմատին ընդ հատանողսն ընդ այնոսիկ. այսինքն ԱԲ : ԱԴ=ԱԵ : ԱԳ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ԴԳ, ԲԵ. որով յΔԱԴԳ և յΔԱԲԵ լինիցի

ճ=մ,

և

ա=ն (197),

յորմէ նաև

գ=բ (57 · Հետև. Ե),

ուրեմն

$$\Delta ԱԴԳ \sim \Delta ԱԲԵ \quad (132)\cdot$$

ուստի և

$$ԱԲ : ԱԴ = ԱԵ : ԱԳ :$$

Հետեւանք. — Ի համեմատութենէս ԱԲ : ԱԴ = ԱԵ : ԱԳ ծագէ ԱԲ · ԱԳ = ԱԴ · ԱԵ · այսինքն եթէ 'ի միոջէ կիտէ որ արտաքոյ կայցէ բոլորակի ձգիցին երկու հատանողք, ուղղանկիւնք կազմեալք 'ի հատանողաց և յիւրաքանչիւր արտաքին հատածոց միմեանց հաւասարք են :

211 · Հայեցողութիւն. — Եթէ յԱ կիտէ, որ արտաքոյ կայցէ բոլորակի, ձգիցին մի շօշափող ԱԶ և մի հատանող ԱԵ (Ձև 125), ԱԶ շօշափողն միջին համեմատական է 'ի մէջ ԱԵ հատանողին և ԱԴ հատածոյն, որ արտաքոյ է բոլորակին. այսինքն ԱԴ : ԱԶ : ԱԵ :

Ապացուցութիւն. — Ձգիցին ԶԴ, ԶԵ : Որովհետև ԱԶ շօշափող է և ԶԴ լար, ուստի յայտ է եթէ

$$ր = ջ \quad (200)\cdot$$

դարձեալ որովհետև

ŧ=ŧ,

յորմէ նաև

$$ԱԴԶ = ԱԶԵ \quad (57 \cdot Հետև \cdot Ե),$$

ուրեմն

$$\Delta ԱԴԶ \sim \Delta ԱԶԵ \quad (132),$$

ուստի և

$$ԱԴ : ԱԶ = ԱԶ : ԱԵ ,$$

կամ

$$ԱԴ : ԱԶ : ԱԵ \quad (114) :$$

Հետեւանք. — Ի համեմատութենէս ԱԴ : ԱԶ : ԱԵ ծագէ $\overline{ԱԶ}^2 = ԱԴ \cdot ԱԵ$ · այսինքն եթէ 'ի միոջէ կիտէ, որ արտաքոյ կայցէ բոլորակի, ձգիցին մի շօշափող և մի հատանող, քառակուսի շօշափողին հաւասար է ուղղանկեան, որ կազմի 'ի հատանողէն և յարտաքին հատածոյ նորին :

212 · Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի միոջէ Գ կիտէ շրջապատի բոլորակի ձգիցի ուղղահայեաց գիծն ԳԲ առ տրամագիծն ԱԴ (Ձև 126), ԳԲ է միջին համեմատական ԱԲ և ԲԴ հա-

տածոց. իսկ եթէ ձգիցի լարն ԱԳ, ԱԳ է միջին համեմատական առընթերակայ հատածոյն և ԱԴ տրամագծին. այսինքն ԱԲ : ԲԳ : ԲԴ և ԱԲ : ԱԳ : ԱԴ :

Ապացուցութիւն. — Ձգիցին ԱԳ, ԴԳ, յայտ է եթէ

ԱԳԴ=Ո (198),

ուրեմն

△ԱԲԳ∼△ԲԳԴ (135),

ուստի և

ԱԲ : ԲԳ=ԲԳ : ԲԴ,

կամ

ԱԲ : ԲԳ : ԲԴ (114):

Դարձեալ որովհետև

ԱԳԴ=Ո (198),

ուրեմն

△ԱԲԳ∼△ԱԳԴ (135),

ուստի և

ԱԲ : ԱԳ=ԱԳ : ԱԴ,

կամ

ԱԲ : ԱԳ : ԱԴ (114):

Հետևանք. — Ի համեմատութեանցս ԱԲ : ԲԳ : ԲԴ և ԱԲ : ԱԳ : ԱԴ ծագէ $\overline{\text{ԲԳ}}^2$=ԱԲ·ԲԴ, և $\overline{\text{ԱԳ}}^2$=ԱԲ·ԱԴ. այսինքն եթէ 'ի միոջէ կիտէ շրջապատի բոլորակի ձգիցի ուղղահայեաց գիծ առ տրամագիծն, քառակուսի այնր ուղղահայեաց գծի հաւասար է ուղղանկեան, որ կազմի 'ի հատածոց տրամագծին. և քառակուսի լարի միոջ հաւասար է ուղղանկեան, որ կազմի յառընթերակայ հատածոյն և 'ի տրամագծէն:

213. Առաջարկութիւն. — Առ երկուս ուղիղ գիծս ծանուցեալս Ա և Բ չորրորդ համեմատականն գտանել:

ա. Լուծումն. — Իցէ Ա>Բ. առացի ԳԴ=Ա (Չև 127), գրիցի կիսաբոլորակ 'ի վերայ ԳԴ գծի, և ձգիցի 'ի նմա լարն ԳԵ=Բ, հուսկ յետոյ յԵ կիտէ ածիցի ուղղահայեացն ԵԶ առ ԳԴ. և ԳԶ լինիցի ուղիղ գիծն խնդրելի:

Ապացուցութիւն. — ԳԴ : ԳԵ : ԳԶ (212). բայց ԳԴ=Ա, ԳԵ=Բ, ուստի և Ա : Բ : ԳԶ:

Բ. Լուծումն. — Իցէ Ա<Բ. առասցի ԳԴ=Ա (Ձև 128), և 'ի Դ կանգնեսցի ԴԵ⊥ԳԴ, և 'ի Գ կէտէ իբրև 'ի կեդրոնէ Բ շառաւիղաւ գրեսցի աղեղն մի, որ զԴԵ 'ի Զ հատանիցէ. հուսկ յետոյ ձգեսցի ԳԶ, և 'ի Զ կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծ մի մինչև հատանել զերկայնութիւն ԳԴ գծին յԷ. և ԳԷ լիցի ուղիղ գիծն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ΔԳԶԷ է ուղղանկիւն, ուստի ԳԷ : ԳԶ=ԳԶ : ԳԴ (135. Հետև. Ա), վասն այնորիկ նաև ԳԴ : ԳԶ=ԳԶ : ԳԷ (118), կամ ԳԴ:ԳԶ:ԳԷ (114): Բայց ԳԴ=Ա, ԳԶ=Բ, ուրեմն Ա:Բ:ԳԷ:

214. Առաջարկութիւն. — Առ երկուս ուղիղ գիծս ծանուցեալս Ա, Բ, գտանել զմիջին համեմատականն:

Ա. Լուծումն. — Ի վերայ ուղիղ գծին ԳԵ առցին ԳԴ=Ա, և ԴԵ=Բ (Ձև 129), գրեսցի կիսաբոլորակ 'ի վերայ ԳԵ գծի, և 'ի Դ կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծ առ ԳԵ, որ զկիսաբոլորակն 'ի կէտն Զ հատանիցէ. և ԴԶ լիցի խնդրեալ միջին համեմատականն:

Ապացուցութիւն. — ԳԴ : ԴԶ : ԴԵ (212). բայց ԳԴ=Ա, ԴԵ=Բ, ուստի և Ա : ԴԶ : Բ:

Բ. Լուծումն. — Իցէ Ա>Բ. առասցի ԳԴ=Ա (Ձև 130), գրեսցի կիսաբոլորակ 'ի վերայ ԳԴ գծի, և առցի ԳԵ=Բ, և յԵ կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծ առ ԳԴ, որ զկիսաբոլորակն 'ի կէտն Զ հատանիցէ. հուսկ յետոյ ձգեսցի ԳԶ. և ԳԶ լիցի խնդրեալ միջին համեմատականն:

Ապացուցութիւն. — ԳԴ : ԳԶ : ԳԵ (212). բայց ԳԴ=Ա, ԳԵ=Բ, ուրեմն Ա : ԳԶ : Բ:

215. Առաջարկութիւն. — Զծանուցեալ գիծ ինչ ԱԲ (Ձև 131) ըստ շարունակ համեմատութեան բաժանել. այսինքն որպէս զի մեծագոյն մասն իցէ միջին համեմատական ողջոյն գծին և փոքրագոյն մասին:

Լուծումն. — Ի Բ կանգնեսցի ուղղահայեաց գիծն ԲԳ=$^1/_2$ԱԲ, և ձգեսցի ԱԳ. 'ի Գ կէտէ իբրև 'ի կեդրոնէ ԳԲ շառաւիղաւ գրեսցի բոլորակ, որ զԱԳ 'ի Դ հատանիցէ. հուսկ յետոյ առցի յԱԲ գծէ մասն ինչ ԱԶ=ԱԴ. և ԱԲ բաժանեսցի 'ի Զ ըստ խնդրեալ համեմատութեան:

Ապացուցութիւն. — Երկայնեցի ԱԳ յԵ կոյս մինչև ցշրջապատն: Որովհետև ԲԳ=1/2ԱԲ, ուստի և ԴԳ=1/2ԱԲ, և և ԵԳ=1/2ԱԲ, ուրեմն ԴԵ=ԱԲ: Դարձեալ որովհետև ԳԲ է շառաւիղ, և ԳԲԱ=Ո, ուստի և ԱԲ է շօշափող (182). հետևաբար ԱԵ : ԱԲ : ԱԴ (211), կամ ԱԵ : ԱԲ =ԱԲ : ԱԴ. ուրեմն

ԱԲ : ԱԵ—ԱԲ=ԱԴ : ԱԲ—ԱԴ (122):

Արդ որովհետև

ԱԲ=ԴԵ,

ուստի և

ԱԵ—ԱԲ=ԱԵ—ԴԵ=ԱԴ.

Դարձեալ որովհետև

ԱԴ=ԱԶ,

ուստի և

ԱԲ—ԱԴ=ԱԲ—ԱԶ=ԲԶ.

ուրեմն

ԱԲ : ԱԴ=ԱԴ : ԲԶ,

կամ

ԱԲ : ԱԶ=ԱԶ : ԲԶ,

այսինքն

ԱԲ : ԱԶ : ԲԶ (114):

216. Հայեցողութիւն. — Ի հաւասար բոլորակս երկու կեդրոնական անկիւնք ԲԱԳ և ԵԴԶ (Ձև 132), համեմատին ընդ միմեանս, որպէս համեմատեցին ընդ միմեանս աղեղունք սրունից նոցա:

Ապացուցութիւն. — Իցէ ԲԳ բաժանեալ 'ի մ հաւասար մասունս, և ԵԶ 'ի ն հաւասար մասունս նոյնպէս, և իւրաքանչիւր մասն իցէ ԲԷ: Յամենայն կիտից ծայրից մասանցն ձգեսցին շառաւիղք, յայտ է եթէ կեդրոնական անկիւնքն ԲԱԳ և ԵԴԶ բաժանեսցին 'ի մ և 'ի ն անկիւնս, որ միմեանց հաւասարք են. և 'ի հաւասար բոլորակս կան 'ի վերայ հաւասար աղեղանց (205): Արդ որովհետև ԲԳ ունի մ հաւասար մասունս, որոց իւրաքանչիւրն է =ԲԷ, ուրեմն ԲԷ= 1/մ ԲԳ. բայց ԵԶ=ն·ԲԷ, ուստի և ԵԶ=ն×1/մ ԲԳ=ն/մ ԲԳ:

Այլ նաև ԲԱԳ բաժանի 'ի մ անկիւնս, ԵԴԶ 'ի ն անկիւնս, որոց իւրաքանչիւրն է = ԲԱԿ, ուրեմն ԲԱԿ $=\frac{1}{մ}$ ԲԱԳ, և

ԵԴԶ $=$ ն $\cdot$ ԲԱԿ $=$ ն $\times \frac{1}{մ}$ ԲԱԳ $= \frac{ն}{մ}$ ԲԱԳ: Հուսկ յետոյ, ու-

րովհետև ԵԴԶ $= \frac{ն}{մ}$ ԲԱԳ, և ԵԶ $= \frac{ն}{մ}$ ԲԳ, առընչութիւնք

ԲԱԳ : ԵԴԶ, և ԲԳ : ԵԶ ունին զհաւասար յայտարարս,

այսինքն զյայտարարն $\frac{ն}{մ}$, վասն այնորիկ և ԲԱԳ : ԵԴԶ $=$

ԲԳ : ԵԶ (114):

Հետեւանք Ա. — Ըստ սմին օրինակի 'ի նոյն բոլորակս երկու կեդրոնական անկիւնք համեմատին ընդ միմեանս, որպէս համեմատին ընդ միմեանս աղեղունք սրունից նոցա:

Հետեւանք Բ. — Որչափ մասունս ամենայն անկեանց, որ յԱ կիտի գոանիցեն, ուրեմն չորից ուղիղ անկեանց, բովանդակիցէ կեդրոնական անկիւնն ԲԱԳ, այնչափ մասունս ողջոյն շրջապատին բովանդակէ ԲԳ աղեղն սրունից նորա:

Հետեւանք Գ. — Ըստ (39) համարոյ բովանդակութիւն ամենայն անկեանց, որ 'ի միում կիտի գոանիցեն, հաւասար է 360 աստիճանաց. սոյնգունակ ողջոյն շրջապատն բաժանի յ360 աստիճանս. արդ զառաջինսն կոչելով աստիճանս անկեան և զերկրորդսն՝ աստիճանս աղեղան, նախընթաց հետեւանքն բացատրին և այսպէս. Որչափ մասունս 360 աստիճանաց անկեան բովանդակիցէ կեդրոնական անկիւնն, այնչափ մասունս 360 աստիճանաց աղեղան բովանդակէ աղեղն սրունից նորա. այսինքն որչափ աստիճանս անկեան բովանդակիցէ կեդրոնական անկիւնն, այնչափ աստիճանս աղեղան բովանդակէ աղեղն սրունից նորա: Աստի յայտ է եթէ մարթ է զաղեղն ինչ իբրև միութիւն համարել անկեանց. այլ սակայն որովհետեւ չափն և չափելին պարտին լինել համասեռ (146), անպատեհութիւն իմն թուի զանկիւն ինչ, ուստի և զերեսս աղեղամբ, այսինքն գծիւ չափել: Բայց սակայն բովանդակ իսկ անպատեհութիւնն 'ի բաց ընջիցի, յորժամ զմտաւ ածիցեմք եթէ ամենայն աղեղն այնպէս իմն համեմատի առ այլ որ զինչ և լիցէ աղեղն, որ խորև միութիւն համարեալ լիցէ, որպէս համեմատիցի կեդրոնական անկիւն առաջնոյն՝ կեդրոնական անկեան երկրորդին :

Հետեւանք Դ. — Ցայս հետեւանս հաստատեալ է անկիւնաչափ գործին, որ է կիսաբոլորակ մի բաժանեալ 'ի 180 աստիճանս, յորոյ կեդրոնն դնի գագաթն չափելի անկեան, և յաստիճանաց աղեղանն, որ ձգիցի 'ի մէջ սրունից նորա, իմացեալ տեսանի մեծութիւն անկեանն :

Հետեւանք Ե. — Որովհետև ամենայն անկիւն շրջապատի է կէս այնր կեդրոնական անկեան, որ ընդ նմա 'ի վերայ նոյն աղեղան գտանիցի, ամենայն անկիւն շրջապատի հաւասար է կիսոյ աղեղան, որ ձգիցի 'ի մէջ սրունից իւրոց :

ԳԼՈՒԽ ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ՅԱՂԱԳՍ ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ՁԵՒՈՑ ԵՒ ՎԱՍՆ ՁԱՓՈՒ ԲՈՂՈՐԱԿԻ

Առաջադրութիւնք :

217. Ծանօթութիւն. — *Ձև ինչ ասի* կանոնաւոր, *եթէ կողմանք նորա և անկիւնք միմեանց հաւասարք իցեն. զոր օրինակ, յեռանկիւնս՝ կանոնաւոր է եռանկիւնն հաւասարակող, 'ի քառանկիւնս՝ քառակուսին : Ձև ինչ ասի* ստորագրեալ 'ի բոլորակի, *կամ բոլորակ ինչ ասի* պարագրեալ զձևովն, *եթէ ամենայն գագաթունք անկեանց ձևոյն կայցեն 'ի շրջապատի բոլորակին, ուստի և ամենայն կողմանք ձևոյն իցեն լարք միոյ բոլորակի : Ըստ սմին օրինակի, ձև ինչ ասի* պարագրեալ զբոլորակաւ, *կամ բոլորակ ինչ ասի* ստորագրեալ 'ի ձևն, *եթէ ամենայն կողմանք ձևոյն իցեն շօշափողք բոլորակին :*

218. Հայեցողութիւն. — *Եթէ ամենայն կողմանք* ԱԲԳԴԵ... (Ձև 133) *բազմանկեան, որ ստորագրեցի 'ի բոլորակի, միմեանց հաւասարք իցեն, անկիւնքն ևս միմեանց հաւասարք են, կամ բազմանկիւնն է կանոնաւոր :*

Ապացուցութիւն. — *Ի* Թ *կեդրոնէ ձգեսցին շառաւիղքն* ԹԱ, ԹԲ, ԹԳ, ԹԴ, ԹԵ, ԹԶ, ԹԷ, ԹԸ. *յայտ է եթէ* ԹԲ=ԹԲ, ԹԱ=ԹԳ, *և* ԱԲ=ԲԳ, *ուստի և* ΔԹԱԲ≅ΔԹԲԳ (63). *ըստ սմին օրինակի մարթ է ցուցանել եթէ և այլ եռանկիւնքն* ԹԳԴ, ԹԴԵ, ԹԵԶ, ԹԶԷ, ԹԷԸ *և* ԹԸԱ *առաջնոցն և միմեանց պատշաճականք են : Բայց որովհետև* ԹԱ=ԹԲ=ԹԳ=..., *ուստի ամենայն եռանկիւնքն* հաւասարասրունք են, հետեւաբար ամենայն անկիւնք՚ի խարսխի միմեանց հաւասարք են, կամ ԹԱԲ=ԹԲԱ=ԹԲԳ=ԹԳԲ=ԹԳԴ=ԹԴԳ, այլովքն հանդերձ. վասն որոյ բովանդակութիւն երկուց այսց անկեանց հաւասար է բովանդակութեան երկուց այլոց, ուստի ԸԱԲ=ԱԲԳ=ԲԳԴ=ԳԴԵ=ԴԵԶ=ԵԶԷ=ԶԷԸ=ԷԸԱ. ուրեմն բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶԷԸ է հաւասարանկիւն, հետեւաբար և կանոնաւոր:

219. Առաջարկութիւն. — Ստորագրել՚ի բոլորակի կանոնաւոր քառանկիւն կամ քառակուսի:

Լուծումն. — Ընդ Գ (Ձև 134) կեդրոն բոլորակին ձգեսցի տրամագիծն ԱԲ ուղղահայեաց՚ի վերայ ԴԵ տրամագծին, յետ այնորիկ ածիցին լարքն ԱԵ, ԵԲ, ԲԴ, ԴԱ. և ԱԵԲԴ լինիցի կանոնաւոր քառանկիւնն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Որովհետև ԱԳԵ=ԵԳԲ=ԲԳԴ=ԴԳԱ=Ո, ուստի և ԱԵ=ԵԲ=ԲԴ=ԴԱ (203. Հետև.). ուրեմն ԱԵԲԴ է հաւասարակող. հետեւաբար է եւ հաւասարանկիւն (218), ուստի և կանոնաւոր:

220. Առաջարկութիւն. — Ստորագրել՚ի բոլորակի կանոնաւոր վեցանկիւն, և կանոնաւոր եռանկիւն:

Լուծումն. — Ընդ որ զինչ և իցէ կէտ շրջապատին, զոր օրինակ ընդ Ա (Ձև 135), ձգիցին լարք ԱԲ=ԲԳ=ԳԴ=ԴԵ=ԵԶ, որոց իւրաքանչիւրն իցէ հաւասար շառաւիղի բոլորակին. ածիցի ԶԱ, և ԱԲԳԴԵԶ լինիցի կանոնաւոր վեցանկիւնն խնդրեալ: Դարձեալ ձգիցին ուղիղ գիծքն ԲԴ, ԴԶ, ԶԲ, և ԲԴԶ լինիցի կանոնաւոր եռանկիւնն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Ի կեդրոնէն Է ձգիցին շառաւիղքն ԷԱ, ԷԲ, ԷԳ, ԷԴ, ԷԵ, ԷԶ, յայտ է եթէ ԷԱ=ԷԲ=ԱԲ, ուրեմն $\triangle$ԱԷԲ է հաւասարակող, ուստի և ԱԷԲ=$^{2}/_{3}$Ո. ըստ նմին օրինակի և ԲԷԳ=$^{2}/_{3}$Ո, այլովքն հանդերձ. ուրեմն ԱԷԲ+ԲԷԳ+ԳԷԴ+ԴԷԵ+ԵԷԶ=5$\times$$^{2}/_{3}$Ո=$^{10}/_{3}$Ո: Որովհետև բովանդակութիւն կեդրոնական անկեանցն է=4Ո, ուստի և ԶԷԱ=4Ո−$^{10}/_{3}$Ո=$^{2}/_{3}$Ո. ուրեմն նաև ԶԷԱ=ԱԷԲ, յորմէ և ԶԱ=ԱԲ (203. Հետևանք). հետեւաբար վեցանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ է հաւասարակող, որով և հաւա-

սարանկիւն (218), ապա և կանոնաւոր : Դարձեալ որովհե-
տև ԱԷԲ=$^2/_3$Ո և ԶԷԱ=$^2/_3$Ո, ուստի և ԶԷԲ=$^4/_3$Ո, ԲԷԴ
=$^4/_3$Ո, ԴԷԶ=$^4/_3$Ո, յորմէ ԶԷԲ=ԲԷԴ=ԴԷԶ, վասն
այնորիկ և ԶԲ=ԲԴ=ԴԶ (203. Հետև.). ուրեմն ΔԲԴԶ
է հաւասարակող, և հետևաբար եւ հաւասարանկիւն (218):

Հետևանք.— Յաստացելոցս իմացեալ տեսանի եթէ որ զինչ
և՛ իցէ կողմն կանոնաւոր վեցանկեան հաւասար է շառաւիղի
բոլորակին որ զնովաւ պարագրիցի :

221. Հայեցողութիւն. — Եթէ ուղիղ գիծ ինչ ԱԲ (Ձև
136)՝ի Գ. հատանիցի՝ի չարունակ համեմատական հատածս, և
՝ի վերայ ԲԳ մեծագոյն հատածի կանգնիցի հաւասարասրուն
եռանկիւնն ԲԳԴ, այնպէս զի մի մի՝ի սրունից իցէ հաւասար
ողջոյն ԱԲ ուղիղ գծին, անկիւնն՝ի Դ գագաթան եռան-
կեան է կէս իւրաքանչիւր անկեան՝ի խարսխի :

Ապացուցութիւն. — Արասցի ԳԵ=ԱԳ, և ձգիցի ԲԵ:
Արդ որովհետև

ԱԲ : ԲԳ=ԲԳ : ԳԱ,

և

ԴԳ=ԱԲ,

և

ԳԵ=ԳԱ,

ուստի և

ԴԳ : ԲԳ=ԲԳ : ԳԵ.

դարձեալ որովհետև

ԴԳԲ=ԲԳԵ,

ուրեմն

ΔԴԳԲ∼ΔԲԳԵ (133),

վասն այնորիկ և

ԳԴԲ=ԳԲԵ,

և

ԳԴ : ԳԲ=ԴԲ : ԲԵ:

Արդ

ԳԴ=ԴԲ,

ուստի և

ԳԲ=ԲԵ,

կամ △ԳԲԵ *է հաւասարասրուն ։*

Քանզի որովհետև

ԳԴ=ԲԱ,

և

ԳԵ=ԱԳ,

յայտ է եթէ

ԴԵ=ԲԳ,

ուստի և

ԴԵ=ԲԵ,

վասն այնորիկ և

ԵԴԲ=ԵԲԴ (66)։

Արդ որովհետև

ԳԴԲ=ԳԲԵ,

և

ԳԴԲ=ԵԲԴ,

ուրեմն

ԳԴԲ=$^1/_2$ԴԲԳ.

բայց

ԴԲԳ=ԴԳԲ,

ուստի և

ԳԴԲ=$^1/_2$ԴԳԲ ։

Հետեւանք. — *Որովհետև* ԳԲԴ=2ԳԴԲ, *և* ԴԳԲ=2ԳԴԲ, *բովանդակութիւն ամենայն անկեանց* ԴԲԳ *եռանկեան է* =5ԳԴԲ, *կամ* ԳԴԲ=$^1/_5$ *բովանդակութեան ամենայն անկեանց, ուստի* $^1/_5$×2Ո, *այսինքն է* ԳԴԲ=$^2/_5$Ո=36°, *վասն այնորիկ և իւրաքանչիւր անկիւն 'ի խարսխին է* =2×$^2/_5$Ո=$^4/_5$Ո=72° ։

222. Առաջարկութիւն. — *Ստորագրել 'ի բոլորակի կանոնաւոր տասնանկիւն և կանոնաւոր հնգանկիւն ։*

Լուծումն. — *Ձգեսցի որ զինչ և իցէ շառաւիղ* ԱԲ (*Ձև* 137) *և 'ի* Գ *հատանիցի 'ի չարունակ համեմատական հատուածս* (215), *որպէս զի իցէ* ԱԲ ։ ԲԳ ։ ԱԳ. *և* ԲԳ *լինիցի կողմն կանոնաւոր տասնանկեան, որ ստորագրեսցի 'ի բոլորակի. ուստի եթէ 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին ձգեսցին տասն լարք* ԲԴ, ԴԵ, ԵԶ, ··· *որոց իւրաքանչիւրն իցէ* =ԲԳ, *ծագ* վերջին լարին անկանիցի 'ի կիսի սկզբան առաջնոյն․ և ԲԴԵԶԷԸԹԺԻԼ լինիցի տասնանկիւնն խնդրեալ։ Հուսկ յետոյ ձգեսցին ԲԵ, ԵԷ, ԷԹ, ԹԻ, ԻԲ, և ԲԵԷԹԻ լինիցի հնգանկիւնն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն․ — Ձգեսցին շառաւիղքն ԱԲ, ԱԴ, ԱԵ, ԱԶ, այլովքն հանդերձ․ յայտ է եթէ △ԱԲԴ է հաւասարասրուն, և ԲԴ=ԲԳ․ բայց ԱԲ 'ի Գ հատանի 'ի շարունակ համեմատական մասունս, հետևաբար ԲԱԴ=$^2/_5$Ո=36° (221․ Հետև․)։ Արդ որովհետև բովանդակութիւն կեդրոնական անկեանցն է =4Ո=360°, ուստի և ԲԱԴ է տասներորդման ամենայն անկեանց, հետևաբար մարթ է գնել զանկիւնն ԲԱԴ տասնիցս զԱ կիտիւ․ և որովհետև հաւասար կեդրոնական անկեանց կշռին հաւասար լարք (203), յորմէ և զլարն ԲԴ մարթ է գնել տասնիցս 'ի վերայ շրջապատի բոլորակին, վասն այնորիկ և բազմանկիւնն ԲԴԵԶԷԸԹԺԻԼ է հաւասարակող, ուստի և հաւասարանկիւն (218), և հետևաբար կանոնաւոր։ Դարձեալ որովհետև ԲԱԴ=$^2/_5$Ո, և ԴԱԵ=$^2/_5$Ո, ուստի և ԲԱԵ=$^4/_5$Ո․ ըստ սմին օրինակի ԵԱԷ=$^4/_5$Ո, ԷԱԹ=$^4/_5$Ո, և այսպէս մի ըստ միոջէ․ վասն այնորիկ ԲԱԵ=ԵԱԷ=ԷԱԹ=ԹԱԻ=ԻԱԲ, յորմէ և ԲԵ=ԵԷ=ԷԹ=ԹԻ=ԻԲ (203)․ ուրեմն ԲԵԷԹԻ է հաւասարակող, հետևաբար նաև հաւասարանկիւն, վասն որոյ և կանոնաւոր։

225․ Առաջարկութիւն․ — Փոխել զկանոնաւոր բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ (Ձև 138), որ ստորագրեսցի 'ի բոլորակի, յայլ կանոնաւոր բազմանկիւն ստորագրեալ 'ի նմին բոլորակի, որ երկպատիկ աւելի կողմանս ունիցի։

Լուծում․ — Հատաբաժեսցին աղեղունքն ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, ԴԵ, ԵԶ, ԶԱ 'ի կէտսն Է, Ը, Թ, Ժ, Ի, Լ (208), և ապա ձգեսցին լարքն ԱԷ, ԷԲ, ԲԸ, ԸԳ, ԳԹ, այլովքն հանդերձ․ ԱԷԲԸԳԹԴԺԵԻԶԼ լինիցի բազմանկիւնն խնդրեալ։

Ապացուցութիւն․ — Որովհետև փոխանակ ԱԲ կողման, են երկու ԱԷ և ԷԲ կողմանք, փոխանակ ԲԳ կողման, են երկու ԲԸ և ԸԳ կողմանք, և այլքն մի ըստ միոջէ, նոր բազմանկիւնն ունիցի երկպատիկ աւելի կողմանս։ Դարձեալ որովհետև լարքն ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, և այլն են միմեանց հաւասարք, նոյնպէս և աղեղունքն ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, և այլն են միմեանց հաւասարք, հետևաբար և կէսք աղեղանցս, կամ ԱԷ, ԷԲ, ԲԸ, ԸԳ, ԳԹ, ԹԴ, և այլն, ուստի և լարք նոցին ԱԷ, ԷԲ, ԲԸ, ԸԳ, ԳԹ, ԹԴ, և այլն են միմեանց հաւասարք (205). վասն այնորիկ ԱԷԲԸԳԹԴԺԵԻԶԼ է հաւասարակող, ուրեմն և հաւասարանկիւն (218), յորմէ և կանոնաւոր:

Հետևանք. — Ըստ (219) համարոյ մարթ է ուրեմն յոր զինչ և իցէ բոլորակի ստորագրել կանոնաւոր բազմանկիւն, որոյ 8, 16, 32, 64, 128, 256, ··· 2^n կողմանք իցեն. ըստ (220) համարոյ մարթ է յոր զինչ և իցէ բոլորակի ստորագրել կանոնաւոր բազմանկիւն, որոյ 12, 24, 48, 96, 192, ··· $3{\cdot}2^n$ կողմանք իցեն. և ըստ (222) համարոյ մարթ է յոր զինչ և իցէ բոլորակի ստորագրեալ կանոնաւոր բազմանկիւն, որոյ 20, 40, 80, 160, 320, ··· $5{\cdot}2^n$ կողմանք իցեն:

224. Առաջարկութիւն. — Ձծանուցեալ լինչ բոլորակաւ, յորում ստորագրեալ իցէ կանոնաւոր բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ (Ձև 139), պարագրել զայլ կանոնաւոր բազմանկիւն, որոյ նոյն թիւ համարոյ իցէ կողմանցն:

Լուծումն. — Ձգեսցին շօշափողք առ կէտսն Ա, Բ, Գ, Դ, Ե (182. Հետև.), որ 'ի Զ, Է, Ը, Թ, Ժ զմիմեանս հատանիցեն. և ԶԷԸԹԺ լինիցի բազմանկիւնն խնդրեալ:

Ապացուցութիւն. — Ձգեսցին ուղիղ գիծքն ԻԱ, ԻԲ, ԻԳ, ԻԴ, ԻԵ. աստանօր յայտ է եթէ եռանկիւնքն ԻԱԲ, ԻԲԳ, ԻԳԴ, ԻԴԵ, ԻԵԱ լինիցին պատշաճականք (65) և հաւասարասրունք, ուստի և ԻԱԲ=ԻԲԱ=ԻԲԳ=ԻԳԲ=ԻԳԴ=···: Բայց արդ ԻԱԶ=Ո, ԻԲԶ=Ո, ԻԲԷ=Ո, ԻԳԷ=Ո, և այլքն մի ըստ միոջէ, հետևաբար ԻԱԶ—ԻԱԲ=ԻԲԶ—ԻԲԱ=ԻԲԷ—ԻԲԳ=ԻԳԷ—ԻԳԲ=··· այլովքն համդերձ, այսինքն ԲԱԶ=ԱԲԶ=ԳԲԷ=ԲԳԷ=··· արդ որովհետև նաև ԱԲ=ԲԳ=ԳԴ=···, ուստի և եռանկիւնքն ԱԲԶ, ԲԳԷ, ԳԴԸ, ··· են պատշաճականք (65) և հաւասարասրունք (68). վասն այնորիկ ԱԶԲ=ԲԷԳ=ԳԸԴ=···, կամ ԶԷԸԹԺ է հաւասարանկիւն. գարձեալ ԱԶ=ԶԲ=ԲԷ=ԷԳ=ԳԸ=ԸԴ=··· ուրեմն և բովանդակութիւն երկուց 'ի նոցանէ հաւասար է բովանդակութեան այլոց երկուցն, կամ

Զէ=էԸ=ԸԹ=ԹԺ=ԺԶ, հետեւաբար ԶէԸԹԺ է նաեւ հաւասարակող, վասն այնորիկ և կանոնաւոր :

Հետեւանք. — Սոյին օրինակաւ պարագրին զբոլորակաւ այն ամենայն կանոնաւոր բազմանկիւնք, որ ստորագրիցին 'ի բոլորակի :

225 · *Առաջարկութիւն.* — Զծանուցեալ ինչ բոլորակաւ, զորով պարագրեալ իցէ կանոնաւոր բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ (Ձե 140), պարագրել զայլ կանոնաւոր բազմանկիւն, որոյ երկպատիկ աւելի իցէ թիւ համարոյ կողմանցն :

Լուծումն. — Ի կեդրոնէն Զ ձգիցեն ուղիղ գիծքն ԶԱ, ԶԲ, ԶԳ, ԶԴ, ԶԵ, որ հատանիցեն զբոլորակն 'ի կէտսն Է, Ը, Թ, Ժ, Ի. առ այսոսիկ կէտս ձգիցին շօշափողք, որ հատանիցեն զկողս բազմանկեանն. և ԼԽԾԿՀՁՂՃՄՅ լինիցի բազմանկիւնն խնդրեալ :

Ապացուցումն. — Բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ շօշափէ զբոլորակն 'ի կէտսն Ն, Ղ, Ո, Չ, Պ. ձգիցին ուղիղ գիծքն ՆԸ, ԸՂ, ՂԹ, ԹՈ, ՈԺ, ԺՉ, ՉԻ, ԻՊ' ՊԷ, ԷՆ, ԶՆ, ԶՂ, ԶՈ, ԶՉ, ԶՊ: Ցերկոսին քառանկիւնան ԱՊԶՆ, ՆԶՂԲ յայտ է եթէ ՊԱՆ=ՆԲՂ, ԶՊԱ=ԶՆԲ=Ո, և ԶՆԱ=ԶՂԲ=Ո. ուրեմն երեք անկիւնք միոյն հաւասար են երից անկեանց միւսոյն. բայց արդ որովհետեւ բովանդակութիւն ամենայն անկեանց քառանկեան է =4Ո (60), ուստի և չորրորդ անկիւն միոյն հաւասար է չորրորդ անկեան միւսոյն. վասն որոյ ՊԶՆ=ՆԶՂ. ըստ նմին օրինակի ՆԶՂ=ՂԶՈ=ՈԶՉ=ՉԶՊ: Դարձեալ ԱՆ=ԱՊ (186. Հետեւ. Բ), ԱԶ=ԱԶ, և ԶՆ=ԶՊ, ուստի և ΔԱԶՆ≅ΔԱԶՊ (65). վասն որոյ և ԱԶՆ=ԱԶՊ, կամ ՊԶՆ հատորակի 'ի ԶԱ գծէ. սոյնպէս և անկիւնքն ՆԶՂ, ՂԶՈ, ... հատորակիցին : Արդ անկիւնքն ՊԶՆ, ՆԶՂ, ՂԶՈ, ... են միմեանց հաւասար, նոյնպէս և կէսք նոցա լինիցին միմեանց հաւասար, այսինքն ամենայն անկիւնք որ 'ի Զ կեդրոն գտանիցին, են միմեանց հաւասար, հետեւաբար և լարքն ՊԷ, ԷՆ, ՆԸ, ԸՂ, ... են միմեանց հաւասար (203). վասն այնորիկ բազմանկիւնն ԷՆԸՂԹՈԺՉԻՊ է կանոնաւոր (218): Հուսկ յետոյ որովհետեւ ամենայն կողմանք բազմանկեանն ԼԽԾԿՀՁՂՃՄՅ շօշափուք են բոլորակին 'ի կէտսն յորս միւս բազմանկիւնն շօշափէ զշրջապատ բոլորակին, ուստի ԼԽԾԿՀՁՂՃՄՅ է կանոնաւոր բազմանկիւն պարագրեալ զբոլորակաւ, որոյ թիւ համարոյ կողմանցն հաւասար է թուոյ կողմանց բազմանկեանն ԷՆԸՇԹՈԺՋԻՊ (224), վասն որոյ երկպատիկ աւելի կողմանս ունիցի քան զՆՇՈՋՊ, ուստի և քան զբազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ։

226. Հայեցողութիւն. — Եթէ 'ի կանոնաւոր ինչ բազմանկեան ԱԲԳԴԵ (Ձև 141) հատարակիցին երկու մերձաւոր անկիւնք ԲԱԵ և ԱԲԳ, և 'ի Զ կիտէ, յորում երկոքին հատարակող գիծքն զմիմեանս հատանեն, ձգիցին ուղիղ գիծք առ գագաթունս այլոց անկեանց, սոքա ևս հատարակիցեն, և ամենայն հատարակող գիծք լինիցին միմեանց հաւասար. նոյնպէս և ամենայն ուղղահայեացք որ 'ի Զ կիտէ ձգիցին 'ի վերայ կողմանց բազմանկեանն, լինիցին միմեանց հաւասար, և հատարակիցեն զկողմանս զայնոսիկ։

Ապացուցութիւն. — Որովհետև

ԶԲ=ԶԲ,

և

ԲԱ=ԲԳ,

և

ԶԲԱ=ԶԲԳ,

ուստի և

ΔԱԲԶ≅ΔԲԳԶ (64).

ուրեմն

ԶԱԳ=ԶԳԲ.

արդ

ԶԱԲ=½ԲԱԵ,

և

ԲԱԵ=ԲԳԴ,

ուստի և

ԶԳԲ=½ԲԳԴ,

և կամ ԲԳԴ հատարակիցի 'ի ԶԳ գծէ։

Ըստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ ԳԴԵ հատարակիցի 'ի ԶԴ գծէ, և ԱԵԴ 'ի ԶԵ գծէ։ Դարձեալ

ԶԱԲ=ԶԲԱ,

քանզի

ԶԱԲ=$^1/_2$ԲԱԵ·

և

ԶԲԱ=$^1/_2$ԱԲԳ·

ուստի և

ԶԱ=ԶԲ (68):

Նոյնպէս ցուցանի եթէ ԶԲ=ԶԳ, ԶԳ=ԶԴ, ԶԴ=ԶԵ: Դարձեալ ձգիցին 'ի Զ կիտէ 'ի վերայ կողմանց ուղղահայեաց գիծքն ԶԿ, ԶԸ, ԶԹ, ԶԺ, ԶԻ, ուստի որովհետև ΔԶԱԲ է հաւասարասրուն, յայտ է եթէ ԱԿ=ԿԲ, և կամ ԱԲ հասարակեցի յԿ (81· Հետև· Ը): Ըստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ ԲԳ, ԳԴ, ԴԵ և ԵԱ հասարակեցին յԸ, Թ, Ժ, Ի: Հուսկ յետոյ

ԶԲ=ԶԲ,

և

ԶԲԿ=ԶԲԸ,

և

ԶԿԲ=ԶԸԲ=Ո,

ուստի և

ΔԶԲԿ≅ΔԶԲԸ (63)·

վասն այնորիկ և

ԶԿ=ԶԸ,

նոյնպէս և

ԶԸ=ԶԹ=ԶԺ=ԶԻ:

Հետեւանք Ա.— Կէտն Զ հաւասար հեռի կայ յամենայն գագաթանց անկեանցն, նոյնպէս և յամենայն կողմանց:

Հետեւանք Բ.— Եթէ 'ի Զ կեդրոնէ ԶԱ շառաւիղաւ ձգիցի բոլորակ, անցանէ ընդ ամենայն գագաթունս անկեանց բազմանկեանն ԱԲԳԴԵ: Ապա ուրեմն զամենայն կանոնաւոր բազմանկեամբք մարթի պարագրել բոլորակ:

Հետեւանք Գ.— Եթէ 'ի Զ կեդրոնէ ԶԿ շառաւիղաւ ձգիցի բոլորակ, անցանէ և ընդ Ը, Թ, Ժ, Ի. և որովհետև ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, ԴԵ, ԵԱ կողմանք՝ ուղղահայեաց են առ ԶԿ, ԶԸ, ԶԹ, ԶԺ, ԶԻ, են շօշափողք բոլորակին: Հետևաբար յամենայն կանոնաւոր բազմանկիւնս մարթի ստորագրել բոլորակ :

Հետեւանք Դ. — Ուղղահայեաց գիծն ԶԷ կամ ԶԸ, որ ՚ի Զ կեդրոնէ կանոնաւոր ինչ բազմանկեան ձգիցի ՚ի վերայ միոյ ՚ի կողմանցն, անուանեալ կոչի հեռագիծ կանոնաւոր բազմանկեան : Ուստի ամենայն հեռագիծք կանոնաւոր ինչ բազմանկեան են միմեանց հաւասար :

227. Հայեցողութիւն. — Եթէ կրկնապատկիցի թիւ համարոյ կողմանց կանոնաւոր ինչ բազմանկեան ԱԲԳԴԵԶ (Ձև 138) ստորագրելոյ ՚ի բոլորակի, տարածութիւն երեսաց նորա աճէ. իսկ եթէ կրկնապատկիցի թիւ համարոյ կողմանց կանոնաւոր ինչ բազմանկեան ԱԲԳԴԵ (Ձև 140) պարագրելոյ զբոլորակաւ, տարածութիւն երեսաց նորա նուազէ :

Ապացուցութիւն. — Բազմանկիւնն ԱԷԲԸԳԹԴԺԵԻԶԼ որոյ երկպատիկ աւելի իցէ թիւ համարոյ կողմանցն, յայտ է եթէ առաւելուցու եռանկեամբք ΔԱԷԲ+ΔԲԸԳ+ΔԷԹԴ+ΔԴԺԵ+ΔԵԻԶ+ΔԶԼԱ քան զբազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ ստորագրեալ ՚ի նմին բոլորակի. ընդ հակառակն բազմանկիւնն ԼԽԾԿՀՁՂՃՄՅ (Ձև 140) որոյ երկպատիկ աւելի իցէ թիւ համարոյ կողմանցն, նուազիցի եռանկեամբք ΔԼԱԽ+ΔԾԲԿ+ΔՀԳՁ+ΔՂԴՃ+ΔՄԵՅ քան բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ պարագրեալ զնովին բոլորակաւ :

Հետեւանք Ա. — Կանոնաւոր բազմանկիւնն, որ ստորագրիցի ՚ի բոլորակի, ըստ տարածութեան երեսացն միշտ փոքր է քան զբոլորակն մասամբք երեսաց բովանդակելոց ՚ի լարէ և յաղեղանէ բոլորակին. սակայն որչափ ինչ մեծ իցէ թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, այնչափ առաւել մեծ լինիցի, որպէս զի փոքու իւք տարբերել ՚ի բոլորակէ :

Հետեւանք Բ. — Ընդ հակառակն կանոնաւոր բազմանկիւնն, որ պարագրիցի զբոլորակաւ, ըստ տարածութեան երեսացն միշտ մեծ է քան զբոլորակն մասամբք երեսացն բովանդակելոց յաղեղանց և ՚ի շօշափողաց բոլորակին. սակայն որչափ ինչ միանգամ մեծ իցէ թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, այնչափ առաւել փոքր լինիցի, որպէս զի անհնարին մերձենալ տարածութեան երեսաց բոլորակին :

228․ Հաստատութիւն․ — Մարթ է զմտաւ ածել զբոլորակն կանոնաւոր բազմանկիւն ինչ անթուակողմեան, որոյ հեռագիրն լիցէ շառաւիղն ։

Ապացուցութիւն․ — Որովհետև որչափ ինչ մեծ լիցէ թիւ համարոյ կողմանց կանոնաւոր բազմանկեան որ ՚ի ներքոյ կամ արտաքոյ ձգիցի զբոլորակաւ այնչափ առաւել մօտչի առ բոլորակն, այլ ուրեմն բոլորակն է եզր և սահման․ կամ թէ ՚ի սաստիկ և անհնարին աճել թուոյ կողմանց բազմանկեանցս այսոցիկ, թէպէտև չհասանիցեն ընդ բոլորակին, սակայն տարբերութիւն նոցա առաւել փոքր լինիցի քան զամենայն քանակութիւն, զոր հնար լիցէ զմտաւ ածել ։ Յայս սահման հասանիցեն եթէ թիւ համարոյ կողմանց նոցա մեծ լիցէ քան զամենայն մեծագոյն թիւ հնարաւոր, այսինքն անհնարին մեծ լիցէ ։ Ուստի որչափ ինչ թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեան մերձենայ յանբաւն, այնչափ ինչ բազմանկիւնն մօտչի առ բոլորակ ։ Այլ ուրեմն մարթ է զմտաւ ածել զբոլորակն կանոնաւոր բազմանկիւն ինչ, որոյ անբաւ կողմանք իցեն ։ Դարձեալ որովհետև հեռագիրք ամենայն բազմանկեանց պարագրելոց զբոլորակաւ հաւասար են շառաւիղին, ուստի հեռագիր բոլորակի է նոյն ինքն շառաւիղն ։

229․ Հաստատութիւն․ — Յոր զինչ և իցէ կանոնաւոր նկարմեան բազմանկեան, մեծութիւն իւրաքանչիւր անկեան է $=\frac{(\text{ն}-2)2\text{Ո}}{\text{ն}}=\frac{(\text{ն}-2)180^\circ}{\text{ն}}$ ։

Ապացուցութիւն․ — Բովանդակութիւն ամենայն ն անկեանց է $=(\text{ն}-2)2\text{Ո}$ (60)․ բայց որովհետև ամենայն ն անկիւնքն միմեանց հաւասար են, իւրաքանչիւր անկիւն լինիցի ներորդ մասն ողջոյն բովանդակութեն, ուրեմն $=\frac{(\text{ն}-2)2\text{Ո}}{\text{ն}}$ $=\frac{(\text{ն}-2)180^\circ}{\text{ն}}$, քանզի $2\text{Ո}=180^\circ$ ։

230․ Հաստատութիւն․ — Կանոնաւոր բազմանկիւնք, որոց նոյն թիւ համարոյ իցէ կողմանցն, միմեանց նմանք են․ շրջանակք նոցա համեմատականք են կողմանցն, և տարածութիւնք երեսաց նոցա համեմատին ընդ քառակուսիս կողմանցն ։

Ապացուցութիւն. — Իցէ թիւ համարոյ կողմանց երկուց կանոնաւոր բազմանկեանց $=\text{Ն}$, մեծութիւն իւրաքանչիւր անկեան լինիցի $=\frac{(\text{Ն}-2)2\text{Ո}}{\text{Ն}}$ (229), ուստի անկիւնք միոյն հաւասար են անկեանց միւսոյն, գոլով Ն մի և նոյն յերկոսին 'ի նոսա. ուրեմն երկոքին ևս բազմանկիւնքն են հաւասարանկիւնք: Դարձեալ որովհետև կողմանք իւրաքանչիւր բազմանկեան միմեանց հաւասարք են, ուստի կողմանք միոյն լինիցին համեմատականք կողմանց միւսոյն, վասն այնորիկ երկոքին բազմանկիւնքն լինիցին միմեանց համեմատականք: Հետևաբար շրջանակք նոցա համեմատականք են կողմանցն, և տարածութիւնք երեսաց նոցա համեմատին ընդ քառակուսիս կողմանցն (171):

231. Հայեցողութիւն. — Ի կանոնաւոր բազմանկիւնս ԱԲԳԴԵ, ԶԷԸԹԺ (Ձև 142), որոց նոյն թիւ համարոյ իցէ կողմանցն, շրջանակքն համեմատականք են հեռագրից իւրաքանչիւր նոցա. և տարածութիւնք երեսացն համեմատին ընդ քառակուսիս հեռագրից:

Ապացուցութիւն. — Ձգեցին 'ի կեդրոնեցն Ի և Լ հեռագիրքն ԻԽ, ԼԾ. ձգեցին ևս ուղիղ գիծքն ԻԱ, ԻԲ, ԼԶ, ԼԷ: Արդ

$$\text{ԵԱԲ}=\text{ԺԶԷ}\quad(230).$$

բայց

$$\text{ԻԱԲ}={}^{2}/_{2}\,\text{ԵԱԲ}\quad(226),$$

և

$$\text{ԼԶԷ}={}^{1}/_{2}\,\text{ԺԶԷ}\quad(226),$$

ուրեմն

$$\text{ԻԱԲ}=\text{ԼԶԷ}.$$

ըստ նմին օրինակի և

$$\text{ԻԲԱ}=\text{ԼԷԶ}.$$

ուստի և

$$\text{ԱԻԲ}=\text{ԶԼԷ}\quad(57.\ \text{Հետև. Ե}),$$

վասն այնորիկ և

$$\Delta\text{ԻԱԲ}\sim\Delta\text{ԼԶԷ}\quad(132),$$

յորմէ

$$\text{ԱԲ} : \text{ՋԷ} = \text{ԻԽ} : \text{ԼԾ} \quad (141),$$

ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ՋԷ}}^2 = \overline{\text{ԻԽ}}^2 : \overline{\text{ԼԾ}}^2 \ (160 \cdot \text{Հետև} \cdot \text{Ա}) :$$

Արդ շրջանակք երկոցուն բազմանկեանցն համեմատին ընդ միմեանս որպէս ԱԲ : ՋԷ. և տարածութիւնք երեսացն՝ որպէս $\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{ՋԷ}}^2$ (230), վասն այնորիկ շրջանակքն համեմատին ընդ միմեանս որպէս ԻԽ : ԼԾ, և տարածութիւնք երեսացն՝ որպէս $\overline{\text{ԻԽ}}^2 : \overline{\text{ԼԾ}}^2$:

232. Հայեցողութիւն. — Բոլորակք միմեանց նմանք են, շրջապատք նոցա համեմատականք են շառաւիղացն, և տարածութիւնք երեսաց նոցա համեմատին ընդ քառակուսիս շառաւիղաց :

Ապացուցութիւն. — Զգիցին յիւրաքանչիւր բոլորակի կանոնաւոր նկողմեան բազմանկիւնք, որք միմեանց նմանք լինիցին (230): Եթէ հաւասարապէս երկպատկիցի թիւ համարոյ կողմանց նոցա յիւրաքանչիւր բոլորակի, ցանգ մնասցեն բազմանկիւնքն միմեանց նմանք. և միանգամայն ցանգ մատչեսցին առ բոլորակն, մինչև 'ի լինել թուոյ կողմանցն անբաւ՝ հաւասարիցին բոլորակաց : Արդ մնալով ցանգ միմեանց նմանք, մնայցեն դարձեալ նմանք և 'ի լինելն հաւասար բոլորակաց. այսինքն նոքին իսկ բոլորակքն միմեանց նմանք են : Եւ քանզի որովհետև բոլորակք են նման բազմանկիւնք, որ ունին հեռագիր զշառաւիղս (230), շրջանակք նոցա համեմատականք են շառաւիղացն, և տարածութիւնք երեսաց նոցա համեմատին ընդ քառակուսիս շառաւիղաց (231) :

Հետևանք. — Յառաջելոցս իմացեալ տեսանի եթէ 'ի բոլորակս շրջապատքն համեմատականք են տրամագծից, և տարածութիւնք երեսացն համեմատին ընդ քառակուսիս տրամագծից : Արդ եթէ շառաւիղք երկուց բոլորակաց իցեն Ճ և ճ, և տրամագիծքն Տ և Փ, յայտ է եթէ

$$\text{Ճ} : \text{ճ} = 2\text{Ճ} : 2\text{ճ} = \text{Տ} : \text{Փ},$$

և

$$\text{Ճ}^2 : \text{ճ}^2 = 4\text{Ճ}^2 : 4\text{ճ}^2 = \text{Տ}^2 : \text{Փ}^2 :$$

233. Հայեցողութիւն. — Որ զինչ և իցէ կանոնաւոր բազմանկիւն ԱԲԳԴԵ (Ձև 143) հաւասար է եռանկեան, որոյ

խարիսխ իցէ շրջանակն և բարձրութիւն՝ հեռաւոր բազմանկեանն : Ըստ նմին օրինակի որ զինչ և իցէ բոլորակ հաւասար է եռանկեան, որոյ խարիսխ իցէ շրջապատն և բարձրութիւն՝ շառաւիղն :

Ապացուցութիւն. — Ի Զ կեդրոնէ կանոնաւոր բազմանկեանն ԱԲԳԴԵ ձգեսցին առ անկիւնսն ուղիղ գիծքն ԶԱ, ԶԲ, ԶԳ, ԶԴ, ԶԵ, որով եթէ բազմանկիւնն իցէ նկուլմեան՝ բաժանեսցի 'ի եռանկիւնս հաւասարս միմեանց (103), զի ունին իւրեանց խարիսխ ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, ԴԵ, ԵԱ. նոյնպէս ամենայն հեռաւորք որ 'ի Զ կեդրոնէ ձգեսցին 'ի վերայ խարսխաց նոցա, ուստի բարձրութիւնք նոցա լինիցին հաւասար միմեանց: Հետևաբար ողջոյն տարածութիւն է =ն×ΔԶԱԲ: Դարձեալ եթէ դնիցի ԱԷ=ն×ԱԲ, և ձգեսցի ԶԷ, լինիցի ΔԶԱԷ : ΔԶԱԲ=ԱԷ : ԱԲ (129). բայց ԱԷ=ն×ԱԲ, ուստի և ΔԶԱԷ=ն×ΔԶԱԲ. ուրեմն ΔԶԱԷ=ԱԲԳԴԵ: Արդ որովհետև ԱԷ=ն×ԱԲ, ուստի ԱԷ հաւասար է շրջանակի բազմանկեանն ԱԲԳԴԵ: Հետևաբար ԱԲԳԴԵ հաւասար է եռանկեանն ԶԱԷ, որոյ խարիսխն ԱԷ հաւասար է շրջանակի, և բարձրութիւնն ԶԸ հաւասար է հեռաւորի տուեալ բազմանկեան : Եւ քանզի մարթ է զմտաւ ածել զբոլորակն կանոնաւոր բազմանկիւն ինչ, նախընթաց ապացուցութիւնն զօրէ և վասն բոլորակի :

Հետևանք Ա. — Ուրեմն տարածութիւն երեսաց կանոնաւոր բազմանկեան գտանի, եթէ շրջանակ նորին բազմապատկեսցի հեռաւորիւ և արտադրեալն բաժանեսցի յ2: Նոյնպէս տարածութիւն երեսաց բոլորակի գտանի, եթէ շրջապատ նորին բազմապատկեսցի շառաւիղաւ, և արտադրեալն բաժանեսցի յ2 :

Հետևանք Բ. — Ըստ նմին օրինակի որ զինչ և իցէ հատուածող բոլորակի հաւասար է եռանկեան, որոյ խարիսխ իցէ աղեղն իւր և բարձրութիւն շառաւիղ բոլորակին :

Հետևանք Գ. — Որովհետև տարածութիւն երեսաց բոլորակի հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ շրջապատին և շառաւիղին, ուրեմն քառակուսութիւն բոլորակի գտանի եթէ խնդրեսցի միջին համեմատականն առ շրջապատն և առ կէս շառաւիղն, կամ առ շառաւիղն և առ կէս շրջապատն: Որոշել զերկայնութիւն շրջապատի բոլորակի մասամբք իւրոյ շառաւիղին, անուանեալ կոչի ուղղագործութիւն շրջապատի:

234. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ զկողմն ԱԲ (Ձև 144) կանոնաւոր բազմանկեան ստորագրելոյ 'ի բոլորակի և զշառաւիղն ԱԳ, ստորագրել միւս ևս կանոնաւոր բազմանկիւն որ երկպատիկ աւելի ևս կողմունս ունիցի:

Լուծումն. — Ի Գ կեդրոնէ ձգեսցի $ԳԴ \perp ԱԲ$ և երկայնեսցի մինչև յԵ, որով լարն ԱԲ հատանիցի 'ի Դ (175) և աղեղն ԱԲ 'ի Զ (207. Հետև. Ա): Եթէ ձգեսցի ԱԵ, լինիցի կողմն կանոնաւոր բազմանկեան, որոյ երկպատիկ աւելի կողմունք իցեն (223): Արդ որովհետև ծանօթ է ԱԲ, գտանիցի և ԱԴ, քանզի $ԱԴ = \frac{1}{2}ԱԲ$: Դարձեալ որովհետև ծանօթ է ԱԳ, գտանիցի $\overline{ԳԴ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԱԴ}^2$ (135. Հետև. Գ), այսինքն $ԳԴ = \sqrt{\overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԱԴ}^2}$: Իսկ ԳԴ տայ $ԴԵ = ԳԵ - ԳԴ = ԱԳ - ԳԴ$, հուսկյետոյ ԱԴ և ԴԵ տան $\overline{ԱԵ}^2 = \overline{ԱԴ}^2 + \overline{ԴԵ}^2$, ուստի և $ԱԵ = \sqrt{\overline{ԱԴ}^2 + \overline{ԴԵ}^2}$:

235. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ զկողմն ԱԲ (Ձև 145) կանոնաւոր բազմանկեան ստորագրելոյ 'ի բոլորակի և զշառաւիղն ԱԳ, պարագրել զայնու բոլորակաւ միւս ևս կանոնաւոր բազմանկիւն որ հաւասար կողմունս ունիցի:

Լուծումն. — Ձգեսցին առ Ա և առ Բ շօշափողք, որ հատանիցեն զմիմեանս յԵ, ձգեսցի ԳԵ, որով ԱԲ հատանիցի 'ի Դ, և ԱԵ, ԲԵ են հաւասար կողմունք կանոնաւոր նման բազմանկեանն պարագրելոյ զբոլորակաւ, և $ԱԵ = ԲԵ$ (224): Ուստի ԱԵԲ հաւասարակիցի 'ի ԳԵ գծէ (186. Հետև. Գ), վասն այնորիկ ԳԵ ուղղահայեաց է առ ԱԲ և հատանէ զԱԲ 'ի Դ (81. Հետև. ա): Արդ որովհետև ծանօթ է ԱԲ, գտանիցի և $ԱԴ = \frac{1}{2}ԱԲ$: Իսկ ԱԳ և ԱԴ տան $\overline{ԳԴ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԱԴ}^2$ (135. Հետև. Գ), ուստի և $ԳԴ = \sqrt{\overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԱԴ}^2}$: Դարձեալ որովհետև $ԱԳԴ = ԱԳԵ$, և $ԳԴԱ = ԳԱԵ = Ո$, լինիցի $\triangle ԱԳԴ \sim \triangle ԱԳԵ$ (135), վասն այնորիկ և $ԳԴ : ԳԱ = ԱԴ : ԱԵ$: Արդ որովհետև ծանօթ են առաջին երեք անդամք համեմատութեան, մարթ է նորջ գտանել և զչորրորդն ԱԵ: Հուսկյետոյ երկպատիկ ԱԵ է կողմն խնդրեալ:

236. Առաջարկութիւն. — Գտանել մերձաւորապէս զհամեմատութիւն շրջապատին առ իւր շառաւիղն կամ առ տրամագիծն :

Լուծում. — Ծանուցեալ զշառաւիղն, մարթ է գտանել զկողմն կանոնաւոր վեցանկեան, որ 'ի բոլորակի ստորագրի, որովհետեւ հաւասար է շառաւիղի այնր բոլորակի (220): Արդ օգնականութեամբ (234) համարոյ մարթ է գտանել կարգ ըստ կարգէ զկողմն կանոնաւոր բազմանկեան, որոյ 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144, 12288, 24576, 49152, 98304, 196608, և այլն կողմանք իցեն, և որչափ ինչ մեծագոյն իցէ թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, այնչափ հաշիւն մատչիցի առ ճշմարիտն : Համարեսցուք եթէ ըստ կարգին, զոր յիշատակեցաք, հաշուիցեմք զկողմն կանոնաւոր բազմանկեան, որոյ 196608 կողմանք իցեն, գտանիցի շրջանակն նոյն բազմանկեան, եթէ բազմապատկիցի կողմն նորա 196608 թուով: Առ ճշգիւ գտակաւ հատանել 'ի վերայ, գտցի ըստ (233) համարոյ 'ի ձեռն կողման 196608կողմեան բազմանկեան ստորագրելոյ 'ի բոլորակի կողմն նման բազմանկեան պարագրելոյ զայնու բոլորակաւ, և բազմապատկիցի գտեալ կողմն 196608 թուով, որով գտանիցի շրջանակ բազմանկեան պարագրելոյ զբոլորակաւ: Արդ որովհետեւ բոլորակն 'ի միջին վայրի բազմանկեանցն այնոցիկ կայ, այսինքն ստորագրելոյն և պարագրելոյն զբոլորակաւ, ուրեմն մարթ է առանց ինչ մեծամեծ սխալելոյ գտանել զշրջապատ բոլորակին, եթէ առցուք զմիջին թուաբանական երկուց քանակութեանցն այնոցիկ :

Հետեւանք Ա. — Այսու ճանապարհաւ գտին նախ երկրաչափք զհամեմատութիւն շրջապատին առ տրամագիծն: Բարձրագոյն չափաբերութիւնն ընծայէ կանոնս դիւրինս գիւտի այսր համեմատութեան, զորս չէ տեղւոյս յառաջ բերել, և եդեալ զտրամագիծ բոլորակին =1, տայ զշրջապատ նորին =3·14159265358979323846, . . . : Այս թիւ հասարակաբար անուանեալ կոչի Լուդոլֆեան Թիւ, յանուն Լուդոլփեայ չափաբերի կոլոնիացւոյ, որ նախ քան զամենեսին 'ի լոյս ընծայեցոյց 20 տասնորդական տեղեօք, զոր այլք 'ի չափաբեբից հետզհետէ աւելի քան զ300 տասնորդական տեղիս հաւաքին, և 'ի տարաշս համառօտիւ նշանակի յունական տառիւս π (փի) ։ Ի բաղում դէպս շատ է դնել $\pi = 3 \cdot 1416$ ։

Ծանօթութիւն Բ. — Այլով օրինակաւ դտանի համեմատութիւն տրամագծին առ շրջապատն լինել $= 7 : 22$ (համեմատութիւն Արքիմիդեայ), կամ $113 : 355$ (համեմատութիւն Մետիոսի) ։ Այս ուրեմն եթէ դնիցի տրամագիծն $= 1$, շրջապատն ըստ համեմատութեան Արքիմիդեայ լինիցի $= {}^{22}/_{7} = 3 \cdot 1428 \cdots$, և ըստ համեմատութեան Մետիոսի լինիցի $= {}^{355}/_{113} = 3 \cdot 1415929 \cdots$ ։ Յերկոսին իսկ դէպսն շրջապատն սակաւ ինչ մեծագոյն է. յառաջինն՝ յերրորդ տասնորդական տեղիս, յերկրորդն՝ յեօթներորդ տասնորդական տեղիս ։

237. Առաջարկութիւն. — Եդեալ զշառաւիղն կամ զճառագայթն իրիք բոլորակի $= \text{ճ}$, զտրամագիծն $= \text{տ}$, զշրջապատն $= \text{շ}$ և զտարածութիւն երեսացն $= \text{ե}$, գտանել 'ի ձեռն միոյ միոյ 'ի նոցանէ զայլսն օգնականութեամբ լուդոլփեան Թուոյ ։

Լուծումն. — Յայտ է եթէ

$$\text{տ} = 2\text{ճ}, \tag{1}$$

և

$$\text{ճ} = \frac{\text{տ}}{2} ։ \tag{2}$$

Արդ որովհետև բոլորակք միմեանց նմանք են, տրամագիծքն համեմատականք են շրջապատաց (232. Հետևանք) ։ Բայց եթէ տրամագիծն իցէ $= 1$, շրջապատն լինիցի $= \pi$. հետևաբար $1 : \text{տ} = \pi : \text{շ}$, ուստի և

$$\text{շ} = \text{տ}\pi ։ \tag{3}$$

Եթէ դնիցի $\text{տ} = 2\text{ճ}$, լինիցի

$$\text{շ} = 2\text{ճ}\pi , \tag{4}$$

վասն այնորիկ և

$$\text{տ} = \frac{\text{շ}}{\pi} , \tag{5}$$

և

$$\text{ճ} = \frac{\text{շ}}{2\pi} , \tag{6}$$

Դարձեալ տարածութիւն երեսաց բոլորակի գտանի, եթէ շրջապատ նորին բազմապատկիցի շառաւիղաւ, և արտադրեալն բաժանիցի յ2 (233· Հետև. Ա)· ուստի $է=\frac{ճշ}{2}$ և

կամ $է=\frac{տ}{2}\times\frac{շ}{2}=\frac{տշ}{4}$: Արդ եթէ դնիցի $շ=2ճ\pi=տ\pi$, յայտ է եթէ լինիցի $է=\frac{ճ\cdot 2ճ\pi}{2}$, կամ

$$է=\pi ճ^2, \tag{7}$$

և $է=\frac{տ\cdot տ\pi}{4}$, կամ

$$է=\frac{\pi տ^2}{4}: \tag{8}$$

Իսկ եթէ 'ի բացատրութեանն $է=\frac{ճշ}{2}$ փոխանակիցի $ճ$ ընդ $\frac{շ}{2\pi}$, լինիցի $է=\frac{շ}{2\pi}\times\frac{շ}{2}$, կամ

$$է=\frac{շ^2}{4\pi}, \tag{9}$$

Դարձեալ որովհետև $է=\pi ճ^2$, լինիցի և $ճ^2=\frac{է}{\pi}$, վասն այնորիկ և

$$ճ=\sqrt{\frac{է}{\pi}}: \tag{10}$$

Արդ $տ=2ճ$, ուրեմն

$$տ=2\sqrt{\frac{է}{\pi}}: \tag{11}$$

Հուսկ յետոյ $է=\frac{շ^2}{4\pi}$, ուրեմն $շ^2=4է\pi$, ուստի և

$$շ=2\sqrt{է\pi}: \tag{12}$$

Եւ 'ի մի վայր ժողովելով զայս ամենայն տարազս, տեսանեմք զի է

$$ճ=\frac{տ}{2}=\frac{շ}{2\pi}=\sqrt{\frac{է}{\pi}},$$

$$տ=2ճ=\frac{շ}{\pi}=2\sqrt{\frac{է}{\pi}},$$

$$շ=2\pi ճ=տ\pi=2\sqrt{է\pi}\,,$$

$$է=\pi ճ^2=\frac{\pi տ^2}{4}=\frac{շ^2}{4\pi}:$$

ա. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն շրջապատի իրիք բոլորակի, որոյ տրամագիծն իցէ $4^{մ}$:

Լուծումն. — $շ=տ\pi=4\times3{\cdot}1416=12{\cdot}5664$. այսինքն երկայնութիւն շրջապատին է $12^{մ}{\cdot}5664$:

բ. Օրինակ. — Գտանել զտրամագիծ բոլորակի իրիք, որոյ շրջապատն իցէ $6^{մ}{\cdot}5$:

Լուծումն. — $տ=\frac{շ}{\pi}=\frac{6{\cdot}5}{3{\cdot}1416}=2{\cdot}069$. այսինքն տրամագիծն է $2^{մ}{\cdot}069$, ուստի և շառաւիղն լինիցի $1^{մ}{\cdot}0345$:

գ. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն շրջապատի իրիք բոլորակի, որոյ շառաւիղն իցէ $0^{մ}{\cdot}6$:

Լուծումն. — $շ=2\pi ճ=2\times3{\cdot}1416\times0{\cdot}6=3{\cdot}76992$. այսինքն երկայնութիւն շրջապատին է $3^{մ}{\cdot}77$:

դ. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն ճանապարհին զոր 'ի միում մանրերկրորդի հատանէն մի մի կէտ շրջապատի հասարակածին, որոյ շառաւիղն է $6376984^{մ}$:

Լուծումն. — Մի մի կէտ շրջապատի հասարակածին 'ի 24 ժամս ընթանան $շ=2\pi ճ=2\times3{\cdot}14159268\times6376984=40067772^{մ}$ մերձաւորապէս. ուստի 'ի միում մանրերկրորդի ընթանայցէն $40067772:86400=463^{մ}{\cdot}7$:

ե. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն շրջապատի իրիք բոլորաձև աւազանի, որոյ տրամագիծն իցէ $26^{մ}{\cdot}32$:

զ. Օրինակ. — Գտանել զտրամագիծ բոլորակի իրիք, որոյ շրջապատն իցէ $8^{մ}{\cdot}95$:

է. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց իրիք բոլորակի, որոյ տրամագիծն իցէ $1^{մ}{\cdot}75$:

Լուծումն. — $է=\pi ճ^2=3{\cdot}1416\times1{\cdot}75\times1{\cdot}75=9{\cdot}56115$ այսինքն $9^{ք.մ}{\cdot}5611$:

ը. Օրինակ. — Գտանել զշրջապատ իրիք բոլորակի, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $20^{ք.մ}{\cdot}86$, և տրամագիծն $5^{մ}$:

Լուծումն. — Որովհետև $է=\frac{ճ\cdot շ}{2}$, ուստի $շ=\frac{2է}{ճ}=\frac{2\times20{\cdot}86}{2{\cdot}5}=16{\cdot}688$. այսինքն շրջապատն է $16^{մ}{\cdot}688$:

թ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ իրիք բոլորակի, որոյ շրջապատն իցէ $1'\cdot88496$, և տարածուն երեսացն $0^{+\cdot\prime}\cdot282744$:

Լուծումն. — Որովհետև $\text{է}=\frac{\text{ճ}\cdot\text{շ}}{2}$, ուստի $\text{ճ}=\frac{2\text{է}}{\text{շ}}=\frac{2\times0\cdot282744}{1\cdot88496}=0\cdot3$. այսինքն շառաւիղն է $0'\cdot3$:

ժ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ իրիք բոլորակի, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $6^{+\cdot\prime}$:

Լուծումն. — $\text{ճ}=\sqrt{\frac{\text{է}}{\pi}}=\sqrt{\frac{6}{3\cdot1416}}=1\cdot38$. այսինքն շառաւիղն է $1'\cdot38$:

ժա. Օրինակ, — Գտանել 'ի քառակուսի փարսախս զտարածութիւն երեսաց իրիք բոլորակի, որոյ շրջապատն իցէ հասարակածն:

Լուծումն. — 360 աստիճանք հասարակածի առնեն, 25 առ 1°, 9000 փարսախ. $\text{տ}=\frac{\text{շ}}{\pi}=\frac{9000}{3\cdot14159265}=2864\cdot7890$, ուստի $\text{ճ}=1432\cdot3945$, և $\text{է}=\frac{\text{ճ}\cdot\text{շ}}{2}=\frac{1432\cdot3945\times9000}{2}=6445775$. այսինքն 6445775 քառակուսի փարսախ:

ժբ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց իրիք բոլորակի, որոյ շրջապատն իցէ $5'\cdot28$:

ժգ. Օրինակ. — Գտանել զտրամագիծ իրիք բոլորակի, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $4^{+\cdot\prime}\cdot5687$:

ժդ. Օրինակ. — Գտանել զկողմն քառակուսւոյ, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ հաւասար տարածութեան երեսաց այնպիսի բոլորակի որոյ շառաւիղն իցէ ճ:

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց բոլորակի է $=\pi\text{ճ}^2$, ուստի կողմն քառակուսւոյն լինիցի $=\sqrt{\pi\text{ճ}^2}=\text{ճ}\sqrt{\pi}$, և կամ $=\text{ճ}\sqrt{3\cdot141592653589\cdots}=\text{ճ}\times1\cdot7724538\cdots$: Արդ եթէ շառաւիղն իցէ $10'$, կողմն քառակուսւոյն լինիցի $10'\times1\cdot7724538\cdots$ կամ $17'\cdot724538\cdots$, այսինքն իբր $17'\cdot724$:

238. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ զշառաւիղն իրիք

թուղթակի, գտանել զերկայնութիւն իրեք աղեղան նոյն բոլո-րակի, որ աստիճանք, մանրամասամք և մանրերկրորդիւք բացատրեալ իցէ։

Լուծումն. — Համարեսցուք եթէ թիւ համարոյ աստիճա-նացն իցէ $=\text{բ}$, և երկայնութիւն աղեղանն $=\text{ա}$, յայտ է եթէ

$$\text{ա} : 2\pi\text{ճ} = \text{բ} : 360,$$

ուստի

$$\text{ա} = \frac{\text{բ}\cdot 2\pi\text{ճ}}{360} = \frac{\text{բ}\cdot\pi\text{ճ}}{180} = \frac{\text{բ}}{180}\cdot\pi\text{ճ} :$$

Հետևանք. — Մարթ է տարալուծ տալ զայս ձև օրի-նակի

$$\text{ա} : 2\pi\text{ճ} = \text{բ} : 360,$$

յորմէ

$$\text{ա} : \text{ճ} = \text{բ} : \frac{360}{2\pi},$$

կամ

$$\text{ա} : \text{ճ} = \text{բ} : \frac{180}{\pi},$$

և կամ

$$\text{ա} : \text{ճ} = \text{բ} : \frac{180}{3\cdot 1416},$$

ուստի

$$\text{ա} : \text{ճ} = \text{բ} : 57\cdot 291,$$

ուրեմն

$$\text{ա} = \frac{\text{բ}\cdot\text{ճ}}{57\cdot 291} :$$

ա. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն իրեք աղեղան $38°$ $42'$, որոյ շառաւիղն իցէ $1^{\text{ս}}\cdot 6$:

Լուծումն. — $38°\ 42' = 38°\cdot 7$, ուստի $\text{ա} = \frac{\text{բ}\cdot\text{ճ}}{57\cdot 291} =$

$\frac{38\cdot 7\times 1\cdot 6}{57\cdot 291} = 1\cdot 0807\cdots$ այսինքն երկայնութիւն աղեղանն է $1^{\text{ս}}\cdot 08$:

Բ․ Օրինակ․ — Գտանել զերկայնութիւն իրիք աղեղան 47° 34′ 45″, որոյ շառաւիղն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot 8$ ։

Լուծումն․ — 47° 34′ 45″ $=$ 47° 34′·75 $=$ 47°·57916․

$$\text{ուստի ա} = \frac{\text{բ}\cdot\text{ռ}}{57\cdot291} = \frac{47\cdot57916\times1\cdot8}{57\cdot291} = 1\cdot4948\cdots$$ այսինքն երկայնութիւն աղեղանն է $1^{\text{մ}}\cdot 495$ ։

Գ․ Օրինակ․ — Գտանել զերկայնութիւն իրիք աղեղան 127° 49′, որոյ շառաւիղն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot 3$ ։

Դ․ Օրինակ․ — Գտանել զերկայնութիւն իրիք աղեղան 91° 44′ 15″, որոյ շառաւիղն իցէ $0^{\text{մ}}\cdot 98$ ։

Ե․ Օրինակ․ — Գտանել զերկայնութիւն իրիք աղեղան 18° 26′ 5″, ՚ի վերայ շրջապատի միջօրէական շրջանակի, որոյ տրամագիծն իցէ $0^{\text{մ}}\cdot 92$ ։

239․ Առաջարկութիւն․ — Ծանուցեալ զշառաւիղ իրիք բոլորակի, և զերկայնութիւն իրիք աղեղան այնր բոլորակի, գտանել զթիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, · · · · · աղեղանն այնորիկ ։

Լուծումն․ — Համեմատութիւնն

$$\text{ա} : 2\pi\text{ռ} = \text{բ} : 360,$$

տայ

$$\text{բ} = \frac{\text{ա}\cdot360}{2\pi\text{ռ}} = \frac{\text{ա}\cdot180}{\pi\text{ռ}} = \frac{\text{ա}}{\text{ռ}}\times\frac{180}{\pi},$$

և ըստ վերածեալ համեմատութեան, լինիցի

$$\text{բ} = \frac{\text{ա}}{\text{ռ}}\times57\cdot291 ։$$

Ա․ Օրինակ․ — Գտանել զթիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, · · · իրիք աղեղան, որոյ երկայնութիւնն իցէ $0^{\text{մ}}\cdot 28$ և շառաւիղն $0^{\text{մ}}\cdot 35$ ։

Լուծումն․ — $\text{բ} = \frac{\text{ա}}{\text{ռ}}\times57\cdot291 = \frac{0\cdot28}{0\cdot35}\times57\cdot291 = 45\cdot8365$․ այսինքն 45° 50′ 11″, 4 ։

Բ․ Օրինակ․ — Գտանել զթիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, · · · իրիք աղեղան, որոյ երկայնութիւնն իցէ $1^{\text{մ}}\cdot 7$, և շառաւիղն $0^{\text{մ}}\cdot 9$ ։

Լուծում. — $ր = \frac{ա}{շ} \times 57 \cdot 291 = \frac{1 \cdot 7}{0 \cdot 9} \times 57 \cdot 291 = 108 \cdot 17$ այսինքն $108^{\circ}\ 13'\ 1''$:

գ. Օրինակ. — Գտանել զթիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, ... իրիք աղեղան, որոյ երկայնութիւնն իցէ $1^{ʃ}$, և շառաւիղն $0^{ʃ} \cdot 46$:

Լուծում. — $ր = \frac{ա}{շ} \times 57 \cdot 291 = \frac{1}{0 \cdot 46} \times 57 \cdot 291 = 124 \cdot 5456$. այսինքն $124^{\circ}\ 32'\ 44''$, 16 :

240. Առաջարկութիւն. — Ծանուցեալ զերկայնութիւն իրիք աղեղան և զթիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, ... աղեղանն այնորիկ գտանել զշառաւիղն :

Լուծում. — Համեմատութիւնն

$$ա : 2\pi շ = ր : 360,$$

տայ

$$շ = \frac{ա \cdot 360}{2\pi \cdot ր} = \frac{ա \cdot 180}{\pi \cdot ր} = \frac{ա}{ր} \cdot \frac{180}{\pi},$$

և ըստ վերածեալ համեմատութեան, լինիցի

$$շ = \frac{ա}{ր} \times 57 \cdot 291 :$$

ա. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղն իրիք աղեղան $36^{\circ}\ 45'$, որոյ երկայնութիւնն իցէ $0^{ʃ} \cdot 29$:

Լուծում. — $36^{\circ}\ 45' = 36^{\circ} \cdot 75$, ուստի $շ = \frac{ա}{ր} \times 57 \cdot 291 = \frac{0 \cdot 29}{36 \cdot 75} \times 57 \cdot 291 = 0 \cdot 4521$ ... այսինքն շառաւիղն է $0^{ʃ} \cdot 4521$:

բ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղն իրիք աղեղան $103^{\circ}\ 45'\ 37''$, որոյ երկայնութիւնն իցէ $0^{ʃ} \cdot 86$:

241. Առաջարկութիւն. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց հատուածոյ բոլորակին :

Լուծում. — Յերկրորդ հետեւանաց (235) համարոյ զհետ գայ եթէ տարածութիւն երեսաց հատուածոյ բոլորակին հաւասար է կիսոյ արտադրելոյ իւրոյ աղեղանն և շառաւիղին : Արդ եթէ իցէ երկայնութիւն աղեղան հատուածոյն $= ա$, և համարիցի է տարածութիւն երեսաց նորա, լինիցի

$$\text{է} : \pi \text{ճ}^2 = \text{ա} : 2\pi \text{ճ},$$

ուստի

$$\text{է} = \frac{\text{ա} \cdot \pi \text{ճ}^2}{2\pi \text{ճ}} = \frac{\text{ա} \cdot \text{ճ}}{2} :$$

Հետեւանք. — Եթէ թիւ համարոյ աստիճանաց աղեղանն իցէ $=\text{ի}$, լինի

$$\text{ա} : 2\pi \text{ճ} = \text{ի} : 360,$$

ուստի

$$\text{է} : \pi \text{ճ}^2 = \text{ի} : 360,$$

յորմէ

$$\text{է} = \frac{\text{ի} \cdot \pi \text{ճ}^2}{360} = \frac{\text{ի}}{360} \cdot \pi \text{ճ}^2,$$

ա. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց հատուածոյն երեք բոլորակի, որոյ աղեղանն երկայնութիւն իցէ $2^{\text{մ}} \cdot 6$ և շառաւիղն $1^{\text{մ}} \cdot 8$:

Լուծումն. — $\text{է} = \frac{\text{ա} \cdot \text{ճ}}{2} = \frac{2 \cdot 6 \times 1 \cdot 8}{2} = 2 \cdot 34$. այսինքն տարածութիւն երեսաց հատուածոյն է $2^{\text{ք.մ}} \cdot 34$:

բ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց հատուածոյն երեք բոլորակի, որոյ կեդրոնական անկիւնն իցէ $30^\circ\ 45'$ և շառաւիղն $0^{\text{մ}} \cdot 38$:

Լուծումն. — $30^\circ\ 45' = 30^\circ \cdot 75$, և երկայնութիւն աղեղանն լինի $\text{ա} = \frac{\text{ի} \cdot \text{ճ}}{57 \cdot 291} = \frac{30 \cdot 75 \times 0 \cdot 38}{57 \cdot 291} = 0 \cdot 2039$, և տարածութիւն երեսաց հատուածոյն $\text{է} = \frac{\text{ա} \cdot \text{ճ}}{2} = \frac{0 \cdot 2039 \times 0 \cdot 38}{2} = 0 \cdot 038741$, այսինքն $0^{\text{ք.մ}} \cdot 0387$:

գ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ հատուածոյն երեք բոլորակի, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $0^{\text{ք.մ}} \cdot 085$ և երկայնութիւն աղեղանն $0^{\text{մ}} \cdot 28$:

Լուծումն. — $\text{է} = \frac{\text{ա} \cdot \text{ճ}}{2}$, ապա $\text{ճ} = \frac{2\text{է}}{\text{ա}} = \frac{2 \times 0 \cdot 085}{0 \cdot 28} = 0 \cdot 6071$. այսինքն շառաւիղն է $0^{\text{մ}} \cdot 607$:

դ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց հատուածողի երեք բոլորակի, որոյ կեդրոնական անկիւնն իցէ 45°, և շառաւիղն $0^{\text{մ}}\cdot 5$:

Ե. Օրինակ. — Գտանել զերկայնութիւն աղեղան հատուածողի երեք բոլորակի, որոյ տարածութիւն երեսացն իցէ $0^{\text{ք.մ}}\cdot 18$ և շառաւիղն $0^{\text{մ}}\cdot 25$:

Զ. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց հատուածողի երեք բոլորակի, որոյ կեդրոնական անկիւնն իցէ 120° և շառաւիղն $0^{\text{մ}}\cdot 3$:

242. Առաջարկութիւն. — Գտանել զտարածութիւն հատուածոյ բոլորակի :

Լուծումն. — Տարածութիւն երեսաց հատուածոյ բոլորակի հաւասար է տարբերութեան, եթէ իցէ փոքր քան զկիսաբոլորակ, և բովանդակութեան, եթէ իցէ մեծ քան զկիսաբոլորակ, հատուածողին և հաւասարաբուն եռանկեան նորա :

243. Առաջարկութիւն. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի, որ գտանիցի 'ի միջի շրջապատաց երկուց համակեդրոն բոլորակաց :

Լուծումն. — Իցէ Բ մեծագոյն բոլորակն և Ճ շառաւիղ նորա, բ փոքրագոյն բոլորակն և ճ շառաւիղ նորա, լինիցի Բ$=\pi$Ճ^2 և բ$=\pi$ճ^2, ուստի

$$Բ-բ=\pi Ճ^2-\pi ճ^2=(Ճ^2-ճ^2)\pi :$$

Ա. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի, որ գտանիցի 'ի մէջ շրջապատաց երկուց համակեդրոն բոլորակաց, որոց մեծագոյնն ունիցի տրամագիծ $0^{\text{մ}}\cdot 56$, և փոքրագոյնն $0^{\text{մ}}\cdot 38$:

Լուծումն. — Ճ$=\dfrac{0\cdot 56}{2}=0\cdot 28$, և ճ$=\dfrac{0\cdot 38}{2}=0\cdot 19$, ուստի Ճ$^2=0\cdot 0784$ և ճ$^2=0\cdot 0361$, յորմէ Ճ$^2-$ճ$^2=0\cdot 0423$, ուրեմն Է$=($Ճ$^2-$ճ$^2)\pi=0\cdot 0432\times 3\cdot 1416=0\cdot 13289$. այսինքն խնդրելի տարածութիւնն է $0^{\text{ք.մ}}\cdot 1329$:

Բ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ մեծագոյն բոլորակին, եթէ շառաւիղ փոքրագունին իցէ $0^{\text{մ}}\cdot 25$, և տարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի որ գտանիցի 'ի մէջ համակեդրոն բոլորակաց իցէ $0^{\text{ք.մ}}\cdot 188496$:

Լուծումն. — $Է=(Ճ^2-ճ^2)\pi$, ուր $Ճ=\sqrt{\left(\frac{Է}{\pi}+ճ^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{0\cdot188496}{3\cdot1415}+0\cdot0625\right)}=0\cdot35$. այսինքն շառաւիղ մեծագոյն բոլորակին է $0^{մ}\cdot35$ ։

Գ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ փոքրագոյն բոլորակին, եթէ շառաւիղ մեծագունին իցէ $0^{մ}\cdot42$, և տարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի որ գտանիցի 'ի մէջ համակեդրոն բոլորակաց իցէ $0^{ք.մ}\cdot2245$ ։

Լուծումն. — $Է=(Ճ^2-ճ^2)\pi$, ուր $ճ=\sqrt{\left(Ճ^2-\frac{Է}{\pi}\right)}=\sqrt{\left(0\cdot1724-\frac{0\cdot2245}{3\cdot1416}\right)}=0\cdot31$. այսինքն շառաւիղ փոքրագոյն բոլորակին է $0^{մ}\cdot31$ ։

Դ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղս երկուց համակեդրոն բոլորակաց, եթէ տարածութիւն երեսաց որ գտանիցի 'ի մէջ նոցա իցէ $0^{ք.մ}\cdot1785$ և շառաւիղն մեծագոյն քառապատիկ փոքրագունին ։

Լուծումն. — $Ճ=4ճ$, և $Ճ^2=16ճ^2$, ուստի $Ճ^2-ճ^2=16ճ^2-ճ^2=15ճ^2$, ուրեմն $Է=(Ճ^2-ճ^2)\pi=15ճ^2\times3\cdot1416=0\cdot1785$, յորմէ $ճ^2=0\cdot1785:15\times3\cdot1416=0\cdot0119:3\cdot1416=0\cdot037385\cdots$ և $ճ=\sqrt{0\cdot037385}=0\cdot1933$. Հետևաբար և $Ճ=0\cdot1933\times4=0\cdot7732$. այսինքն փոքրագոյն շառաւիղն է $0^{մ}\cdot1933$, և մեծագոյնն $0^{մ}\cdot7732$ ։

Ե. Օրինակ. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի, որ գտանիցի 'ի մէջ շրջապատաց երկուց համակեդրոն բոլորակաց, որոց մեծագոյնն ունիցի շառաւիղ $0^{մ}\cdot64$ և փոքրագոյնն՝ զկէս շառաւիղի մեծագունին ։

Զ. Օրինակ. — Գտանել զշառաւիղ մեծագոյն բոլորակին, եթէ տրամագիծ փոքրագունին իցէ $0^{մ}\cdot5$, և տարածութիւն երեսաց բոլորաձև պսակի որ գտանիցի 'ի մէջ երկուց համակեդրոն բոլորակաց իցէ $0^{ք.մ}\cdot0389$ ։

244. Առաջարկութիւն. — Գտանել զտարածութիւն երեսաց բոլորաձև սեղանի ։

Լուծում. — *Եթէ Ա մեծագոյն աղեղն և Ճ շառաւիղ նորա. ա փոքրագոյն աղեղն և ճ շառաւիղ նորա, և Բ Թիւ համարոյ աստիճանաց, մանրամասանց, . . . լինիցի բոլորաձև սեպանն*

$$\text{Ս}=\frac{\text{Բ}\pi\text{Ճ}^2}{360}-\frac{\text{Բ}\pi\text{ճ}^2}{360}=\frac{\text{Բ}\pi}{360}(\text{Ճ}^2-\text{ճ}^2),$$

$$=\frac{\text{Բ}\pi}{360}(\text{Ճ}+\text{ճ})(\text{Ճ}-\text{ճ}),$$

$$=\left(\frac{\text{Բ}\pi\text{Ճ}}{360}+\frac{\text{Բ}\pi\text{ճ}}{360}\right)(\text{Ճ}-\text{ճ}):$$

Արդ $\frac{\text{Բ}\pi\text{Ճ}}{360}=\frac{\text{Ա}}{2}$, *և* $\frac{\text{Բ}\pi\text{ճ}}{360}=\frac{\text{ա}}{2}$, *ուստի*

$$\text{Ս}=\frac{1}{2}(\text{Ա}+\text{ա})(\text{Ճ}-\text{ճ}):$$

ՎԱԽՃԱՆ

ՄԱԿԱՐԴԱԿԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ