ՏԱՐՐԵՐՔ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ

Ն° 628

ԿՈՍՏԱՆԴՆՈՒՊՈԼԻՍ

Ի ՏՊԱՐԱՆԻ Ա. ՅԱԿՈԲ ՊՈՅԱՃԵԱՆ

1874

ԳԼԽՈՑ ՑԱՆԿ

ՏԱՐԵՐՔ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ

ԳԻՐՔ Ա․

ՍԿԶԲՈՒՆՔ

Սահմանք ։

1․ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆՆ *այն գիտութիւնն է որ տարածութիւն չափելու վրայ կը խօսի ։*

Տարածութիւնն երեք գլխաւոր ուղղութիւն ունի․ երկայնութիւն, լայնութիւն եւ բարձրութիւն կամ խորութիւն ։

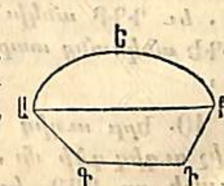
2․ Գիծն *այն է որ երկայնութիւն ունի առանց լայնութեան կամ խորութեան ։*

Գծի մը ծայրերը կէտ *կը կոչուին․ ուստի կէտ մը ոչ երկայնութիւն, ոչ լայնութիւն եւ ոչ խորութիւն, այլ միայն դիրք ունի ։*

3․ Ուղիղ գիծը *երկու կէտերու մէկէն միւսը քաշուած ամենէն փոքր գիծն է ։*

4․ *Ամէն գիծ որ ուղիղ չէ, կամ ուղիղ գծերէ բաղկացեալ չէ,* կոր գիծ *է ։*

Զորօրինակ, ԱԲ ուղիղ գիծ է․ ԱԳԴԲ բեկեալ *գիծ կամ ուղիղ գծերէ բաղկացեալ գիծ է․ եւ ԱԵԲ կոր գիծ է ։*



Գիծ բառը, երբ միայն կը գործածուի, ուղիղ գիծ կը նշանակէ ։

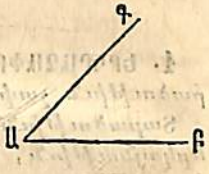
5․ Մակերեւոյթն *այն է որ երկայնութիւն եւ լայնութիւն ունի առանց խորութեան ։*

6. Մակարդակը մակերեւոյթ մ'է որուն վրայ, եթէ որ եւ իցէ երկու կէտերու մէկէն միւսը ուղիղ գիծ մը քաշուի, նոյն գիծը բոլորովին մակերեւութին վրայ պիտի կենայ:

7. Ամէն մակերեւոյթ որ մակարդակ չէ կամ մակարդակներէ բաղկացեալ չէ, կոր մակերեւոյթ կը կոչուի:

8. Հաստատուն մարմին կամ մարմին կը կոչուի այն որ տարածութեան երեք յատկութիւնները, այսինքն՝ երկայնութիւն, լայնութիւն եւ խորութիւն ունի:

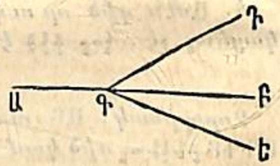
9. Երբ երկու ուղիղ գիծ, ԱԲ եւ ԱԳ, իրարու կը դպչին, անոնց հակումը կամ բացուածքը անկիւն կը կոչուի: Իրարու դպած կէտը, Ա, անկեան գագաթն է. եւ ԱԲ ու ԱԳ գծերը անկեան կողմերն են:



Անկիւնը երբեմն կը նշանակուի գագաթան վրայ գրուած Ա գրով, եւ երբեմն ԲԱԳ կամ ԳԱԲ երեք գրերով, գագաթան վրայ եղած գիրը միշտ մէջտեղը գրուելով:

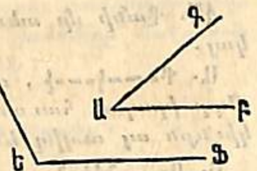
Անկիւնք, բոլոր ուրիշ քանակութեանց նման, կրնան գումարուիլ, հանուիլ, բազմապատկուիլ եւ բաժնուիլ:

Զորօրինակ, ԴԳԵ անկիւնը ԴԳԲ եւ ԲԳԵ անկեանց գումարն է. եւ ԴԳԲ անկիւնը ԴԳԵ եւ ԲԳԵ անկեանց տարբերութիւնն է:

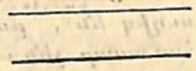


10. Երբ ուղիղ գիծ մը, ԱԲ, ուրիշ ուղիղ գծի մը, ԳԴ, այնպէս կը դպչի որ ԲԱԳ եւ ԲԱԴ առընթերակաց անկիւններն իրարու հաւասար կ'ըլլան, այս անկեանց իւրաքանչիւրը ուղիղ անկիւն կը կոչուի, եւ ԱԲ գիծը ԳԴ գծին ուղղահայեաց է կ'ըսուի:

11. Որեւիցէ անկիւն, ԲԱԳ, որ ուղիղ անկիւնէ փոքրագոյն է, սրանկիւն կը կոչուի, եւ ուղիղ անկիւնէ մեծագոյն եղողը, ԴԵԶ, բութանկիւն:



12. Զուգահեռական կը կոչուին այն երկու գծերը, որք, միեւնոյն մակարդակին վրայ քաշուելով, երբէք իրարու չեն հանդիպիր, որչափ եւ երկարին մէկ կամ միւս կողմը:

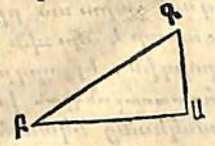


13. Մակարդակ ձեւը ամէն կողմէն ուղիղ կամ կոր գծերով շրջապատեալ մակարդակ մ'է: Երբ գծերն ուղիղ են, շրջապատեալ միջոցը բազմանկիւն կը կոչուի. եւ գծերն ալ, ամէնքը մէկտեղ, բազմանկեան պարագիծը կամ շրջագիծը կը կազմեն:

14. Երեք կողմ ունեցող բազմանկիւնը ամենէն պարզն է ու եռանկիւն կը կոչուի. չորս կողմ ունեցողը՝ քառանկիւն, հնգակողմեանը՝ հնգանկիւն, եւայլն:

15. Հաւասարակողմ եռանկիւնն այն է որուն երեք կողմերն իրարու հաւասար են. Երկկողմնազոյգ եռանկիւնն այն է որուն երկու կողմերն իրարու հաւասար են. եւ անկողմնազոյգ եռանկիւնն այն է որուն երեք կողմերն ալ անհաւասար են:

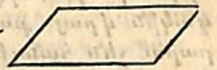
16. Ուղղանկիւն եռանկիւնն այն է որուն մէկ անկիւնը ուղիղ անկիւն մ'է: Ուղիղ անկեան դիմացի կողմը հակուղիղ կը կոչուի: Զորօրինակ, ԱԲԳ եռանկեան մէջ Ա ուղիղ անկեան դիմացի կողմը, ԲԳ, հակուղղին է:



17. Քանի մը տեսակ քառակողմ կայ ·

Ա. Քառակուսի, որուն չորս կողմերը իրարու հաւասար, չորս անկիւնքն ալ ուղիղ են ։

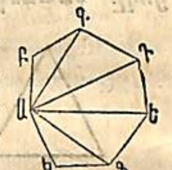
Բ. Ուղղանկիւն, որուն անկիւններն ուղիղ են, բայց կողմերն իրարու հաւասար չեն ։



Գ. Զուգահեռագիծ, որուն ընդդիմակաց կողմերը զուգահեռական են ։

Դ. Տարանկիւն, որուն կողմերն իրարու հաւասար են բայց անկիւններն ուղիղ չեն ։

Ե. Տրապէզոյդ, որուն միայն երկու կողմերը զուգահեռական են ։



18. Տրամանկիւնը երկու ընդդիմակաց անկեանց գագաթներն իրարու հետ միացընող գիծն է ։ Զորօրինակ, ԱԳ, ԱԴ, ԱԵ, ԱՖ տրամանկիւն են ։

19. Հաւասարակողմ կը կոչուի այն բազմանկիւնը որուն բոլոր կողմերն իրարու հաւասար են · եւ հաւասարանկիւն կը կոչուի այն՝ որուն բոլոր անկիւններն իրարու հաւասար են ։

20. Երկու բազմանկիւնք փոխադարձաբար հաւասարակողմ կը կոչուին, երբ, անոնց կողմերը միեւնոյն կարգաւ շարուած ըլլալով, մէկուն առաջին կողմը հաւասար է միւսին առաջին կողման, երկրորդը՝ երկրորդին, երրորդը՝ երրորդին, եւայլն ։ Փոխադարձաբար հաւասարանկիւն խօսքն ալ նոյն նշանակութիւնն ունի անկեանց նկատմամբ ։

Երկու պարագայից մէջ ալ՝ իրարու հաւասար կողմերը կամ իրարու հաւասար անկիւնները համանուն կողմեր կամ անկիւններ կը կոչուին ։

Սահմանք Երկրաչափական Բառից ։

1. Առածը ինքնայայտ ճշմարտութիւն մ'է ։
2. Հայեցողութիւնը ճշմարտութիւն մ'է, որ ապացուցութիւն կոչուած տրամաբանական ընթացքով մը ի յայտ կու գայ ։
3. Խնդիրը լուծուելու առաջարկութիւն մ'է ։
4. Առումը այն է որ հայեցողութիւն մը ապացուցանելու կամ խնդիր մը լուծելու կ'օգնէ ։
5. Նախադասութիւն ընդհանուր անունը՝ հայեցողութեանց, խնդրոց եւ առմանց անխտիր կը տրուի ։
6. Հետեւութիւնը մէկ կամ քանի մը նախադասութիւններէ հանուած ակներեւ ճշմարտութիւն մ'է ։
7. Պարապումը մէկ կամ քանի մը նախընթաց նախադասութեանց վրայ եղած ծանօթութիւնն է, որ կը ծառայէ անոնց կապակցութիւնը, գործածութիւնը, սահմանը կամ ընդարձակութիւնը ցուցընելու ։
8. Ենթադրութիւնը նախադասութիւն մը արտայայտելու կամ ապացուցութիւն մը ընելու ատեն բան մը դնել, այսինքն՝ այսպէս կամ այնպէս համարիլն է ։

Բացատրութեան գործածելի նշանաց ։

1. Հաւասարութիւն ցուցընելու համար սա նշանը = կը գործածուի · զորօրինակ, Ա = Բ, ըսել է Աը Բ ին հաւասար է ։
2. Երբ հարկ կ'ըլլայ ցուցընել թէ Ա ը Բ էն փոքր է, այսպէս կը գրուի, Ա < Բ · իսկ եթէ հետեւեալ կերպով գրուելու ըլլայ, Ա > Բ, կը նշանակէ թէ Ա ը Բ էն մեծ է ։ Փոքր թիւը միշտ նշանին գագաթան կողմը կը գրուի ։
3. Գումարման նշանն է +, որ աւելի կը կոչուի ։
4. Հանման նշանն է —, որ նուազ կը կոչուի · զոր-

օրինակ, Ա + Բ կը ցուցնէ Ա ին եւ Բ ին գումարը · Ա — Բ կը ցուցնէ Ա ին եւ Բ ին տարբերութիւնը կամ Ա ին մնացորդը, երբ Բ ը անկէ կը հանուի · Ա — Բ + Գ կամ Ա + Գ — Բ կը ցուցնէ թէ Ա ը եւ Գ ը գումարելու եւ այն գումարէն Բ ը հանելու է ։

5· Բազմապատկութեան նշանն է × · զորօրինակ, Ա × Բ՝ Ա ին եւ Բ ին արտադրեալը կը ցուցնէ ։ Բազմապատկութեան նշանին տեղը երբեմն միջակէտ մը կը դրուի · զորօրինակ, Ա · Բ եւ Ա × Բ նոյն բանն ըսել է ։

Ա × (Բ + Գ — Դ) Ա ին եւ Բ + Գ — Դ քանակութեան արտադրեալը կը ցուցնէ ։ Եթէ հարկ ըլլար Ա + Բ ը Ա — Բ + Գ ով բազմապատկել, արտադրեալը ցուցնելու համար այսպէս պիտի գրուէր (Ա + Բ) × (Ա — Բ + Գ), փակագծի մէջ եղածներուն բոլորը մէկ քանակութիւն համարելով ։

Եթէ թուանշան մը գծէ մը կամ քանակութենէ մը առաջ դրուի, այն գծին կամ այն քանակութեան բազմապատկիչը կը համարուի · զորօրինակ, 3ԱԲ՝ ԱԲ գծին երեք անգամը կը ցուցնէ, եւ $\frac{1}{2}$Ա՝ Ա անկեան կէսը կը նշանակէ ։

6· $\overline{ԱԲ}^2$ կը ցուցնէ ԱԲ գծին քառակուսին · $\overline{ԱԲ}^3$՝ անոր խորանարդը ։ Գծի մը քառակուսին կամ խորանարդն ինչ ըսել է նաքը պիտի բացատրուի ։

7· Արմատական նշանն է $\sqrt{\ }$ · զորօրինակ, $\sqrt{2}$ կը ցուցնէ 2 ին քառակուսի արմատը · $\sqrt{Ա \times Բ}$՝ Ա ին եւ Բ ին արտադրեալին քառակուսի արմատը ։

Առածք ։

1· Միեւնոյն իրին հաւասար եղողները իրարու հաւասար են ։

2· Եթէ հաւասարներու հետ հաւասարներ գումարուին, գումարները հաւասար պիտի ըլլան ։

3· Եթէ հաւասարներէ հաւասարներ հանուին, մնացորդները հաւասար պիտի ըլլան ։

4· Եթէ անհաւասարներու հետ հաւասարներ գումարուին, գումարներն անհաւասար պիտի ըլլան ։

5· Եթէ անհաւասարներէ հաւասարներ հանուին, մնացորդքն անհաւասար պիտի ըլլան ։

6· Միեւնոյն իրին կրկինը եղողներն իրարու հաւասար են ։

7· Միեւնոյն իրին կէսն եղողները իրարու հաւասար են ։

8· Ամբողջն իր մասերուն որեւէ մէկէն մեծ է ։

9· Ամբողջն իր բոլոր մասանցը գումարին հաւասար է ։

10· Բոլոր ուղիղ անկիւնք իրարու հաւասար են ։

11· Մէկ կէտէ ուրիշ կէտ մը միայն մէկ ուղիղ գիծ կրնայ քաշուիլ ։

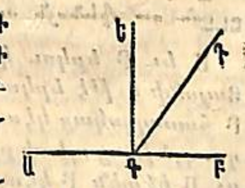
12· Կէտի մը վրայէ կրնայ քաշուիլ միայն մէկ ուղիղ գիծ որ ուրիշ գծի մը զուգահեռական ըլլայ ։

13· Այն մեծութիւնք որ իրարու վրայ դրուելով իրենց բոլոր տարածութեանը մէջ մէկմէկու կը յարմարին, իրարու հաւասար են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու ուղիղ գիծ իրարու դպչին, երկու առընթերակայ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար պիտի ըլլայ ։

Եթէ ԴԳ եւ ԱԲ ուղիղ գծերը Գ կէտին վրայ իրարու դպչին, ԱԳԴ եւ ԴԳԲ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար պիտի ըլլայ ։



Գ կէտին վրայ ԱԲ գծին ուղղահայեաց քաշէ ԳԵ ։ ԱԳԴ եւ ԴԳԲ անկեանց գումարը ԱԳԵ եւ ԵԳԲ անկեանց գումարին հաւասար է (Առ. 13) ։ Բայց, որովհետեւ ԱԳԵ եւ ԵԳԲ երկու ուղիղ անկիւն են, ԱԳԴ եւ ԴԳԲ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է ։

Հետ · 1· Եթէ ԱԳԴ եւ ԴԳԲ անկեանց մէկը ուղիղ է, անշուշտ միւսն ալ ուղիղ է ։

Հետ. 2. Եթէ ԴԵ գիծը ԱԲ ին ուղղահայեաց է, ԱԲ գիծն ալ ԴԵ ին ուղղահայեաց է։

Քանզի, որովհետեւ ԴԵ գիծը ԱԲ ին ուղղահայեաց է, ԱԳԴ անկիւնը իր առընթերակաց ԴԳԲ անկեան հաւասար է եւ երկուքն ալ ուղիղ անկիւն են (Սահ. 10)։ *Բայց, որովհետեւ ԱԳԴ ուղիղ անկիւն է իր առընթերակաց ԱԳԵ անկիւնն ալ ուղիղ է* (*Հետ.* 1)։ *Ուրեմն ԱԳԴ անկիւնը ԱԳԵ անկեան հաւասար է* (*Առ.* 10)*. եւ ԱԲ՝ ԴԵ ին ուղղահայեաց է։*

Հետ. 3. ԲՑ ուղիղ գծին մէկ կողման վրայ կազմուած բոլոր անկիւնները, ինչպէս ԲԱԳ, ԳԱԴ, ԴԱԵ, ԵԱՑ, ամէնքը մէկտեղ երկու ուղիղ անկեանց հաւասար են. քանզի անոնց ամենուն գումարը երկու առընթերակաց, ԲԱԳ եւ ԳԱՑ, անկեանց գումարին հաւասար է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու ուղիղ գիծ միեւնոյն երկու կէտերու վրայէն անցնին, անոնք, որչափ որ երկննան, զուգընթաց պէտք ըլլան ու միեւնոյն ուղիղ գիծը կազմեն։

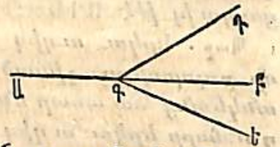
Ա եւ Բ երկու կէտերն ըլլան։ Յայտնի է թէ երկու գծերը, Ա եւ Բ հասարակաց կէտերու մէջտեղ, զուգընթաց պիտի ըլլան, ապա թէ ոչ Ա կէտէն Բ կէտը երկու ուղիղ գիծ կրնան քաշուիլ որ անկարելի է (*Առ.* 11)։ *Բայց դիցուք թէ այն գծերն երկընալով Գ կէտին վրայ իրարմէ բաժնուին եւ մէկը ԳԴ ըլլայ, միւսը ԳԵ։ Գ կէտէն ԳՑ գիծը անանկ քաշէ որ ԱԳՑ ուղիղ անկիւն ըլլայ։ Արդ, որովհետեւ ԱԳԴ ուղիղ գիծ է, ՑԳԴ ալ ուղիղ անկիւն է* (*Նախ. Ա. Հետ.* 1)*. եւ, որովհետեւ ԱԳԵ ուղիղ գիծ է, ՑԳԵ ալ*

ուղիղ անկիւն է։ Ուրեմն ՑԳԴ անկիւնը հաւասար է ՑԳԵ անկեան (*Առ.* 10)*, որ միայն անատեն կրնայ ըլլալ երբ ԳԴ եւ ԳԵ զուգընթաց են։ Ուստի այն ուղիղ գծերը, որոնց Ա եւ Բ կէտերն հասարակաց են, երբ կ՚երկննան, չեն կրնար իրարմէ բաժնուիլ, այլ միեւնոյն ուղիղ գիծը կը կազմեն։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ ուղիղ գիծ մը ուրիշ երկու ուղիղ գծի դպչի հասարակաց եզր կէտի մը վրայ, անանկ որ երկու առընթերակաց անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլայ, այն գծերը միեւնոյն ուղիղ գիծը պէտք կազմեն։

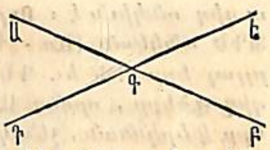
Եթէ ԳԴ գիծը ԱԳ եւ ԳԲ գծերուն դպչի, Գ հասարակաց կէտին վրայ, անանկ որ ԴԳԱ ու ԴԳԲ առընթերակաց անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլայ, անատեն ԳԲ գիծը ԱԳ ին շարունակութիւնը պիտի ըլլայ, կամ ԱԳ եւ ԳԲ միեւնոյն ուղիղ գիծը պիտի կազմեն։



Քանզի, եթէ ԳԲ գիծը ԱԳ ին շարունակութիւնը չէ, թող ԳԵ ըլլայ անոր շարունակութիւնը. անատեն, ԱԳԵ գիծն ուղիղ ըլլալով, ԱԳԴ եւ ԴԳԵ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է (*Նախ. Ա.*)։ *Սակայն ենթադրուեցաւ թէ ԱԳԴ եւ ԴԳԲ անկեանց գումարն ալ երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է. ուրեմն* ԱԳԴ+ԴԳԵ=ԱԳԴ+ԴԳԲ։ *Աս հաւասարութեան երկու անդամներէն ԱԳԴ հասարակաց անկիւնը հանուելով, կը մնայ ԴԳԵ=ԴԳԲ, որ անկարելի է* (*Առ.* 8)։ *Ուրեմն ԱԳ եւ ԳԲ միեւնոյն ուղիղ գիծը կը կազմեն։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու ուղիղ գիծ իրար կը կտրեն, անոնց ըրած գագաթնային անկիւնները միմեանց հաւասար են։



Հաս ԱԲ և ԴԵ ուղիղ գծերը Գ կէտին վրայ իրար կը կտրեն. ԵԳԲ անկիւնը ԱԳԴ անկեան, ԱԳԵ անկիւնն ալ ԴԳԲ անկեան հաւասար է:

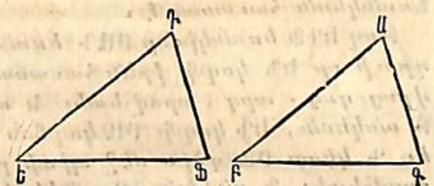
Քանզի, որովհետև ԱԳ ուղիղ գիծը ԴԵ ուղիղ գծին կը դպչի, ԱԳԵ և ԱԳԴ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է (Նախ. Ա.), և, որովհետև ԵԳ ուղիղ գիծը ԱԲ ուղիղ գծին կը դպչի, ԱԳԵ և ԵԳԲ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է. ուրեմն ԱԳԵ+ԱԳԴ=ԱԳԵ+ԵԳԲ (Առ. 1): Արդ, եթէ ԱԳԵ հասարակաց անկիւնը երկուքէն հանուի, կը մնայ ԱԳԴ անկիւնը իր ԵԳԲ գագաթման անկեանը հաւասար (Առ. 3): Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԱԳԵ=ԴԳԲ:

Պոր. Երկու ուղիղ գծից, մէկզմէկ կտրելով, կէտի մը բոլորտիքը չինած չորս անկիւնները չորս ուղիղ անկեանց հաւասար են. քանզի ԱԳԵ և ԵԳԲ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլալով, և ԱԳԴ և ԴԳԲ անկեանց գումարն ալ երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլալով, չորս անկեանց գումարը չորս ուղիղ անկեանց հաւասար է:

Եւ, առ հասարակ, եթէ քանի մը ուղիղ գիծ, զորօրինակ ԳԱ, ԳԲ, ԳԴ ևայլն, Գ կէտին վրայ մէկմէկու դպչին, ատոնց չինած բոլոր անկեանց գումարը, ինչպէս ԱԳԲ+ԲԳԴ+ԴԳԵ+ԵԳՑ+ՑԳԱ, չորս ուղիղ անկեանց հաւասար պիտի ըլլայ. քանզի եթէ երկու մէկմէկու ուղղահայեաց գիծ, Գ կէտին բոլորտիքը, չորս ուղիղ անկիւն չինեն, ճիշդ նոյն միջոցը պիտի գրաւեն, որ ԱԳԲ, ԲԳԴ, ԴԳԵ, ԵԳՑ և ՑԳԱ անկիւնները գրաւած են:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու եռանկեանց մէկուն երկու կողմերը և անոնց կազմած անկիւնը միւսին երկու կողմանցն ու անոնց կազմած անկեան հաւասար են, եռանկիւններն ալ իրարու հաւասար են:



Եթէ ԵԴՑ և ԲԱԳ եռանկեանց մէկուն ԵԴ կողմը միւսին ԲԱ կողման, ԴՑ կողմը ԱԳ կողման և Դ անկիւնը Ա անկեան հաւասար է, ԵԴՑ եռանկիւնն ալ ԲԱԳ եռանկեան հաւասար է:

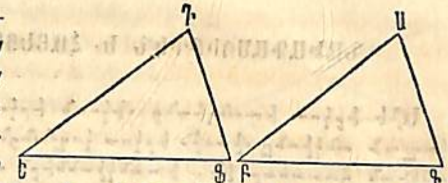
Թող ԵԴՑ եռանկիւնը ԲԱԳ եռանկեան վրայ անանկ դրուի որ Ե կէտը Բ կէտին վրայ գայ, և ԵԴ կողմը անոր հաւասար եղող ԲԱ կողման վրայ. արդ, որովհետև Դ անկիւնը Ա անկեան հաւասար է, ԴՑ կողմը ԱԳ կողման վրայ պիտի երթայ. և, որովհետև ԴՑ=ԱԳ, Ց կէտը Գ կէտին վրայ պիտի գայ, և երրորդ կողմերը, ԵՑ և ԲԳ, զուգընթաց պիտի ըլլան (Առ. 11). ուրեմն ԵԴՑ եռանկիւնը ԲԱԳ եռանկեան հաւասար է (Առ. 13):

Հետ. Երբ երկու եռանկեանց սա երեք բաները իրարու հաւասար են, այսինքն ԵԴ=ԲԱ կողման, ԴՑ=ԱԳ կողման և Դ=Ա անկեան, մնացած երեք բաներն ալ իրարու հաւասար են, այսինքն ԵՑ=ԲԳ կողման, Ե=Բ անկեան և Ց=Գ անկեան:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու եռանկեանց մէկուն երկու անկիւնները և անոնց մէջտեղի կողմը միւսին երկու անկիւններուն և անոնց մէջտեղի կողման հաւասար են, եռանկիւններն ալ իրարու հաւասար են:

Եթէ ԵԴԶ եւ ԲԱԳ եռանկեանց մէկուն Ե անկիւնը միւսին Բ անկեան, Զ անկիւնը Գ անկեան եւ ԵԶ կողմը ԲԳ կողման հաւասար է, ԵԴԶ եռանկիւնն ալ ԲԱԳ եռանկեան հաւասար է :



Թող ԵԴԶ եռանկիւնը ԲԱԳ եռանկեան վրայ անանկ դրուի որ ԵԶ կողմը իրեն հաւասար եղող ԲԳ կողման վրայ գայ · արդ, որովհետեւ Ե անկիւնը հաւասար է Բ անկեան, ԵԴ կողմը ԲԱ կողման վրայ պիտի երթայ, եւ Դ կէտը ԲԱ գծին մէջ պիտի ըլլայ · նմանապէս, որովհետեւ Զ անկիւնը Գ անկեան հաւասար է, ԶԴ կողմն ալ ԳԱ կողման վրայ պիտի երթայ, եւ Դ կէտը ԳԱ գծին մէջ պիտի ըլլայ · ուստի Դ կէտը միեւնոյն ատեն ԲԱ ու ԳԱ երկու ուղիղ գծերուն մէջն ալ ըլլալով, անոնց մէկզմէկ կտրող Ա կէտին վրայ պիտի ըլլայ · ուրեմն ԵԴԶ եւ ԲԱԳ եռանկիւնները իրարու յարմար եւ հետեւապէս հաւասար են (Առ. 13) :

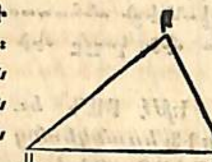
Հետ. Երբ երկու եռանկեանց սա երեք բաներն իրարու հաւասար են, այսինքն՝ Ե=Բ անկեան, Զ=Գ անկեան եւ ԵԶ=ԲԳ միջանկեալ կողման, մնացած երեք բաներն ալ իրարու հաւասար են, այսինքն՝ Դ=Ա անկեան, ԵԴ=ԲԱ կողման եւ ԴԶ=ԱԳ կողման :

Պար. Երկու եռանկիւն որ մէկմէկու վրայ դրուելով կատարելապէս իրար կը գոցեն, հաւասար են (Առ. 13): Ուստի հաւասար եռանկիւններ փոխադարձաբար հաւասարակողմ եւ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են (Սահ. 20) : Աս նախադասութեան հակադարձն ալ ճշմարիտ է, այսինքն՝ թէ երկու եռանկիւն որ փոխադարձաբար հաւասարակողմ եւ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, իրարու հաւասար են :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը որեւէ երկ[illegible] երրորդ կողմէն մեծ է :

ԱԲԳ եռանկեան մէջ, ԱԲ եւ ԲԳ կողմանց գումարը ԱԳ կողմէն մեծ է: Քանզի ԱԳ ուղիղ գիծը Ա կէտէն Գ կէտը քաշուած ամենէն փոքր գիծն է (Սահմ. 3) · ուստի ԱԲ+ԲԳ՝ ԱԳ էն մեծ է :



Հետ. Եթէ ԱԳ < ԱԲ+ԲԳ անհաւասարութեան երկու անդամներէն հանուի կողմանց մէկը, ինչպէս ԲԳ, անհաւասարութիւնը կ'ըլլայ ԱԳ—ԲԳ < ԱԲ. այսինքն՝ **եռանկեան մը երկու կողմանց տարբերութիւնը երրորդ կողմէն փոքր է :**

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ եռանկեան մը մէջ կէտէ մը երկու ուղիղ գիծ տարուին եռանկեան որեւէ մէկ կողմին ծայրերուն, այս գիծերուն գումարը եռանկեան միւս երկու կողմանց գումարէն փոքր պիտի ըլլայ :

Եթէ ԲԱԳ եռանկեան մէջ Օ կէտէն ՕԲ եւ ՕԳ ուղիղ գծերը քաշուին ԲԳ կողման ծայրերուն, ԲՕ+ՕԳ փոքր պիտի ըլլայ ԲԱ+ԱԳ էն :

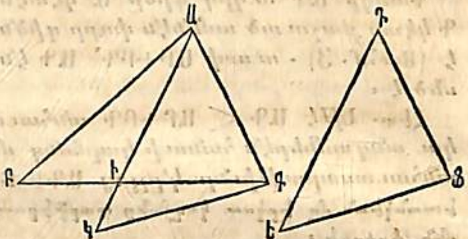
Թող ԲՕ գիծը շարունակուի մինչեւ դպչի ԱԳ կողման Դ կէտին վրայ · անատեն ՕԳ < ՕԴ+ԴԳ (Նախ. Է.), կամ, ԲՕ գումարելով երկու անդամներուն վրայ, ԲՕ+ՕԳ < ԲՕ+ՕԴ+ԴԳ (Առ. 4), կամ ԲՕ+ՕԳ < ԲԴ+ԴԳ :

Դարձեալ, ԲԴ < ԲԱ+ԱԴ, կամ, ԴԳ գումարելով, ԲԴ+ԴԳ < ԲԱ+ԱԳ: Բայց արդէն տեսնուեցաւ որ ԲՕ+ՕԳ < ԲԴ+ԴԳ, ուստի աւելի եւս, ԲՕ+ՕԳ < ԲԱ+ԱԳ :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու եռանկիւնց մէկուն երկու կողմերը միւսին երկու կողմերուն հետ հաւասար են, եւ անոնց կազմած անկիւններն անհաւասար, երրորդ կողմերն ալ անհաւասար են, եւ մեծ կողմը մեծ անկիւն ունեցող եռանկիւնինն է։

Եթէ ԲԱԳ եւ ԵԴԶ եռանկեանց մէջ ԱԲ=ԴԵ կողման եւ ԱԳ=ԴԶ կողման, եւ Ա > Դ անկիւնէն, ԲԳ ալ մեծ է ԵԶ կողմէն։

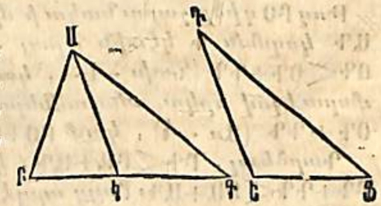


ԴԵ գծին հաւասար ԱԿ գիծը քաշէ, ԿԱԳ անկիւնը ԵԴԶ անկեան հաւասար ըլլալով՝ ԿԱԳ եռանկիւնը ԵԴԶ եռանկեան հաւասար է (Նախ. Ե.)․ ուստի ԿԳ=ԵԶ կողման։

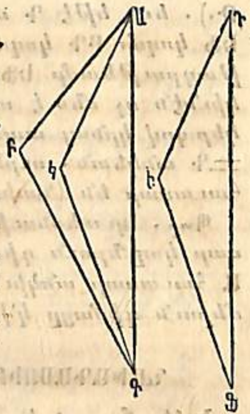
Աս նախադասութիւնը սա երեք կերպով կ'ապացուցուի։

Ա. Երբ Կ կէտը ԱԲԳ եռանկեան դուրսը կ'իյնայ։ ԿԳ<ԿԻ+ԻԳ (Նախ. Է.), եւ ԱԲ<ԱԻ+ԻԲ, ուստի ԿԳ+ԱԲ<ԿԻ+ԱԻ+ԻԳ+ԻԲ, կամ ԿԳ+ԱԲ<ԱԿ+ԲԳ։ Հանէ ԱԲ մէկ կողմէն եւ անոր հաւասար եղող ԱԿ միւս կողմէն, եւ կը մնայ ԿԳ<ԲԳ (Առ. 5)․ արդ ԿԳ=ԵԶ, ուստի ԲԳ>ԵԶ։

Բ. Երբ Կ կէտը ԲԳ կողման վրայ կ'իյնայ։ Յայտնի է թէ ԿԳ, կամ անոր հաւասարը ԵԶ, ԲԳ էն փոքր է (Առ. 8)։



Գ. Երբ Կ կէտը ԲԱԳ եռանկեան մէջ կ'իյնայ։ ԱԿ+ԿԳ<ԱԲ+ԲԳ (Նախ. Ը.)․ եւ ԱԿ մէկ կողմէն եւ անոր հաւասարը ԱԲ միւս կողմէն հանելով, կը մնայ ԿԳ < ԲԳ, կամ ԲԳ >ԵԶ։



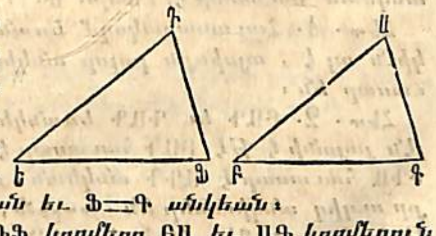
Պար. Հակադարձաբար, եթէ ԲԱԳ եւ ԵԴԶ եռանկեանց մէկուն ԲԱ եւ ԱԳ կողմերը միւսին ԵԴ եւ ԴԶ կողմանցը հաւասար են, բայց առաջնոյն ԲԳ կողմը երկրորդին ԵԶ կողմէն մեծ է, առաջնոյն ԲԱԳ անկիւնն ալ երկրորդին ԵԴԶ անկիւնէն մեծ է։

Քանզի, եթէ ԲԱԳ անկիւնը ԵԴԶ անկիւնէն մեծ չէ, կամ անոր հաւասար է եւ կամ անկէ փոքր։ Եթէ հաւասար է՝ ԲԳ կողմը ԵԶ ին հաւասար է (Նախ. Ե. Հետ.)․ եթէ փոքր է, ԲԳ փոքր է ԵԶ էն․ բայց աս երկուքն ալ մեր ենթադրութեանը հակառակ են, ուրեմն ԲԱԳ >ԵԴԶ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու եռանկիւններ փոխադարձաբար հաւասարակողմ են, անոնք փոխադարձաբար հաւասարանկիւն ալ են եւ իրարու հաւասար։

Եթէ ԵԴԶ եւ ԲԱԳ երկու եռանկեանց ԵԴ=ԲԱ կողման, ԵԶ=ԲԳ կողման եւ ԴԶ=ԱԳ կողման, ուրեմն Դ = Ա անկեան, Ե=Բ անկեան եւ Զ=Գ անկեան։



Քանզի, ԵԴ եւ ԴԶ կողմերը ԲԱ եւ ԱԳ կողմերուն հաւասար ըլլալով, եթէ Դ անկիւնը Ա անկիւնէն մեծ ըլլար, ԵԶ կողմը ԲԳ կողմէն մեծ պիտի ըլլար (Նախ.

Թ.). Եւ, եթէ Դ անկիւնը Ա անկիւնէն փոքր ըլլար, ԵԶ կողմը ԲԳ կողմէն փոքր պիտի ըլլար. սակայն ենթադրութեամբ ԵԶ=ԲԳ, ուրեմն Դ անկիւնը Ա անկիւնէն ոչ մեծ է ոչ փոքր այլ անոր հաւասար է։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ Ե=Բ անկեան եւ Զ=Գ անկեան. ուրեմն երկու եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Զ. Պար.)։

Պար. Կը տեսնուի թէ հաւասար անկիւնները հաւասար կողմերուն դիմացը կ'ըլլան. զորօրինակ, Դ եւ Ա հաւասար անկիւնները ԵԶ եւ ԲԳ հաւասար կողմերուն դիմացը կ'ըլլան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկկողմնազոյգ եռանկիւն մը հաւասար կողմերուն դիմացի անկիւնները իրարու հաւասար են։

ԲԱԳ *երկկողմնազոյգ եռանկեան* ԲԱ *եւ* ԱԳ *հաւասար կողմերուն դիմացի անկիւնները,* Բ *եւ* Գ, *իրարու հաւասար են։*

Ա *գագաթէն* ԱԴ *գիծը քաշէ,* ԲԳ *խարիսխը* Դ *կէտին վրայ երկու հաւասար մասանց բաժնելով.* ԲԱԴ *եւ* ԴԱԳ *փոխադարձաբար հաւասարակողմ եռանկիւններ են. քանզի ենթադրութեամբ* ԲԱ=ԱԳ, ԱԴ *երկուքին հասարակաց է, եւ* ԲԴ *հաւասար շինուած է* ԴԳ *ին. ուստի* Բ *անկիւնը* Գ *անկեան հաւասար է (Նախ. Ժ.)։*

Հետ. 1. Հաւասարակողմ եռանկիւնը հաւասարանկիւն ալ է, այսինքն բոլոր անկիւններն իրարու հաւասար են։

Հետ. 2. ԲԱԴ *եւ* ԴԱԳ *եռանկեանց հաւասար ըլլալէն յայտնի է թէ* ԲԱԴ *հաւասար է* ԴԱԳ *անկեան եւ* ԲԴԱ *հաւասար է* ԱԴԳ *անկեան. ուստի վերջի երկուքը ուղիղ անկիւններ են.* ուրեմն, երկկողմնազոյգ եռանկիւն մը գագաթէն մինչև խարիսխին միջին կէտը քաշուած գիծը գագաթնանկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ և խարիսխին ուղղահայեաց է։

Պար. Երկկողմնազոյգ չեղող եռանկեան մը ուեւիցէ մէկ կողմը խարիսխ կրնայ համարուիլ, եւ անոր դիմացի անկիւնը գագաթ կ'ըլլայ։ Բայց երկկողմնազոյգ եռանկեան մը ընդհանրապէս այն կողմը խարիսխ կը համարուի, որ միւս երկու կողմանց մէկուն հաւասար չէ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ եռանկիւն մը երկու անկիւններն իրարու հաւասար են, անոնց դիմացի կողմերն ալ իրարու հաւասար են, և եռանկիւնը երկկողմնազոյգ է։

Եթէ ԱԲԳ *եռանկեան մէջ* Բ *անկիւնը հաւասար է* Գ *անկեան,* ԱԳ *կողմն ալ հաւասար է* ԱԲ *կողման։*

Քանզի, եթէ աս երկու կողմերն իրարու հաւասար չեն, ենթադրենք թէ ԱԲ *մեծ է։ Կտրէ* ԱԲ *էն* ԲԴ *մասը* ԱԳ *ին հաւասար, եւ* ԴԳ *քաշէ։ Արդ,* ԲԴԳ *եւ* ԲԱԳ *եռանկեանց մէջ* ԲԴ *հաւասար շինուած է* ԱԳ *ին.* Բ *անկիւնը ենթադրութեամբ հաւասար է* ԱԳԲ *անկեան. եւ* ԲԳ *կողմը հասարակաց է. ուրեմն երկու եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Ե.)։ Սակայն մասը ամբողջին հաւասար չի կրնար ըլլալ (Առ. 8). ուստի* ԲԱ *եւ* ԱԳ *կողմերն անհաւասար չեն, եւ* ԲԱԳ *եռանկիւնը երկկողմնազոյգ է։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն եռանկեան մեծ կողմը մեծ անկեան դէմը կ'ըլլայ, և հակադարձաբար մեծ անկիւնը մեծ կողման դէմը։

Ա. *Եթէ* ԱԲԳ *եռանկեան մէջ* Գ *անկիւնը մեծ է* Բ *անկիւնէն,* Գ *անկեան դիմացի* ԱԲ *կողմը՝* Բ *անկեան դիմացի* ԱԳ *կողմէն մեծ է։* ԳԴ *գիծը քաշէ,* ԲԳԴ *անկիւնը* Բ *անկեան հաւասար ընելով։* ԳԴԲ *եռանկեան մէջ* ԳԴ *հաւասար է* ԲԴ *կողման (Նախ.*

ԺԲ.)։ Արդ, ԱԳ<ԱԴ+ԳԴ. բայց ԱԴ+ԳԴ=ԱԴ+ԴԲ =ԱԲ. ուրեմն ԱԳ<ԱԲ։

Բ. Եթէ ԱԲ>ԱԳ, ԱԲ կողման դիմացի Գ անկիւնն ալ ԱԳ կողման դիմացի Բ անկիւնէն մեծ է։

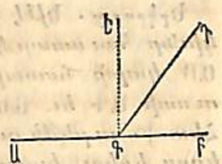
Քանզի, եթէ Գ<Բ, վերը ապացուցածէն կը հետեւի թէ ԱԲ<ԱԳ, որ հակառակ է ենթադրութեան։ Եթէ Գ=Բ անկեան, ԱԲ ալ հաւասար է ԱԳ կողման (Նախ. ԺԲ.), որ աս ալ հակառակ է ենթադրութեան։ Ուստի, երբ ԱԲ>ԱԳ, Գ անկիւնը Բ անկիւնէն մեծ ըլլալու է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ գծէ մը դուրս որեւէ կէտէ մը՝ միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ, որ ուղղահայեաց ըլլայ այն ուղիղ գծին։

Ա կէտէն միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ որ ԴԵ ուղիղ գծին ուղղահայեաց ըլլայ։

Ենթադրենք թէ երկու ուղղահայեաց կրնան քաշուիլ, ԱԲ եւ ԱԳ. անոնցմէ մէկը, ԱԲ, երկնցուր մինչեւ Ֆ, ԲՖ հաւասար ընելով ԱԲ ին, եւ ՖԳ գիծը քաշէ։ ԳԱԲ եւ ԳԲՖ եռանկեանց մէջ ԳԲԱ եւ ԳԲՖ անկիւնները ուղիղ են. ԳԲ կողմը հասարակաց է, ԱԲ կողմը հաւասար շինուած է ԲՖ կողման. ուրեմն եռանկիւնները իրարու հաւասար են (Նախ. Ե. Հետ.)։ Բայց ԱԳԲ անկիւնը ենթադրութեամբ ուղիղ է, նաեւ ԲԳՖ ուղիղ ըլլալու է։ Բայց եթէ երկու առընթերակայ անկիւնները, ԲԳԱ եւ ԲԳՖ, միասին հաւասար են երկու ուղիղ անկեանց, ԱԳՖ ուղիղ գիծ ըլլալու է (Նախ. Գ.). ասկէ կը հետեւի թէ Ա կէտէն Ֆ կէտը երկու ուղիղ գիծ կրնայ քաշուիլ, որ անկարելի է (Առ. 11). ուրեմն նոյն կէտէն նոյն ուղիղ գծին մէկ ուղղահայեաց միայն կրնայ քաշուիլ։



Հետ. ԱԲ գծին վրայ որեւիցէ կէտէ մը, Գ, միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ որ ԱԲ ին ուղղահայեաց ըլլայ։ Քանզի, եթէ երկու ուղղահայեաց կրնայ քաշուիլ, ԳԴ եւ ԳԵ, ԲԳԴ եւ ԲԳԵ անկիւնները ուղիղ կ'ըլլան եւ իրարու հաւասար (Առ. 10). եւ ԳԴ գիծը ԳԵ գծին զուգընթաց կ'ըլլայ, ապա թէ ոչ մասը ամբողջին հաւասար պիտի ըլլար, որ անկարելի է (Առ. 8)։

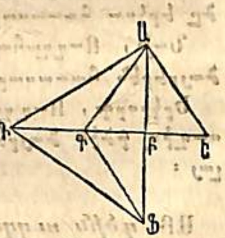
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ ուղիղ գծէ մը դուրս եղող կէտէ մը ուղղահայեաց մը տարուի նոյն ուղիղ գծին, եւ խոտորնակ գծեր՝ անոր այլ եւ այլ կէտերուն,

Նախ, Ուղղահայեացը որեւիցէ խոտորնակ գծէն փոքր պէտք ըլլայ.

Երկրորդ, Ուղղահայեացէն հաւասարապէս հեռու եղող երկու խոտորնակ գծեր իրարու հաւասար պէտք ըլլան։

Երրորդ, Երկու խոտորնակ գծերուն՝ ուղղահայեացէն հեռու եղողը մեծ պէտք ըլլայ։



Ա կէտէն ԴԵ գծին ԱԲ ուղղահայեաց, եւ ԱԵ, ԱԳ, ԱԴ խոտորնակ գծերը քաշէ, նաեւ ԱԲ երկնցուր մինչեւ Ֆ կէտը, ԲՖ գիծը հաւասար ընելով ԱԲ ին, ու ՖԳ եւ ՖԴ գիծերը քաշէ։

Նախ. ԲԳՖ եւ ԲԳԱ եռանկիւնները իրարու հաւասար են. քանզի ԳԲՖ եւ ԳԲԱ, ուղիղ անկիւններ ըլլալով, իրարու հաւասար են, ԳԲ կողմը հասարակաց է, եւ ԲՖ հաւասար է ԲԱ կողման. ուստի ԳՖ եւ ԳԱ երրորդ կողմերն իրարու հաւասար են (Նախ. Ե. Հետ.)։ Սակայն ԱԲՖ ուղիղ գիծ ըլլալով, փոքր է ԱԳՖ բեկեալ գծէն (Սահմ. 3). ուստի ԱԲՖ գծին կէսը, ԱԲ, փոքր է ԱԳՖ գծին կէսէն եղող ԱԳ գծէն. ուրեմն ուղղահայեացը որեւիցէ խոտորնակ գծէ փոքր է։

Երկրորդ․ Եթէ ԲԳ հաւասար է ԲԵ գծին, ԱԲԳ եռանկիւնը հաւասար է ԱԲԵ եռանկեան․ քանզի ԲԳ=ԲԵ, ԱԲ կողմը հասարակաց է, եւ ԳԲԱ=ԱԲԵ անկեան․ ուստի ԱԳ եւ ԱԵ իրարու հաւասար են (Նախ․ Ե․ Հետ․)․ ուրեմն ուղղահայեացէն հաւասարապէս հեռու եղող երկու խոտորնակ գծեր իրարու հաւասար են։

Երրորդ․ ԴՑԱ եռանկեան մէջ, ԱԳ+ԳՑ<ԱԴ+ԴՑ (Նախ․ Ը․)․ ուստի ԱԳՑ գծին կէսը, ԱԳ, փոքր է ԱԴՑ գծին կէսն եղող ԱԴ գծէն․ ուրեմն երկու խոտորնակ գծերուն՝ ուղղահայեացէն հեռու եղողը մեծ է։

Հետ․ 1․ Ուղղահայեացը կէտի մը ու գծի մը մէջտեղի ամենափոքր հեռաւորութիւնն է։

Հետ․ 2․ Կէտէ մը ուղիղ գծի մը՝ միայն երկու գիծ կրնայ քաշուիլ իրարու հաւասար․ ապա թէ ոչ, ուղղահայեացին մէկ կողմը գտնէ երկու իրարու հաւասար խոտորնակ գիծ պիտի գտնուէր, որ անկարելի է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ ուղիղ գծի մը ուղղահայեաց մը տանիս, ուղիղ գիծը երկու հաւասար մասանց բաժնելով,

Նախ, Ուղղահայեացին որեւիցէ կէտը՝ ուղիղ գծին ծայրերէն հաւասարապէս հեռու պիտի ըլլայ։

Երկրորդ, Ուղղահայեացէն դուրս եղող որեւիցէ կէտ, ուղիղ գծին ծայրերէն անհաւասարապէս հեռու պիտի ըլլայ։

ԱԲ գծին ուղղահայեաց ԵՑ քաշէ, ԱԳ եւ ԳԲ իրարու հաւասար ըլլալով։

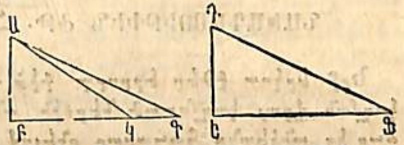
Նախ․ Որովհետեւ ԱԳ եւ ԳԲ իրարու հաւասար են, ԱԴ եւ ԴԲ խոտորնակ գծերն ալ իրարու հաւասար են (Նախ․ ԺԵ․)։ Նոյնպէս են նաեւ ԱԵ եւ ԵԲ, ԱՑ եւ ՑԲ, եւայլն․ ուրեմն ուղղահայեացին որեւիցէ կէտը ուղիղ գծին ծայրերէն հաւասարապէս հեռու է։

Երկրորդ․ Ուղղահայեացէն դուրս եղող Ի կէտէն ԻԲ եւ ԻԱ գծերը քաշէ․ ասոնցմէ մէկը Դ կէտին վրայ ուղղահայեացը պիտի կտրէ․ աս կէտէն ԴԲ գիծը քաշէ, եւ ԴԲ հաւասար կ'ըլլայ ԴԱ-ին։ Սակայն ԻԲ<ԻԴ+ԴԲ, եւ ԻԴ+ԴԲ=ԻԴ+ԴԱ=ԻԱ․ ուստի ԻԲ<ԻԱ․ ուրեմն ուղղահայեացէն դուրս եղող որեւիցէ կէտ՝ ուղիղ գծին ծայրերէն անհաւասարապէս հեռու է։

Հետ․ Եթէ Ց եւ Ե կէտերը հաւասարապէս հեռու են Ա եւ Բ կէտերէն, ՑԵ ուղղահայեաց է ԱԲ գծին եւ կը բաժնէ զանիկա երկու հաւասար մասանց։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու ուղղանկիւն եռանկեանց մէկուն հակուղիղը և մէկ կողմը միւսին հակուղիղին և մէկ կողման հաւասար են, եռանկիւններն ալ իրարու հաւասար են։

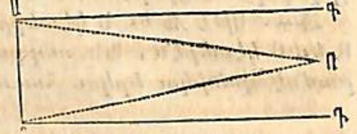


Եթէ ԱԲԳ եւ ԴԵՑ ուղղանկիւն եռանկեանց մէջ ԱԳ հակուղիղը հաւասար է ԴՑ հակուղիղին, եւ ԱԲ կողմը՝ ԴԵ կողման, եռանկիւններն իրարու հաւասար են։

Եթէ ԲԳ հաւասար է ԵՑ կողման, եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ․ Ժ․)։ Ենթադրենք թէ աս երկու կողմերն իրարու հաւասար չեն եւ ԲԳ կողմը միւսէն մեծ է։ Քաշէ ԱԿ, հաւասար ընելով ԲԿ մասը ԵՑ կողման։ ԱԲԿ եւ ԴԵՑ եռանկեանց մէջ Բ եւ Ե անկիւններն ուղիղ ըլլալով իրարու հաւասար են, ԲԱ ենթադրութեամբ հաւասար է ԵԴ կողման, եւ ԲԿ հաւասար շինուած է ԵՑ կողման․ ուստի ԱԿ հաւասար է ԴՑ կողման (Նախ․ Ե․ Հետ․)։ Սակայն ենթադրութեամբ ԱԳ հաւասար է ԴՑ կողման․ ուստի ԱԳ հաւասար է ԱԿ կողման (Առ․ 1)։ Բայց ԱԳ խոտորնակ գիծը՝ ուղղահայեացին մօտ եղող ԱԿ խոտորնակ գծին հաւասար չի կրնար ըլլալ (Նախ․ ԺԵ․)․ ուստի ԲԳ եւ ԵՑ անհաւասար չեն կրնար ըլլալ․ ուրեմն եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ․ Ժ․)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԸ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու ուղիղ գծեր երրորդ գծի մը ուղղահայեաց են, իրարու զուգահեռական են:

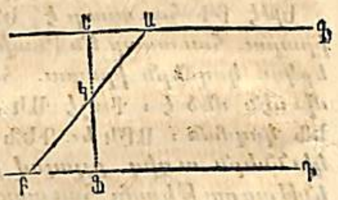


Եթէ ԱԳ եւ ԲԴ գիծերը ԱԲ գծին ուղղահայեաց են, իրարու զուգահեռական են:

Քանզի, եթէ կրնային մէկզմէկ կտրել ԱԲ գծին մէկ կամ միւս կողմն եղող որեւիցէ կէտի մը վրայ, ինչպէս Ո, միեւնոյն կէտէն միեւնոյն գծին վրայ երկու ուղղահայեաց քաշուած պիտի ըլլար, որ անկարելի է (Նախ. ԺԴ.):

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու գծեր երրորդ գծի մը կը կտրեն, անոր մէկ կողման վրայ կազմուած ներքին անկեանց գումարն երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլալով, երկու գծերն իրարու զուգահեռական են:

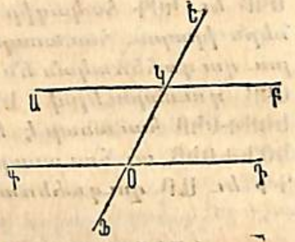


Եթէ ԵԳ եւ ԲԴ գծերը, ԱԲ գիծը կտրելով, ԲԱԳ եւ ԱԲԴ անկեանց գումարն երկու ուղիղ անկեանց հաւասար կ'ընեն, ԵԳ եւ ԲԴ գծերը զուգահեռական են:

ԱԲ գծին միջին կէտէն, Կ, ԵԳ գծին ուղղահայեաց ԵԿԶ գիծը քաշէ. ԲԴ գծին ալ ուղղահայեաց պիտի ըլլայ: Քանզի, ենթադրութեամբ, ԲԱԳ եւ ԱԲԴ անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց. նաեւ ԲԱԳ եւ ԲԱԵ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է (Նախ. Ա.). ԲԱԳ անկիւնը երկու կողմէն հանելով, կը մնայ ԱԲԴ=ԲԱԵ անկեան: ԵԿԱ անկիւնն ալ հաւասար է ԲԿԶ անկեան (Նախ. Դ.). ուստի ԵԿԱ եւ ԲԿԶ եռանկիւններն իրարու հաւասար են,

եւ ԿԵԱ=ԿԶԲ անկեան (Նախ. Զ. Հետ.): Բայց ԿԵԱ ուղիղ անկիւն է, ուստի ԿԶԲ ալ ուղիղ անկիւն է. ուրեմն ԵԳ եւ ԲԴ գծերը, նոյն գծին ուղղահայեաց ըլլալով, զուգահեռական են (Նախ. ԺԸ.):

Պար. Երբ երկու զուգահեռական գծեր երրորդ գծով մը կը կտրուին, կազմուած ութը անկիւնները մասնաւոր անուններ ունին:



Զուգահեռական գծերուն մէջի կողմը եղող չորսը՝ ներքին անկիւններ, իսկ միւս չորսը արտաքին անկիւններ կը կոչուին:

Երկու ներքին կամ երկու արտաքին անկիւններ, որոնք այլեւայլ գագաթներ ունին, ու կտրող գծին միեւնոյն կողմը կը կենան, նոյնակողմեան անկիւններ կը կոչուին: Զորօրինակ, ԱԿՕ եւ ԿՕԳ, նաեւ ԲԿՕ եւ ԿՕԴ՝ ներքին նոյնակողմեան անկիւններ, այլ ԵԿԱ եւ ԳՕԶ, նաեւ ԲԿԵ եւ ԴՕԶ արտաքին նոյնակողմեան անկիւններ են:

Երկու ներքին կամ երկու արտաքին անկիւններ որոնք այլեւայլ գագաթներ ունին եւ կտրող գծին միեւնոյն կողմը չեն, փոխադարձ անկիւններ կը կոչուին: Զորօրինակ, ԱԿՕ եւ ԴՕԿ, նաեւ ԳՕԿ եւ ԲԿՕ՝ ներքին փոխադարձ անկիւններ, այլ ԵԿԲ եւ ԳՕԶ, նաեւ ԱԿԵ եւ ԶՕԴ արտաքին փոխադարձ անկիւններ են:

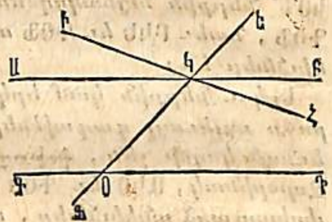
Մէկ արտաքին ու մէկ ներքին անկիւններ, որոնք այլեւայլ գագաթներ ունին եւ կտրող գծին միեւնոյն կողմը կը կենան, հակադիր արտաքին ու ներքին անկիւններ կը կոչուին: Զորօրինակ, ԱԿԵ եւ ԿՕԳ, նաեւ ԵԿԲ եւ ԿՕԴ հակադիր արտաքին ու ներքին անկիւններ են:

Հետ. 1. Երբ ԵԶ գիծը ԱԲ եւ ԳԴ գծերը կտրելով, ԱԿՕ եւ ԿՕԴ փոխադարձ անկիւններն իրարու հաւասար կ'ընէ, ԱԲ եւ ԳԴ գծերն իրարու զուգահեռական են: Քանզի ԱԿՕ=ԿՕԴ հաւասարութիւնը, երկու կողմը ՕԿԲ գումարուելով, կ'ըլլայ ԱԿՕ+ՕԿԲ=ԿՕԴ+ՕԿԲ. սակայն ԱԿՕ+ՕԿԲ հաւասար է երկու ուղիղ *անկեանց (Նախ. Ա.), ուստի* ԿՕԴ+ՕԿԲ *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց. ուրեմն* ԳԴ *եւ* ԱԲ *զուգահեռական են ։*

Հետ. 2. Երբ ԵԶ *գիծը* ԱԲ *եւ* ԳԴ *գծերը կտրելով,* ԵԿԲ *եւ* ԿՕԴ *հակադիր արտաքին եւ ներքին անկիւնները իրարու հաւասար կ'ըլլան ,* ԱԲ *եւ* ԳԴ *գծերն իրարու զուգահեռական են ։ Քանզի, իւրաքանչիւրին հետ* ՕԿԲ *գումարուելով ,* ԵԿԲ+ՕԿԲ=ԿՕԴ+ՕԿԲ . *սակայն* ԵԿԲ+ՕԿԲ *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց . ուրեմն* ԿՕԴ+ՕԿԲ *ալ հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց , ու* ԳԴ *եւ* ԱԲ *զուգահեռական են ։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ի. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ գիծ մը երկու զուգահեռական գծեր կը կտրէ, ներքին նոյնակողման անկեանց գումարն երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է ։

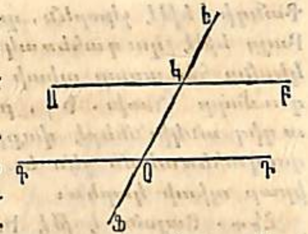


ԵԶ *գիծը* ԱԲ *եւ* ԳԴ *զուգահեռական գծերը կտրելով,* ՕԿԲ *եւ* ԿՕԴ , *նաեւ* ՕԿԱ *եւ* ԿՕԳ *անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար կ'ըլլայ ։*

Քանզի, եթէ ՕԿԲ+ԿՕԴ *երկու ուղիղ անկեանց հաւասար չէ ,* ԻԿՀ *գիծը քաշէ ,* ՕԿՀ+ԿՕԴ *երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլալով . անատեն* ԻՀ *եւ* ԳԴ *զուգահեռական կ'ըլլան (Նախ. ԺԹ.) , եւ* Կ *կէտին վրայէն* ԳԴ *գծին զուգահեռական երկու գիծ ,* ԻՀ *եւ* ԱԲ , *քաշուած կ'ըլլայ , որ անկարելի է (Առ. 12) . ուրեմն* ԿԲ *եւ* ԿՀ՝ *զուգընթաց , ու* ԿՕԴ *եւ* ՕԿԲ *երկու ուղիղ անկեանց հաւասար են ։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ* ՕԿԱ+ԿՕԳ *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց ։*

Հետ. 1. Եթէ ՕԿԲ *ուղիղ անկիւն է,* ԿՕԴ *ալ ուղիղ է . ուրեմն* երկու զուգահեռական գծերէն միոյն ուղղահայեաց եղող գիծը, միւսին ալ ուղղահայեաց է ։

Հետ. 2. Երբ գիծ մը երկու զուգահեռական գծեր կը կտրէ, փոխադարձ անկիւններն իրարու հաւասար են ։



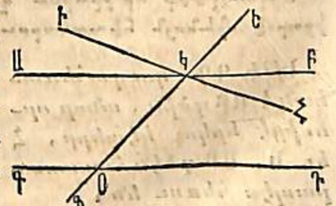
ԵԶ *գիծը* ԱԲ *եւ* ԳԴ *զուգահեռական գծերը կտրելով ,* ՕԿԱ *անկիւնը* ԿՕԴ *անկեան հաւասար կ'ըլլայ ։ Քանզի* ՕԿԲ+ԿՕԴ *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց .* ՕԿԲ+ՕԿԱ *ալ հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց (Նախ. Ա.), ուստի* ՕԿԲ+ԿՕԴ=ՕԿԲ+ՕԿԱ . *եւ ,* ՕԿԲ *հանուելով , կը մնայ* ԿՕԴ=ՕԿԱ ։ *Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ* ԿՕԳ=ՕԿԲ ։

Հետ. 3. Երբ գիծ մը երկու զուգահեռական գծեր կը կտրէ , հակադիր արտաքին եւ ներքին անկիւններն իրարու հաւասար են ։ Քանզի ՕԿԲ+ԿՕԴ , *նաեւ* ՕԿԲ+ԵԿԲ *երկու ուղիղ անկեանց հաւասար ըլլալով , իրարու հաւասար են , եւ* ՕԿԲ *հանուելով կը մնայ* ԿՕԴ=ԵԿԲ ։ *Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ* ԱԿԵ=ԿՕԳ ։

Հետ. 4. Ասկէ յայտնի է թէ, երբ գիծ մը երկու զուգահեռական գծեր խոտորնակի կը կտրէ , կազմուած ութ անկեանց չորս սրանկիւններն իրարու հաւասար՝ եւ չորս բթանկիւններն իրարու հաւասար են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու գծեր երրորդ գծէ մը կը կտրուին՝ ներքին նոյնակողման անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկիւններէ քիչ ըլլալով, այն երկու գծերը, եթէ բաւական երկնցուին, իրար պէտք կտրեն ։

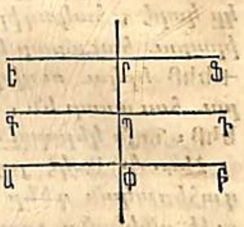


Եթէ ԳԴ *եւ* ԻՀ *երկու գծերը* ԵԶ *գծէն կտրուին՝* ՕԿՀ *եւ* ԿՕԴ *անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկիւններէ փոքր ըլլալով,* ԻՀ *եւ* ԳԴ *գծերը , եթէ բաւական երկարին , իրար պիտի կտրեն ։*

Քանզի, եթէ չկտրեն, զուգահեռական են (Սահմ. 12)։ Բայց եթէ զուգահեռական ըլլային, երկու ուղիղ անկեանց հաւասար պիտի ըլլար ՕԿՀ եւ ԿՕԴ անկեանց գումարը (Նախ. Ի.), բայց ենթադրութեամբ երկու ուղիղ անկիւններէ փոքր է. ուրեմն ԻՀ եւ ԳԴ գծերը զուգահեռական չեն եւ, եթէ բաւական երկնցուին, իրար պիտի կտրեն։

Հետ. Յայտնի է թէ ԻՀ եւ ԳԴ գծերը իրար պիտի կտրեն ԵՖ գծին այն կողմը ուր ՕԿՀ եւ ԿՕԴ անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկիւններէ փոքր է։

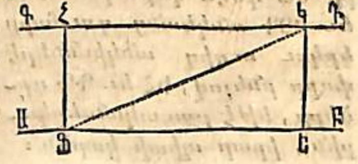
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԲ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղիղ գծերը որ երրորդի մը զուգահեռական են, իրարու ալ զուգահեռական են։

Եթէ ԳԴ եւ ԱԲ գծերը ԵՖ գծին զուգահեռական են, իրարու ալ զուգահեռական են։

ԵՖ գծին ուղղահայեաց ՓՊՐ գիծը քաշէ. ԱԲ եւ ԳԴ գծերն ալ կտրելով։ Որովհետեւ ԱԲ զուգահեռական է ԵՖ գծին, ՓՐ ուղղահայեաց է ԱԲ գծին (Նախ. Ի. Հետ. 1). եւ, որովհետեւ ԳԴ զուգահեռական է ԵՖ գծին, ՓՐ ուղղահայեաց է նաեւ ԳԴ գծին։ Ուրեմն ԱԲ եւ ԳԴ միեւնոյն գծին ուղղահայեաց ըլլալով, իրարու զուգահեռական են (Նախ. ԺԸ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԳ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու գծեր որ իրարու զուգահեռական են, ամէն տեղ իրարմէ միեւնոյն հեռաւորութիւնն ունին։



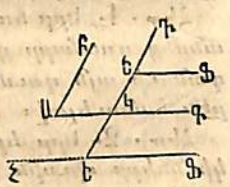
Եթէ ԳԴ զուգահեռական է ԱԲ գծին, անոր որեւիցէ երկու կէտերը, Հ եւ Կ, ԱԲ գծէն հաւասարապէս հեռու են։

Քաշէ ԳԴ գծին ուղղահայեաց ՖՀ եւ ԵԿ գծերը. ասոնք ԱԲ ին ալ ուղղահայեաց (Նախ. Ի. Հետ. 1)՝ եւ իրարու զուգահեռական են (Նախ. ԺԸ.)։ Հիմա ապացուցելու է թէ իրարու հաւասար են։

ԿՖ գիծը քաշէ։ Որովհետեւ այս գիծը ԱԲ եւ ԳԴ զուգահեռական գծերը կը կտրէ, ԿՖԵ եւ ՖԿՀ ներքին փոխադարձ անկիւնները իրարու հաւասար են (Նախ. Ի. Հետ. 2)։ Նաեւ, որովհետեւ ԿՖ գիծը ՖՀ եւ ԵԿ զուգահեռական գծերը կը կտրէ, ԵԿՖ եւ ԿՖՀ փոխադարձ անկիւնները իրարու հաւասար են։ Ուստի, որովհետեւ ՖՀԿ եւ ԿՖԵ եռանկեանց ԿՖ կողմը հասարակաց է, եւ մէկուն երկու անկիւնները միւսին երկու անկիւններուն հաւասար են, եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Զ.)։ Ուրեմն ԵԿ եւ ՖՀ իրարու հաւասար են։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԴ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու անկեանց կողմերը նոյն ուղղութիւնն ունենալով իրարու զուգահեռական են, անկիւններն իրարու հաւասար են։



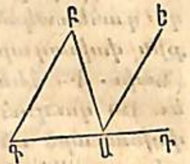
Եթէ ԱԲ զուգահեռական է ԵԴ գծին եւ ԱԳ ալ՝ ԵՖ գծին, ԲԱԳ եւ ԴԵՖ անկիւնները իրարու հաւասար են։

Երկնցուր ԴԵ գիծը ԱԳ գիծը կտրելով Կ կէտին վրայ։ Որովհետեւ ԵՖ գիծը ԿԳ գծին զուգահեռական է, ԴԵՖ հաւասար է ԴԿԳ անկեան (Նախ. Ի. Հետ. 3). եւ, որովհետեւ ԴԿ գիծը ԱԲ գծին զուգահեռական է, ԴԿԳ հաւասար է ԲԱԳ անկեան. ուրեմն ԴԵՖ հաւասար է ԲԱԳ անկեան (Առ. 1)։

Պար. Պէտք է որ ԵՖ գիծը ԱԳ ին ուղղութիւնն ունենայ, ԱԲ ալ՝ ԵԴ ին. քանզի, եթէ ՖԵ երկնցուի դէպ ի Հ, ԴԵՀ եւ ԲԱԳ անկիւններն իրարու զուգահեռական կողմեր պիտի ունենան, բայց իրարու հաւասար պիտի չըլլան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւիցէ եռանկեան երեք անկիւններուն գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։



ԱԲԳ եռանկեան մէջ Ա, Բ եւ Գ անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։

ԳԱ կողմը երկնցուր դէպի Դ, եւ Ա կէտէն ԲԳ կողման զուգահեռական ԱԵ գիծը քաշէ. որովհետեւ ԳԱԴ գիծը ԱԵ եւ ԳԲ զուգահեռական գծերը կը կտրէ, ԴԱԵ եւ ԱԳԲ հակադիր արտաքին եւ ներքին անկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Ի. Հետ. 3). եւ, որովհետեւ ԱԲ գիծը յիշեալ զուգահեռականները կը կտրէ, ԱԲԳ եւ ԲԱԵ փոխադարձ անկիւններն իրարու հաւասար են. ուստի ԱԲԳ եռանկեան երեք անկիւններուն գումարը հաւասար է ԳԱԲ, ԲԱԵ եւ ԵԱԴ անկեանց գումարին. ուրեմն երեք անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց (Նախ. Ա.)։

Հետ. 1. Երբ եռանկեան մը երկու անկիւնները կամ անոնց գումարը գիտցուած են, երրորդ անկիւնը կը գտնուի այն գումարը երկու ուղիղ անկեանց գումարէն հանելով։

Հետ. 2. Երբ երկու եռանկեան մէկուն երկու անկիւնները միւսին երկու անկիւններուն հաւասար են, անոնց երրորդ անկիւններն ալ իրարու հաւասար են, եւ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են։

Հետ. 3. Որեւիցէ եռանկեան մէջ միայն մէկ ուղիղ անկիւն կրնայ ըլլալ. եթէ երկու կրնար ըլլալ, երրորդը ոչինչ պիտի ըլլար։ Առաւել եւս անհնար է որ եռանկիւն մը մէկէն աւելի բթանկիւն ունենայ։

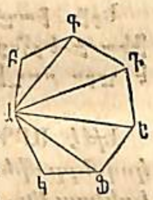
Հետ. 4. Ամէն ուղղանկիւն եռանկեան երկու սրանկեանց գումարը մէկ ուղիղ անկեան հաւասար է։

Հետ. 5. Որովհետեւ ամէն հաւասարակողմ եռանկիւն հաւասարանկիւն ալ է (Նախ. ԺԱ. Հետ.), անոր ամէն մէկ անկիւնը երկու ուղիղ անկեանց երրորդ մասին հաւասար է. այսինքն, եթէ ուղիղ անկիւնը Ձէ համարուի, հաւասարակողմ եռանկեան ամէն մէկ անկիւնը $\frac{2}{3}$ով պիտի ցուցուի։

Հետ. 6. Որեւիցէ եռանկեան մէջ, ԱԲԳ, արտաքին անկիւնը, ԲԱԴ, հաւասար է ներքին դիմացի երկու անկեանց գումարին, Բ եւ Գ։ Քանզի, որովհետեւ ԱԵ զուգահեռական է ԲԳ ին, ԲԱԵ անկիւնը հաւասար է Բ անկեան, եւ ԴԱԵ հաւասար է Գ անկեան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն բազմանկեան ներքին անկեանց գումարը, նոյն բազմանկեան կողմանց թուոյն կրկնապատիկէն չորս պակաս ուղիղ անկեանց հաւասար է։



Եթէ որեւիցէ բազմանկեան, ԱԲԳԴԵՖԿ, գագաթներուն մէկէն, Ա, տրամանկիւններ քաշուին, ԱԳ, ԱԴ, ԱԵ, ԱՖ, յայտնի է թէ եօթը կողմ ունեցող բազմանկիւնը հինգ եռանկեան պիտի բաժնուի, ութը կողմ ունեցողը՝ վեց եռանկեան, եւ, առհասարակ, ամէն բազմանկիւն իր կողմանց թիւէն երկու պակաս եռանկեան պիտի բաժնուի. քանզի, որովհետեւ Ա գագաթը բոլոր եռանկեանց հասարակաց է, Ա անկիւնը չինող երկու կողմերէն զատ՝ բազմանկեան իւրաքանչիւր կողմը մէկ-մէկ եռանկեան խարիսխ կ'ըլլայ։ Նաեւ յայտնի է թէ աս եռանկեանց բոլոր անկիւններուն գումարը բազմանկեան անկիւններուն գումարին հաւասար է. ուստի, որովհետեւ բազմանկիւնն իր կողմանց թիւէն երկու պակաս եռանկիւն ունի, անոր բոլոր ներքին անկեանց գումարը անոր կողմանց թուոյն կրկնապատիկէն չորս պակաս ուղիղ անկեանց հաւասար է։

Հետ. 1. Քառանկեան մը անկեանց գումարը հաւասար է 4×2—4 կամ 4 ուղիղ անկեան : Ուրեմն, երբ քառանկիւնը հաւասարանկիւն է, իւրաքանչիւր անկիւնը ուղիղ անկիւն է :

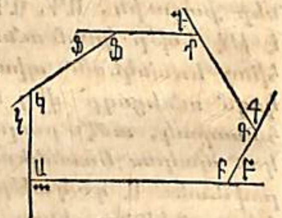
Հետ. 2. Հնգանկեան մը անկեանց գումարը հաւասար է 5×2—4 կամ 6 ուղիղ անկեան : Ուրեմն, երբ հնգանկիւնը հաւասարանկիւն է, իւրաքանչիւր անկիւնը $\frac{6}{5}$ ուղիղ անկեան հաւասար է :

Հետ. 3. Վեցանկեան մը անկեանց գումարը հաւասար է 6×2—4 կամ 8 ուղիղ անկեան : Ուրեմն, երբ վեցանկիւնը հաւասարանկիւն է, իւրաքանչիւր անկիւնը $\frac{4}{3}$ ուղիղ անկեան հաւասար է :

Հետ. 4. + կողմ ունեցող բազմանկեան մը ներքին անկեանց գումարը հաւասար է 2+—4 ուղիղ անկեանց :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԷ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բազմանկեան մը բոլոր կողմերը միեւնոյն ուղղութեամբ երկնցուին, արտաքին անկեանց գումարը հաւասար է չորս ուղիղ անկեանց :

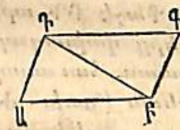


Եթէ ԱԲԳԴՑԿ բազմանկեան կողմերը միեւնոյն ուղղութեամբ երկնցուին, ա, բ, գ, դ, ց, եւ կ արտաքին անկեանց գումարը չորս ուղիղ անկեանց հաւասար պիտի ըլլայ :

Քանզի իւրաքանչիւր ներքին անկիւն, իր արտաքին անկեան հետ գումարուելով, ինչպէս Ա+ա, հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց (Նախ. Ա.) : Բայց բազմանկիւնը քանի ներքին անկիւն որ ունի՝ նոյնքան ալ արտաքին անկիւն ունի, նաեւ իւրաքանչիւրէն իր կողմերուն չափ ունի. ուստի ներքին եւ արտաքին անկեանց ամենուն գումարը, բազմանկեան կողմանց թուոյն երկու անգամը ուղիղ անկեանց հաւասար է : Այսինքն, եթէ բազմանկիւն մը + կողմ ունի, անոր ներքին եւ արտաքին անկեանց գումարը հաւասար է 2+ ուղիղ անկեանց : Բայց անոր ներքին անկեանց գումարը հաւասար է 2+—4 ուղիղ անկեանց (Նախ. ԻԶ. Հետ. 4). եթէ 2+—4 գումարը 2+ գումարէն կը հանուի, կը մնայ արտաքին անկեանց գումարը չորս ուղիղ անկեանց հաւասար :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԸ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն զուգահեռագծի մը ընդդիմակաց կողմերը եւ մը անկիւնները իրարու հաւասար են :



ԱԲԳԴ զուգահեռագծին մէջ ԱԲ=ԴԳ կողման եւ ԲԳ=ԱԴ կողման, նաեւ Ա =Գ անկեան եւ ԱԲԳ=ԱԴԳ անկեան :

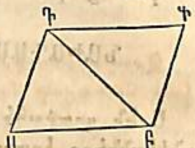
ԲԴ տրամանկիւնը քաշէ : ԱԴԲ եւ ԳԲԴ եռանկեանց մէջ, ԲԴ կողմը հասարակաց է. եւ, որովհետեւ ԱԴ ու ԲԳ զուգահեռական են, ԱԴԲ=ԴԲԳ անկեան (Նախ. Ի. Հետ. 2). եւ, որովհետեւ ԱԲ զուգահեռական է ԳԴ գծին, ԱԲԴ=ԲԴԳ անկեան. ուստի եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Զ.), եւ ԱԲ=ԴԳ ու ԲԳ=ԱԴ կողման. ուրեմն զուգահեռագծի մը ընդդիմակաց կողմերը իրարու հաւասար են :

Նաեւ, որովհետեւ եռանկիւնները իրարու հաւասար են, Ա անկիւնը հաւասար է Գ անկեան, եւ ԲԴԱ +ԲԴԳ կամ ԱԴԳ անկիւնը հաւասար է ԴԲԳ+ԱԲԴ կամ ԱԲԳ անկեան. ուրեմն զուգահեռագծի մը ընդդիմակաց անկիւններն իրարու հաւասար են :

Հետ. ԱԴ եւ ԲԳ զուգահեռականաց մէջտեղն ինկող ԱԲ եւ ԳԴ զուգահեռականներն իրարու հաւասար են եւ ԴԲ տրամանկիւնը զուգահեռագիծն երկու հաւասար եռանկեանց կը բաժնէ :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ քառանկեան մը ընդդիմակաց կողմերն իրարու հաւասար են, հաւասար կողմերը զուգահեռական են, և քառանկիւնը զուգահեռագիծ է։

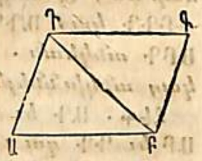


Եթէ ԱԲԳԴ քառանկեան մէջ ԱԲ հաւասար է ԴԳ կողման, ԲԳ ալ ԱԴ կողման, այս հաւասար եղող կողմերն իրարու զուգահեռական են, եւ քառանկիւնը զուգահեռագիծ է։

Քաշէ ԲԴ տրամանկիւնը։ ԱԲԴ ու ԲԴԳ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարակողմ են. ուստի իրարու հաւասար են. եւ, որովհետեւ ԱԴԲ=ԴԲԳ անկեան (Նախ. Ժ.), ԱԴ զուգահեռական է ԲԳ կողման. եւ, որովհետեւ ԱԲԴ=ԲԴԳ անկեան, ԱԲ զուգահեռական է ԳԴ կողման (Նախ. ԺԹ. Հետ. 1). ուրեմն ԱԲԳԴ քառանկիւնը զուգահեռագիծ է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Լ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ քառանկեան մը երկու ընդդիմակաց կողմերն իրարու հաւասար և զուգահեռական են, միւս երկու կողմերն ալ իրարու հաւասար և զուգահեռական են, ու քառանկիւնը զուգահեռագիծ է։

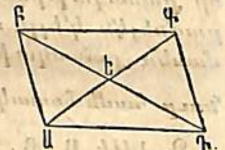


Եթէ ԱԲԳԴ քառանկեան ԱԲ կողմը ԳԴ կողման հաւասար ու զուգահեռական է, քառանկիւնը զուգահեռագիծ է։

Քաշէ ԲԴ տրամանկիւնը, ԱԲԳԴ քառանկիւնը երկու եռանկեան բաժնելով։ Որովհետեւ ԱԲ եւ ԳԴ զուգահեռական են, ԱԲԴ եւ ԲԴԳ փոխադարձ անկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Ի. Հետ. 2). նաեւ ԲԴ կողմը հասարակաց է ու ԱԲ հաւասար է ԴԳ կողման։ Ուստի ԱԲԴ եռանկիւնը ԲԴԳ եռանկեան հաւասար է (Նախ. Ե.), եւ ԱԴ=ԲԳ կողման, ու ԱԴԲ=ԴԲԳ անկեան. ուրեմն ԱԴ զուգահեռական է ԲԳ կողման, եւ ԱԲԳԴ զուգահեռագիծ է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԼԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զուգահեռագծի մը երկու տրամանկիւնները իրար երկերկու հաւասար մասանց կը բաժնեն։



ԱԲԳԴ զուգահեռագծին մէջ ԲԴ եւ ԱԳ տրամանկիւններն իրար այնպէս կը կտրեն որ ԲԵ=ԵԴ, նաեւ ԱԵ=ԵԳ։

ԱԴԵ եւ ԲԵԳ եռանկեանց մէջ ԱԴ=ԳԲ կողման (Նախ. ԻԸ.), ԱԴԵ=ԳԲԵ անկեան եւ ԴԱԵ=ԵԳԲ անկեան (Նախ. Ի. Հետ. 2). ուստի եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Նախ. Զ.), եւ ԱԵ=ԵԳ, նաեւ ԴԵ=ԵԲ։

Պար. Երբ քառանկիւնը տարանկիւն է, որովհետեւ ԱԲ եւ ԲԳ կողմերն իրարու հաւասար են, ԱԵԲ ու ԲԵԳ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարակողմ ու հետեւապէս իրարու հաւասար են (Նախ. Ժ.). ուստի ԱԵԲ=ԲԵԳ անկեան. ուրեմն տարանկեան մը տրամանկիւններն իրարու ուղղահայեաց են (Սահմ. 10)։

ԳԻՐՔ Բ·

ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԻՒՆ

Սահմանք ։

1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՆ է այն քանորդը որ քանակութիւն մը ուրիշ համասեռ քանակութեամբ բաժնելէն կ'ելլէ ։ Եթէ Ա եւ Բ կը ներկայացընեն համասեռ քանակութիւններ, Ալ առ Բ ունեցած ընդհանուր համեմատականը կը ցուցուի այսպէս, $\frac{\text{Բ}}{\text{Ա}}$ ։

2. Եթէ Ա, Բ, Գ եւ Դ չորս քանակութիւններն անանկ արժէք ունին որ $\frac{\text{Բ}}{\text{Ա}} = \frac{\text{Դ}}{\text{Գ}}$, անատեն կ'ըսուի թէ Ա այնպէս կը համեմատի Բ ի, ինչպէս Գ՝ Դ ի ։ Երբ չորս քանակութիւնք իրարու հետ այս յարաբերութիւնն ունին, համեմատութեան մէջ են կ'ըսուի ։

Ալ առ Բ ունեցած ընդհանուր համեմատականը Գի առ Դ ունեցած ընդհանուր համեմատականին հաւասար ըլլալը ցուցընելու համար, քանակութիւնները կը գրուին այսպէս ; Ա : Բ :: Գ : Դ, եւ կը կարդացուին, Ա այնպէս կը համեմատի Բ ի, ինչպէս Գ՝ Դ ի ։

Այն քանակութիւնները որ իրարու հետ կը բաղդատուին, եզերք համեմատութեան կը կոչուին ։ Առաջին ու վերջին եզրերը եզերք ծայրք՝ եւ երկրորդ ու երրորդ եզրերը եզերք միջինք կը կոչուին ։ Զորօրինակ, Ա եւ Դ ծայրեր՝ այլ Բ ու Գ միջինք են ։

3. Համեմատական չորս քանակութեանց առաջինը եւ երրորդը կը կոչուին նախադասք, եւ երկրորդն ու չորրորդը՝ յետադասք ։

4. Երեք քանակութիւնք իրարու համեմատական են, երբ առաջնոյն առ երկրորդն ունեցած ընդհանուր համեմատականը նոյն է երկրորդին առ երրորդին ունեցած ընդհանուր համեմատականին հետ, եւ անատեն միջին եզրը միւս երկուքին մէջտեղի միջին համեմատականը կը կոչուի · զորօրինակ, Ա : Բ :: Բ : Գ ։

5. Չորս համեմատական քանակութիւններ խոտորնակ համեմատութիւն ունին կ'ըսուի, երբ յետադասները նախադաս՝ եւ նախադասները յետադաս կ'ըլլան ։

6. Չորս համեմատական քանակութիւններ փոփոխական համեմատութիւն ունին կ'ըսուի, երբ նախադասը նախադասին հետ՝ եւ յետադասը յետադասին հետ կը բաղդատուի ։

7. Չորս համեմատական քանակութիւններ բաղադրական համեմատութիւն ունին կ'ըսուի, երբ նախադասին ու յետադասին գումարը կը բաղդատուի կամ նախադասին կամ յետադասին հետ ։

8. Չորս համեմատական քանակութիւններ բաժանական համեմատութիւն ունին կ'ըսուի, երբ նախադասին ու յետադասին տարբերութիւնը կը բաղդատուի կամ նախադասին կամ յետադասին հետ ։

9. Քանակութեանց համաբազմապատիկները այն արտադրեալներն են, որ քանակութիւնները միեւնոյն բազմապատկիչով բազմապատկելէ կ'ելլեն ։ Զորօրինակ, մ×Ա եւ մ×Գ՝ Ալ ու Գի համաբազմապատիկներն են ։

10. Երկու քանակութիւններ փոխադարձաբար համեմատական են, երբ իրարու հետ անանկ յարաբերութիւն ունին որ, եթէ մէկը որեւիցէ թուով բազմապատկուի, միւսը միեւնոյն թուով կը բաժնուի ։ Զորօրինակ, եթէ Ա եւ Բ իրարու անանկ յարաբերութիւն ունին, որ, երբ Ա՝ ր×Ա կ'ըլլայ, Բ կ'ըլլայ $\frac{\text{Բ}}{\text{ր}}$, Ա եւ Բ փոխադարձաբար համեմատական են կ'ըսուի ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Համեմատական չորս քանակութեանց երկու ծայրերուն արտադրեալը հաւասար է երկու միջիններուն արտադրելոյն :

Եթէ Ա : Բ :: Գ : Ե,
անատեն Ա × Ե = Բ × Գ,
քանզի $\frac{\text{Բ}}{\text{Ա}}=\frac{\text{Ե}}{\text{Գ}}$ (Սահմ. 2).
ուրեմն $\text{Բ}=\text{Ա}\times\frac{\text{Ե}}{\text{Գ}}$ կամ Բ × Գ = Ա × Ե.

Հետ. Եթէ երեք քանակութիւնք իրարու համեմատական են (Սահմ. 4), միջին եզրին քառակուսին հաւասար է երկու ծայրերուն արտադրելոյն :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու քանակութեանց արտադրեալը հաւասար է ուրիշ երկու քանակութեանց արտադրելոյն, կրնան անոնցմէ համեմատութիւն մը կազմել, մէկ արտադրելոյն արտադրիչները միջիններ՝ ու միւսին արտադրիչները ծայրեր ընելով:

Եթէ Ա×Ե=Բ×Գ,
անատեն Ա : Բ :: Գ : Ե,
քանզի, եթէ Գ այնպէս չի համեմատիր Ե ի ինչպէս Ա՝ Բ ի, ենթադրենք թէ Գ այնպէս կը համեմատի Ե էն կամ մեծ կամ փոքր եզող Ե′ ին, այսինքն
թէ Ա : Բ :: Գ : Ե′.
անատեն Ա×Ե′=Բ×Գ, (Նախ. Ա.),
կամ $\text{Ե}'=\frac{\text{Բ}\times\text{Գ}}{\text{Ա}}$. բայց $\text{Ե}=\frac{\text{Բ}\times\text{Գ}}{\text{Ա}}$.
ուստի Ե′=Ե եւ չորս քանակութիւններն իրարու համեմատական են, այսինքն, Ա:Բ::Գ:Ե:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ չորս քանակութիւնք իրարու համեմատական են, փոփոխակի առնուելով ալ համեմատական են :

Եթէ Ա:Բ::Գ:Ե,
անատեն Ա:Գ::Բ:Ե.
քանզի, որովհետեւ Ա:Բ::Գ:Ե,
ուստի Ա×Ե=Բ×Գ (Նախ. Ա.),
բայց Ա եւ Ե կրնան համեմատութեան ծայրերն՝ ու Բ եւ Գ միջիններն ըլլալ (Նախ. Բ.).
ուրեմն Ա:Գ::Բ:Ե :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու կարգ համեմատական քանակութիւնք միեւնոյն նախադասներն ունին, յետադասներն իրարու համեմատական են :

Եթէ Ա:Բ::Գ:Ե,
եւ Ա:Զ::Գ:Թ,
անատեն Բ:Ե::Զ:Թ.
քանզի Ա:Գ::Բ:Ե կամ $\frac{\text{Գ}}{\text{Ա}}=\frac{\text{Ե}}{\text{Բ}}$,
եւ Ա:Գ::Զ:Թ կամ $\frac{\text{Գ}}{\text{Ա}}=\frac{\text{Թ}}{\text{Զ}}$, (Նախ. Գ.).
ուրեմն $\frac{\text{Ե}}{\text{Բ}}=\frac{\text{Թ}}{\text{Զ}}$ կամ Բ:Ե::Զ:Թ :

Հետ. Եթէ երկու կարգ համեմատական քանակութեանց մէկուն նախադասը եւ յետադասը հաւասար է միւսին նախադասին ու յետադասին, մնացած եզրերը իրարու համեմատական են :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զոյգ համեմատական քանակութեանց խոտորնակէ առնուելով ալ նորէն համեմատական են ։

Եթէ $Ա : Բ :: Գ : Ե$,
անատեն $Բ : Ա :: Ե : Գ$.
քանզի $Ա \times Ե = Բ \times Գ$ (Նախ. Ա.).
ուստի $Բ : Ա :: Ե : Գ$ (Նախ. Բ.) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զոյգ համեմատական քանակութեանց թէ բաղդատաբար և թէ բաժանաբար առնուելով նորէն համեմատական են ։

Եթէ $Ա : Բ :: Գ : Ե$,
անատեն $Ա \pm Բ : Ա :: Գ \pm Ե : Գ$.
քանզի $Բ \times Գ = Ա \times Ե$ (Նախ. Ա.).
եւ եթէ այս հաւասարութեան երկու անդամները գումարուին $Ա \times Գ$ *ի հետ կամ անկէ հանուին, հետեւեալ հաւասարութիւնը կ'ելլէ*, $Ա \times Գ \pm Բ \times Գ = Ա \times Գ \pm Ա \times Ե$,
կամ $(Ա \pm Բ) \times Գ = (Գ \pm Ե) \times Ա$.
ուրեմն $Ա \pm Բ : Ա :: Գ \pm Ե : Գ$ (Նախ. Բ.) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու քանակութեանց համաբազմապատիկները նոյն ընդհանուր համեմատականն ունին ինչպէս նոյն ինքն քանակութիւնք ։

$$մ \times Ա : մ \times Բ :: Ա : Բ,$$

քանզի $մ \times Ա \times Բ = մ \times Բ \times Ա$, *որովհետեւ երկու անդամներուն մէջի քանակութիւնները միեւնոյն են*,
ուրեմն $մ \times Ա : մ \times Բ :: Ա : Բ$ (Նախ. Բ.) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ զոյգ համեմատական քանակութեանց նախադասները որ և իցէ քանակութեամբ բազմապատկուին, և յետադասները ուրիշ որ և իցէ քանակութեամբ բազմապատկուին, արտադրեալները նորէն համեմատական պիտի ըլլան ։

Եթէ $Ա : Բ :: Գ : Ե$,
անատեն $մ \times Ա : ն \times Բ :: մ \times Գ : ն \times Ե$.
քանզի $Ա \times Ե = Բ \times Գ$, *եւ, եթէ երկու անդամները* $մ \times ն$ *ով բազմապատկուին, հաւասարութիւնը կ'ըլլայ* $(մ \times Ա) \times (ն \times Ե) = (մ \times Գ) \times (ն \times Բ)$.
ուրեմն $մ \times Ա : ն \times Բ :: մ \times Գ : ն \times Ե$ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ զոյգ համեմատական քանակութեանց յետադասները աւելցուին կամ պակսեցուին որ և է քանակութիւններով որոնք նախադասներուն առնուած ընդհանուր համեմատականն ունին, ելած քանակութիւններն ու նախադասներն նորէն համեմատական պիտի ըլլան ։

Եթէ $Ա : Բ :: Գ : Ե$,
եւ $Ա : Գ :: մ : ն$;
անատեն $Ա : Գ :: Բ \pm մ : Ե \pm ն$.
քանզի $Ա \times Ե = Բ \times Գ$,
եւ $Ա \times ն = Գ \times մ$ (Նախ. Ա.).
ուստի $Ա \times Ե \pm Ա \times ն = Բ \times Գ \pm Գ \times մ$,
կամ $Ա \times (Ե \pm ն) = Գ \times (Բ \pm մ)$.
ուրեմն $Ա : Գ :: Բ \pm մ : Ե \pm ն$ (Նախ. Բ.) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միևնոյն ընդհանուր համեմատականն ունեցող որևէ թիւ համեմատութեանց որևէ նախադասը այնպէս կը համեմատի իր յետադասին, ինչպէս նախադասներուն գումարը՝ յետադասներուն գումարին։

Եթէ Ա:Բ::Գ:Ե::Զ:Թ *ևայլն*,
անատեն Ա:Բ::Ա+Գ+Զ:Բ+Ե+Թ.
քանզի, որովհետև Ա:Բ::Գ:Ե, Ա×Ե=Բ×Գ,
և, որովհետև Ա:Բ::Զ:Թ, Ա×Թ=Բ×Զ,
ու այս երկու հաւասարութիւններուն հետ Ա×Բ=Ա×Բ *հաւասարութիւնը գումարելով կ'ունենանք*
Ա×Բ+Ա×Ե+Ա×Թ=Ա×Բ+Բ×Գ+Բ×Զ,
կամ Ա×(Բ+Ե+Թ)=Բ×(Ա+Գ+Զ).
ուրեմն Ա:Բ::Ա+Գ+Զ:Բ+Ե+Թ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու համեմատութեանց մէկն իր այսինչերորդ մասովը աւելցուի կամ պակսեցուի, միւսն ալ իր նոյներորդ մասովը աւելցուի կամ պակսեցուի, ելած համեմատութեանները՝ այն երկու համեմատութեանց ունեցած ընդհանուր համեմատականը կ'ունենան։

Եթէ Ա *աւելցուի կամ պակսեցուի* $\frac{Ա}{յ}$ *ով*, Ե *ալ* $\frac{Ե}{յ}$ *ով*,

անատեն Ա:Ե::Ա ± $\frac{Ա}{յ}$: Ե ± $\frac{Ե}{յ}$.

քանզի յայտնի է թէ Ա×(Ե ± $\frac{Ե}{յ}$)=Ե×(Ա ± $\frac{Ա}{յ}$), *որովհետև իւրաքանչիւր անդամ հաւասար է* Ա·Ե + $\frac{Ե·Ա}{յ}$ *ի*.

ուրեմն չորս քանակութիւններն իրարու համեմատական են (Նախ. Բ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Իրարու համեմատական եղող չորս քանակութեանց նման կարողութիւններն ալ իրարու համեմատական են։

Եթէ Ա:Բ::Գ:Ե,
անատեն Ա^{ն}:Բ^{ն}::Գ^{ն}:Ե^{ն}.
քանզի $\frac{Բ}{Ա}=\frac{Ե}{Գ}$ (Սահ. 2), *և երկու անդամները ն կարողութեան հանելով կ'ունենանք*
$\frac{Բ^{ն}}{Ա^{ն}}=\frac{Ե^{ն}}{Գ^{ն}}$.
ուրեմն Ա^{ն}:Բ^{ն}::Գ^{ն}:Ե^{ն}։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու կարգ համեմատութեանց մէկուն առաջին եզրը միւսին առաջին եզրովը, երկրորդը՝ երկրորդովը, և այլն, բազմապատկուին, արտադրեալներն իրարու համեմատական կ'ըլլան։

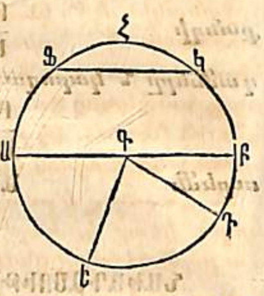
Եթէ Ա:Բ::Գ:Ե,
և Զ:Է::Ը:Թ,
անատեն Ա×Զ:Բ×Է::Գ×Ը:Ե×Թ.
քանզի, որովհետև Ա×Ե=Բ×Գ,
և Զ×Թ=Է×Ը,
Ա×Ե×Զ×Թ=Բ×Գ×Է×Ը,
կամ (Ա×Զ)×(Ե×Թ)=(Բ×Է)×(Գ×Ը).
ուրեմն Ա×Զ:Բ×Է::Գ×Ը:Ե×Թ։

ԳԻՐՔ Գ.

ԲՈԼՈՐԱԿ, ԵՒ ԱՆԿԵԱՆՑ ՉԱՓՈՒԻԼԸ

Սահմանք։

1. Բոլորակը մակարդակ է կոր գծի մը մէջ առնուած, որուն ամէն մէկ կէտը հաւասարապէս հեռու է գծէն ներս եղող, կեդրոն կոչուած, կէտէ մը։ Բոլորակը շրջապատող կոր գիծը շրջանակ կը կոչուի։ Զորօրինակ, Գ՝ բոլորակին կեդրոնը, եւ Ա, Ե, Դ եւայլն կոր գիծը բոլորակին շրջանակն է։



2. Կեդրոնէն մինչեւ շրջանակը քաշուած որեւիցէ ուղիղ գիծ, ԳԱ, ԳԵ, ԳԴ, շառաւիղ կը կոչուի. եւ կեդրոնին վրայէն անցնելով երկու կողմէն շրջանակին դպչող գիծը, ԱԲ, տրամագիծ կը կոչուի։

Բոլորակին համար տրուած սահմանէն յայտնի է թէ բոլորակի մը բոլոր շառաւիղներն իրարու հաւասար՝ տրամագիծներն ալ իրարու հաւասար են, եւ իւրաքանչիւր տրամագիծ՝ շառաւիղին կրկինն է։

3. Շրջանակին որեւիցէ մասը, ՖՀԿ, աղեղ եւ աղեղին երկու ծայրերն իրար միացընող գիծը, ՖԿ, աղեղին լար կը կոչուի։

4. Հատուածը բոլորակին այն մասն է որ աղեղի մը եւ անոր լարին մէջտեղը կ'իյնայ։

5. Հատիչ կ'ըսուի բոլորակին այն մասին որ երկու շառաւիղներու, ԳԵ եւ ԳԴ, եւ անոնց մէջ կեցած աղեղան մէջտեղը, ԴԵ, կ'իյնայ։

6. Ուղիղ գիծ մը բոլորակի մը ներսը գծուած է կ'ըսուի, երբ անոր ծայրերը շրջանակին մէջն են։

Անկիւն մը, ԲԱԳ, որուն կողմերը լարեր են, գագաթն ալ շրջանակին մէջն է, շրջագծէ անկիւն կը կոչուի։

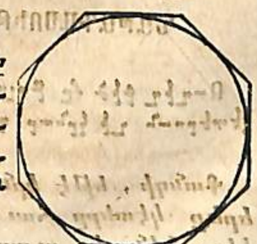
7. Ներսը գծուած եռանկիւնն այն է որուն երեք անկեան գագաթները շրջանակին մէջն են, ինչպէս ԲԱԳ. եւ, առհասարակ, որեւիցէ բազմանկիւն ներսը գծուած է կ'ըսուի, երբ անոր բոլոր անկեանց գագաթները շրջանակին մէջն են. այս պարագային մէջ շրջանակը բազմանկեան դուրսը գծուած է կ'ըսուի։

8. Հատանող կ'ըսուի այն գծին, ԱԲ, որ շրջանակին երկու կէտը կը կտրէ, եւ որուն մէկ մասը շրջանակին դուրսը՝ ու մէկ մասը ներսը կ'իյնայ։

9. Շօշափող կ'ըսուի այն գծին որ շրջանակին կը դպչի միայն մէկ կէտի վրայ, որչափ որ երկնցուի. ինչպէս ԳԴ։ Շօշափման կէտ կ'ըսուի այն կէտին՝ ուր շօշափողն ու շրջանակը իրարու կը դպչին։

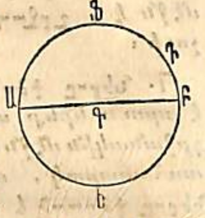
10. Երկու շրջանակ իրարու կը դպչին կ'ըսուի, երբ միայն մէկ հասարակաց կէտ ունին։

11. Բազմանկիւն մը բոլորակի մը դուրսը գծուած է կ'ըսուի, երբ անոր բոլոր կողմերը շրջանակին շօշափողներ են. եւ անատեն բոլորակը բազմանկեան ներսը գծուած է կ'ըսուի։



ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն տրամագիծ՝ բոլորակն և անոր շրջանակը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։

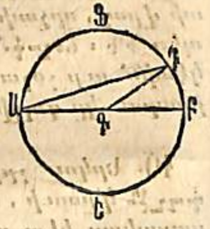


ԱԵԴՑ բոլորակին ԱԲ տրամագիծը բոլորակն եւ անոր շրջանակը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ ։

Քանզի , եթէ ԱԵԲ մասը ԱՑԲ մասին վրայ դրուի , անոնց հասարակաց եղող ԱԲ խարսխին դիրքը չփոխուելով , ԱԵԲ եւ ԱՑԲ կոր գծերը զուգընթաց պիտի ըլլան . ապա թէ ոչ , մէկուն կամ միւսին վրայ կեդրոնէն անհաւասարապէս հեռու կէտեր կան , որ բոլորակի համար տրուած սահմանին հակառակ է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն լար տրամագծէն փոքր է։



ԱԴ լարը ԱԲ տրամագծէն փոքր է ։ Քաշէ ԳԱ եւ ԳԴ շառաւիղները լարին ծայրերուն ։ ԱԴ$<$ ԱԳ$+$ԳԴ (Գիրք Ա. Նախ. Է.) . կամ ԱԴ$<$ԱԲ ։

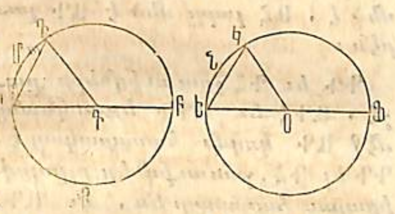
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ գիծ մը բոլորակի մը շրջանակին երկուքէն աւելի կէտերու չի կրնար դպչիլ։

Քանզի , եթէ կրնար երեք կէտերու դպչիլ , այս երեք կէտերը հաւասարապէս հեռու պիտի ըլլային կեդրոնէն , եւ ուստի , առ այս կէտերը քաշուած շառաւիղներն իրարու հաւասար երեք ուղիղ գիծ պիտի ըլլային միեւնոյն կէտէն միեւնոյն ուղիղ գծին քաշուած , որ անկարելի է (Գիրք Ա. Նախ . ԺԵ. Հետ. 2)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բոլորակի կամ հաւասար բոլորակաց հաւասար աղեղները հաւասար լարեր ունին . եւ , հակադարձաբար , հաւասար լարերը հաւասար աղեղներ ունին ։



Եթէ ԱԳ եւ ԵՕ շառաւիղներն իրարու հաւասար են , նաեւ ԱՄԴ եւ ԵՆԿ աղեղներն ալ , ԱԴ լարը հաւասար է ԵԿ լարին ։

Քանզի , որովհետեւ ԱԲ եւ ԵՖ տրամագիծերը իրարու հաւասար են , ԱՄԴԲ կիսաբոլորակը կրնայ ԵՆԿՖ կիսաբոլորակին վրայ դրուիլ , եւ ԱՄԴԲ ու ԵՆԿՖ կոր գծերն իրարու զուգընթաց պիտի ըլլան ։ Բայց ԱՄԴ մասը , ենթադրութեամբ , հաւասար է ԵՆԿ մասին . ուստի Դ կէտը Կ կէտին վրայ պիտի իյնայ . ուրեմն ԱԴ լարը հաւասար է ԵԿ լարին ։

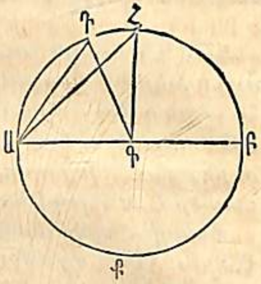
Հակադարձաբար , եթէ ԱԳ եւ ԵՕ շառաւիղներն իրարու հաւասար են , նաեւ ԱԴ լարը՝ ԵԿ լարին , ԱՄԴ եւ ԵՆԿ աղեղներն իրարու հաւասար են ։

Քանզի , քաշէ ԳԴ եւ ՕԿ շառաւիղները . ԱԳԴ եւ ԵՕԿ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարակողմ են , եւ հետեւապէս իրարու հաւասար . ուստի ԱԳԴ անկիւնը հաւասար է ԵՕԿ անկեան (Գիրք Ա. Նախ. Ժ.)։ Արդ , եթէ ԱԴԲ կիսաբոլորակը դրուի ԵԿՖ կիսաբոլորակին վրայ , որովհետեւ ԱԳԴ եւ ԵՕԿ անկիւններն իրարու հաւասար են , յայտնի է թէ ԳԴ շառաւիղը ՕԿ շառաւիղին վրայ պիտի իյնայ , Դ կէտն ալ Կ կէտին վրայ . ուրեմն ԱՄԴ աղեղը ԵՆԿ աղեղան հաւասար է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բոլորակի կամ հաւասար բոլորակաց մեծագոյն աղեղը մեծագոյն լար ունի, եւ, հակադարձաբար, մեծագոյն լարը մեծագոյն աղեղ ունի։

Եթէ ԱՀ աղեղը ԱԴ աղեղէն մեծ է, ԱՀ լարը մեծ է ԱԴ լարէն։

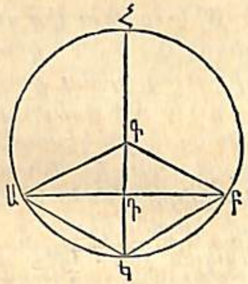


ԳԴ եւ ԳՀ շառաւիղները քաշէ. ԱԳՀ եւ ԱԳԴ եռանկեանց մէջ ԱԳ կողմը հասարակաց է, ԳԴ եւ ԳՀ, շառաւիղներ ըլլալով, իրարու հաւասար են, եւ ԱԳՀ անկիւնը մեծ է ԱԳԴ անկիւնէն. ուստի երրորդ կողմը, ԱՀ, մեծ է ԱԴ կողմէն (Գիրք Ա. Նախ. Թ.). ուրեմն մեծագոյն աղեղը մեծագոյն լար ունի։ Հակադարձաբար, եթէ ԱՀ լարը ԱԴ լարէն մեծ է, ԱՀ աղեղը մեծ է ԱԴ աղեղէն։ Քանզի, եթէ ԱԴՀ աղեղը հաւասար ըլլար ԱԴ աղեղան, ԱՀ լարն ալ ԱԴ լարին հաւասար պիտի ըլլար (Նախ. Դ.). եւ, եթէ փոքր ըլլար, ԱՀ լարն ալ ԱԴ լարէն փոքր պիտի ըլլար, որոնց երկուքն ալ ենթադրութեան հակառակ են. ուրեմն, ԱԴՀ աղեղը մեծ է ԱԴ աղեղէն։

Պար. Աս տեղը յիշուած աղեղները կիսաշրջանակէն փոքր են. եթէ մեծ ըլլային, հակադարձը ճշմարիտ պիտի ըլլար. քանզի անատեն որչափ որ աղեղները մեծնան, լարերն այնչափ կը պզտիկնան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Լարի մը ուղղահայեաց քաշուած շառաւիղը՝ լարը եւ անոր աղեղը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։



Եթէ ԿԳ շառաւիղը ուղղահայեաց է ԱԲ լարին, ԱԴ հաւասար է ԲԴ ին, եւ ԱԿ աղեղը՝ ԿԲ աղեղան։

ԳԱ եւ ԳԲ շառաւիղները քաշէ։ ԱԴԳ եւ ԲԴԳ ուղղանկիւն եռանկեանց մէջ ԱԳ եւ ԳԲ կողմերը, շառաւիղներ ըլլալով, իրարու հաւասար են, եւ ԳԴ հասարակաց է. ուրեմն ԱԴ հաւասար է ԲԴ ին (Գիրք Ա. Նախ. ԺԷ.)։

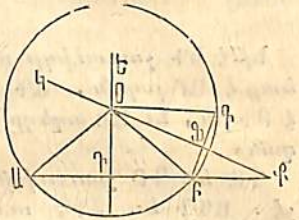
Դարձեալ, որովհետեւ ԱԴ եւ ԲԴ իրարու հաւասար են, ԳԿ շառաւիղը ԱԲ ին միջին կէտէն, Դ, քաշուած ուղղահայեաց է. ուստի անոր ամէն մէկ կէտը հաւասարապէս հեռու է Ա եւ Բ ծայրերէն (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ.). ուրեմն ԱԿ հաւասար է ԿԲ ին։ Բայց եթէ ԱԿ լարը հաւասար է ԿԲ լարին, ԱԿ աղեղն ալ հաւասար է ԿԲ աղեղան (Նախ. Դ.). ուրեմն լարի մը ուղղահայեաց քաշուած շառաւիղը լարը եւ անոր աղեղը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։

Պար. Գ կեդրոնը, ԱԲ լարին միջին կէտը, Դ, եւ ԱԿԲ աղեղան միջին կէտը, Կ, միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ են։ Բայց երկու կէտ բաւական են ուղիղ գծի մը դիրքը որոշելու, ուստի աս երեք կէտերուն որեւէ երկուքէն անցնող ուղիղ գիծը, հարկաւ երրորդէն ալ կ'անցնի եւ ուղղահայեաց կ'ըլլայ լարին։

Նաեւ յայտնի է թէ լարի մը մէջէն կէտէն քաշուած ուղղահայեացը բոլորակին կեդրոնէն եւ աղեղին մէջէն կէտէն կ'անցնի։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն գծին վրայ չեղող որեւէ երեք կէտերու վրայէն մէկ շրջանակ՝ եւ միայն մէկ կրնայ քաշուիլ:



Միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ չեղող Ա, Բ, Գ, կէտերէն մէկ շրջանակ կրնայ քաշուիլ:

ԱԲ եւ ԲԳ գծերը քաշէ, եւ անոնց միջին կէտերէն, Դ, Ֆ, քաշէ ԴԵ եւ ՖԿ ուղղահայեացները: ԴԵ եւ ՖԿ իրար պիտի կտրեն կէտի մը վրայ, ինչպէս Օ, եթէ զուգահեռական չեն: Եթէ զուգահեռական ըլլային, ԴԵ գծին ուղղահայեաց եղող ԱԲ գիծը ՖԿ գծին ալ ուղղահայեաց պիտի ըլլար, եւ Ք անկիւնը ուղիղ անկիւն պիտի ըլլար (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ. 1): Բայց ԱԲ գծին շարունակութիւնն եղող ԲՔ գիծը նոյն չէ ԲԳ գծին հետ, քանզի Ա, Բ, Գ կէտերը միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ չեն. ուստի երկու ուղղահայեաց, ԲՖ, ԲՔ, քաշուած պիտի ըլլար միեւնոյն կէտէն, Բ, միեւնոյն ուղիղ գծին, որ անկարելի է (Գիրք Ա. Նախ. ԺԴ.). ուրեմն ԴԵ եւ ՖԿ իրար պիտի կտրեն կէտի մը վրայ, ինչպէս Օ:

Նաեւ Օ կէտը, որովհետեւ ԴԵ ուղղահայեացին վրայ է, հաւասարապէս հեռու է Ա եւ Բ կէտերէն (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ.). եւ, որովհետեւ նոյն կէտը, Օ, ՖԿ ուղղահայեացին վրայ է, հաւասարապէս հեռու է Բ եւ Գ կէտերէն. ուստի, ՕԱ, ՕԲ, ՕԳ իրարու հաւասար են, եւ, եթէ Օ կեդրոնէն ՕԲ շառաւիղով շրջանակ մը քաշուի, Ա եւ Գ կէտերուն վրայէն պիտի անցնի. ուրեմն միեւնոյն գծին վրայ չեղող որեւէ երեք կէտերու վրայէն, մէկ շրջանակ կրնայ քաշուիլ:

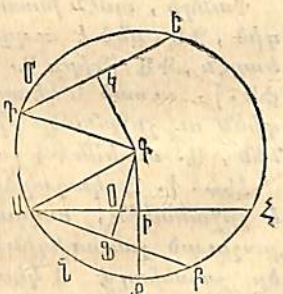
Դարձեալ, միայն մէկ շրջանակ կրնայ քաշուիլ, քանզի, եթէ ուրիշ մը կրնար քաշուիլ, անոր կեդրոնը ԴԵ գծին վրայ պիտի ըլլար, ապա թէ ոչ հաւասա-

րապէս հեռու պիտի չըլլար Ա եւ Բ կէտերէն (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ.). Նաեւ աս կեդրոնը ՖԿ գծին վրայ ալ պիտի ըլլար նոյն տեսակ պատճառաւ. բայց երկու ուղիղ գիծ միայն մէկ կէտի վրայ կրնան իրար կտրել, ուստի երեք կէտերու վրայէն միայն մէկ շրջանակ կրնայ քաշուիլ:

Պար. Երկու շրջանակ երկուքէն աւելի կէտերու վրայ իրար չեն կրնար կտրել. քանզի եթէ երեք կէտերու վրայ կարենային կտրել, անատեն միեւնոյն երեք կէտերու վրայէն երկու շրջանակ քաշուած պիտի ըլլար, որ անկարելի է:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բոլորակին կամ հաւասար բոլորակաց հաւասար լարերը հաւասարապէս հեռու են կեդրոնէն, եւ երկու անհաւասար լարերուն փոքրը կեդրոնէն հեռու է:

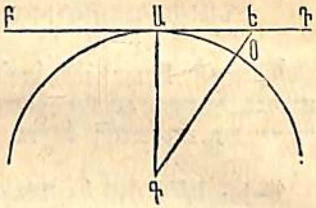


Նախ. Եթէ ԱԲ եւ ԴԵ լարերը իրարու հաւասար են, հաւասարապէս հեռու են Գ կեդրոնէն: Այս լարերուն միջին կէտերուն քաշէ ԳԿ եւ ԳՖ ուղղահայեացները, նաեւ ԳԱ եւ ԳԴ շառաւիղները: ԳԱՖ եւ ԳԴԿ ուղղանկիւն եռանկեանց հակուղիղները, ԳԱ եւ ԳԴ, իրարու հաւասար են, եւ ԱԲ լարին կէսն եղող ԱՖ կողմը հաւասար է ԴԵ ին կէսն եղող ԴԿ կողման. ուստի եռանկիւններն իրարու հաւասար են, եւ ԳՖ հաւասար է ԳԿ ին (Գիրք Ա. Նախ. ԺԷ.). ուրեմն ԱԲ եւ ԴԵ լարերը հաւասարապէս հեռու են կեդրոնէն:

Երկրորդ. Եթէ ԴԵ լարը փոքր է ԱՀ լարէն, ԴԵ աւելի հեռու է Գ կեդրոնէն: ԱՔՀ աղեղը մեծ է ԴՄԵ աղեղէն (Նախ. Ե.). ԱՔՀ աղեղէն ԱՆԲ մասը կտրէ ԴՄԵ աղեղան հաւասար. քաշէ ԱԲ լարը, քաշէ նաեւ անոր ուղղահայեաց ԳՖ, ու ԱՀ լարին ուղղահայեաց ԳԻ գծերը ։ Յայտնի է թէ ԳՖ մեծ է ԳՕ էն, եւ ԳՕ մեծ է ԳԻ էն (Գիրք Ա. Նախ. ԺԵ.) . ուստի ԳՖ առաւել եւս մեծ է ԳԻ էն ։ Բայց ԳՖ հաւասար է ԳԿ ին, քանզի ԱԲ եւ ԴԵ լարերն իրարու հաւասար են. ուստի ԳԿ > ԳԻ . ուրեմն երկու անհաւասար լարերուն փոքրը կեդրոնէն հեռու է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շառաւիղի մը ծայրը շառաւիղին ուղղահայեաց քաշուած գիծը, շրջանակին շօշափող է ։



ԱԳ շառաւիղին ծայրը, Ա, շառաւիղին ուղղահայեաց ԲԴ գիծը քաշէ . շրջանակին ալ շօշափող կ'ըլլայ ։ Քանզի, ամէն խոտորնակ գիծ, ԳԵ, մեծ է ուղղահայեացէն, ԳԱ (Գիրք Ա. Նախ. ԺԵ.) . ուստի Ե կէտը բոլորակին դուրսն է, եւ ԲԴ գիծն ու շրջանակը միայն մէկ հասարակաց կէտ ունին, Ա. ուրեմն ԲԴ շօշափող է շրջանակին (Սահմ. 9) ։

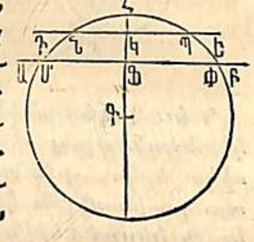
Հետ. 1. Հակադարձաբար, եթէ ԲԴ գիծը շօշափող է շրջանակին, ուղղահայեաց է առ շօշափման կէտը քաշուած շառաւիղին ։ Քանզի, որովհետեւ ԲԴ գիծը շօշափող է Ա կէտին վրայ, անոր ուրիշ ամէն կէտը, ինչպէս Ե, շրջանակէն դուրս է, եւ ԳԵ > ԳՕ կամ ԳԱ . ուստի ԳԱ՝ կեդրոնէն առ ԲԴ քաշուած գծերուն ամենափոքր գիծն է . ուրեմն ԲԴ ուղղահայեաց է ԳԱ շառաւիղին (Գիրք Ա. Նախ. ԺԵ. Հետ. 1) ։

Հետ. 2. Շրջանակի մը որեւիցէ կէտէն, Ա, միայն մէկ շօշափող կրնայ քաշուիլ . քանզի, եթէ ուրիշ մը կրնար քաշուիլ, ան ալ ուղղահայեաց պիտի ըլլար ԳԱ շառաւիղին (Հետ. 1) . բայց Ա կէտէն ԳԱ շառաւիղին ուղղահայեաց միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ (Գիրք

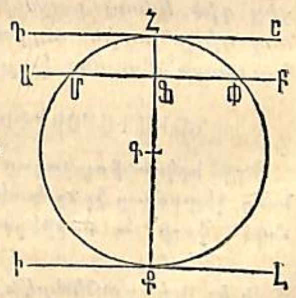
Ա. Նախ. ԺԴ. Հետ.) . ուրեմն Ա կէտէն միայն մէկ շօշափող կրնայ քաշուիլ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շրջանակի մը երկու զուգահեռականաց մէջտեղը եղող աղեղները իրարու հաւասար են ։



Նախ. Երբ զուգահեռականք հատանող են, ԱԲ եւ ԴԵ, մէկուն, ԱԲ, ուղղահայեաց ԳՀ շառաւիղը քաշէ . միւսին ալ ուղղահայեաց կ'ըլլայ (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ. 1) . ուստի Հ կէտը ՄՀՓ եւ ՆՀՊ աղեղներուն միջին կէտն է (Նախ. Զ.) . ուստի ՄՀ=ՀՓ, եւ ՆՀ=ՀՊ . ուրեմն ՄՀ—ՆՀ=ՀՓ—ՀՊ, կամ ՄՆ աղեղը հաւասար է ՓՊ աղեղան ։

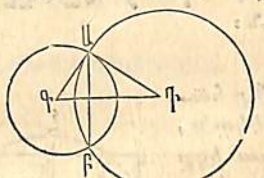


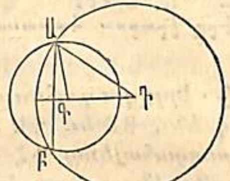
Երկրորդ. Երբ զուգահեռականաց մէկը, ԱԲ, հատանող՝ եւ միւսը, ԴԵ, շօշափող է, քաշէ ԳՀ շառաւիղը շօշափման կէտին, Հ. ԴԵ շօշափողին ուղղահայեաց կ'ըլլայ (Նախ. Բ.), անոր զուգահեռականին ալ, ՄՓ ։ Բայց, որովհետեւ ԳՀ ուղղահայեաց է ՄՓ լարին, Հ կէտը ՄՀՓ աղեղան միջին կէտն է (Նախ. Զ.) . ուրեմն ՄՀ աղեղը հաւասար է ՀՓ աղեղան ։

Երրորդ. Երբ զուգահեռականք, ԴԵ եւ ԻԼ, շօշափող են, մէկը Հ եւ միւսը Ք կէտին վրայ, քաշէ ԱԲ զուգահեռական հատանողը . յայտնի է թէ ՄՀ=ՀՓ եւ ՄՔ=ՔՓ . ուստի ՀՄՔ ամբողջ աղեղը հաւասար է ՀՓՔ աղեղան ։ Նաեւ յայտնի է թէ աս աղեղներուն իւրաքանչիւրը կիսաշրջանակ է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու շրջանակ երկու կէտերու վրայ իրար կը կտրեն, անոնց կեդրոններուն վրայէն անցնող գիծը ուղղահայեաց է այն երկու կէտերն իրար միացնող լարին, և զանիկա երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։

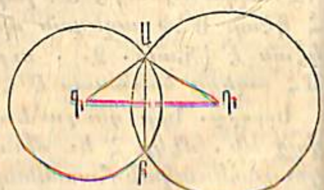




Գ եւ Դ կեդրոններն ունեցող շրջանակները՝ Ա եւ Բ կէտերուն վրայ իրար կը կտրեն։ Քաշէ ԱԲ գիծը. ասիկա երկու շրջանակներուն հասարակաց լար է։ Եթէ այս լարին միջին կէտէն ուղղահայեաց մը քաշուի, Գ եւ Դ կեդրոններէն պիտի անցնի (Նախ. Զ. Պար.)։ Բայց որեւիցէ երկու կէտերու վրայէն միայն մէկ ուղիղ գիծ կրնայ քաշուիլ. ուրեմն կեդրոններէն անցնող գիծը լարին ուղղահայեաց է եւ զանիկա երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու բոլորակաց շրջանակներն իրար կը կտրեն, անոնց կեդրոնաց իրարմէ հեռաւորութիւնը շառաւիղաց գումարէն փոքր՝ և տարբերութենէն մեծ է։



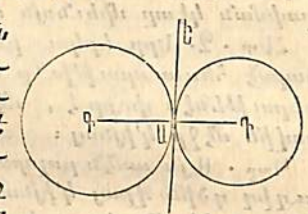
Գ եւ Դ կեդրոններէն ԳԱ եւ ԴԱ շառաւիղներով երկու շրջանակ քաշէ. եթէ շրջանակներն իրար կը կտրեն, ԳԱԴ եռանկիւնը կրնայ կազմուիլ, եւ

ԳԴ < ԳԱ+ԴԱ (Գիրք Ա. Նախ. Ի.),

նաեւ ԳԴ > ԴԱ—ԳԱ (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը անոնց շառաւիղներուն գումարէն հաւասար է, շրջանակները դուրսէն իրարու կը դպչին։

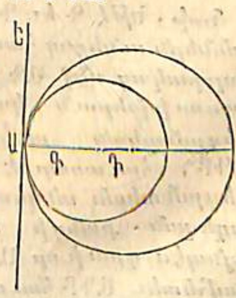


Եթէ Գ եւ Դ կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը հաւասար է ԱԳ եւ ԱԴ շառաւիղաց գումարին, յայտնի է թէ երկու բոլորակները Ա հասարակաց կէտը ունին. եւ ուրիշ հասարակաց կէտ չեն կրնար ունենալ, քանզի, եթէ երկու ունենային, բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը շառաւիղներուն գումարէն փոքր պիտի ըլլար։

Հետ. Երբ երկու բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը անոնց շառաւիղներուն գումարէն մեծ է, մէկ շրջանակը միւսէն բոլորովին դուրս կ'իյնայ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը անոնց շառաւիղներուն տարբերութեանը հաւասար է, շրջանակները ներսէն իրարու կը դպչին։



Եթէ Գ եւ Դ կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը հաւասար է ԱԴ եւ ԱԳ շառաւիղաց տարբերութեանը, յայտնի է թէ երկու բոլորակները Ա հասարակաց կէտը ունին. եւ ուրիշ հասարակաց կէտ չեն կրնար ունենալ, քանզի, եթէ երկու ունենային, բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորու-

թիւնը շառաւիղներուն տարբերութենէն մեծ պիտի ըլլար (Նախ. ԺԲ.) , բայց աս հակառակ է ենթադրութեան , ուրեմն բոլորակները ներսէն իրարու պիտի դպչին ։

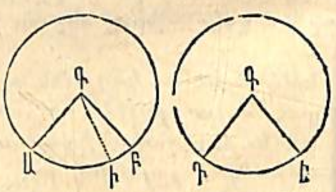
Հետ. 1. *Երբ երկու բոլորակ կամ դուրսէն կամ ներսէն իրարու կը դպչին , անոնց կեդրոններն ու շօշափման կէտը միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ կ'լլան ։*

Հետ. 2. *Երբ երկու բոլորակաց կեդրոններուն իրարմէ հեռաւորութիւնը անոնց շառաւիղներուն տարբերութենէն փոքր է , մէկ շրջանակը միւսին բոլորակին մէջը կ'լլայ ։*

Պոր. *Այն ամէն բոլորակները որոնց կեդրոնները ԱԴ ուղիղ գծին վրայ կ'լլան , եւ որք Ա կէտէն կ'անցնին , Ա կէտին վրայ իրար կը շօշափեն ։ Քանզի միայն Ա հասարակաց կէտն ունին . եւ եթէ Ա կէտէն ԱԵ գիծը քաշուի ԱԴ ին ուղղահայեաց , ԱԵ ամէն բոլորակներուն հասարակաց շօշափող պիտի ըլլայ ։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բոլորակին կամ հաւասար բոլորակաց մէջ, հաւասար կեդրոնական անկիւնները շրջանակէն հաւասար աղեղներ կը կտրեն . և , հակադարձաբար , երբ կտրուած աղեղներն իրարու հաւասար են , կեդրոնական անկիւններն ալ իրարու հաւասար են ։



Նախ. *Եթէ Գ եւ Գ կեդրոններն ունեցող հաւասար բոլորակաց մէջ ԱԳ եւ ԲԳ շառաւիղներուն կազմած կեդրոնական անկիւնը , ԱԳԲ , հաւասար է ԴԳԵ կեդրոնական անկեան , ԱԲ աղեղն ալ հաւասար է ԴԵ աղեղան . քանզի , եթէ մէկ բոլորակը միւսին վրայ այնպէս դրուի որ Ա կէտը Դ կէտին վրայ լինայ , ուրովհետեւ ԱԳԲ հաւասար է ԴԳԵ անկեան , Բ կէտն ալ*

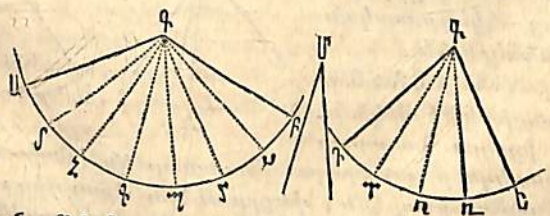
Ե կէտին վրայ պիտի լինայ , եւ ԱԲ աղեղը զուգընթաց պիտի ըլլայ ԴԵ աղեղան . ուրեմն ԱԲ հաւասար է ԴԵ ին ։

Երկրորդ. *Եթէ ԱԲ եւ ԴԵ աղեղներն իրարու հաւասար են , ԱԳԲ ու ԴԳԵ կեդրոնական անկիւններն ալ իրարու հաւասար են . քանզի , եթէ հաւասար չեն , ենթադրենք թէ ԱԳԲ մեծ է ։ Անկէ կտրէ ԴԳԵ անկեան հաւասար ԱԳԻ անկիւնը ։ Արդէն ապացուցածէն կը հետեւի թէ ԱԻ = ԴԵ աղեղան . բայց , ըստ ենթադրութեան , ԱԲ=ԴԵ , ուստի ԱԻ=ԱԲ , այսինքն մասը ամբողջին հաւասար է , որ անկարելի է (Առ. 8) . ուրեմն ԱԳԲ անկիւնը հաւասար է ԴԳԵ անկեան ։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ միեւնոյն բոլորակին կամ հաւասար բոլորակաց երկու կեդրոնական անկիւններն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս երկու ամբողջ թիւ , անոնց կտրած աղեղներն ալ նոյնպէս իրարու կը համեմատին . կամ մէկ անկիւնը միւսին այնպէս կը համեմատի ինչպէս մէկ աղեղը՝ միւսին ։

Եթէ հաւասար բոլորակաց ԱԳԲ կեդրոնական անկիւնը այնպէս կը համեմատի ԴԳԵ կեդրոնական անկեան ինչպէս 7՝ 4 ին , այսինքն , եթէ Մ անկիւնը , չափ ըլլալով , ԱԳԲ անկեան մէջ՝ 7 անգամ , իսկ ԴԳԵ



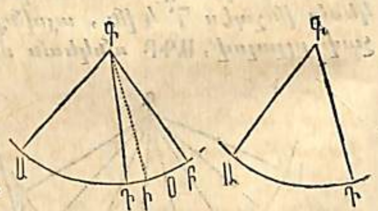
անկեան մէջ 4 անգամ կը պարունակուի , ԱԲ աղեղն ալ ԴԵ աղեղան այնպէս կը համեմատի ինչպէս 7՝ 4 ին ։ Քանզի , որովհետեւ ԱԳԲ անկեան մէջ պարունակեալ եօթը փոքր անկեանց իւրաքանչիւրը հաւասար է ԴԳԵ անկեան մէջ եղող չորս փոքր անկեանց որեւէ մէկուն, ԱԲ աղեղան մէջ եղող իւրաքանչիւր փոքր աղեղը՝ ԴԵ աղեղան մէջ եղող որեւէ փոքր աղեղան հաւասար է (Նախ. ԺԵ.). ուստի ամբողջ աղեղը, ԱԲ, ամբողջ աղեղան, ԴԵ, այնպէս կը համեմատի ինչպէս 7՝ 4 ին: Եթէ 7 եւ 4 թիւերուն տեղը ուրիշ որեւիցէ թիւեր գործածուին, նոյն ապացուցութիւնը յարմար կ'ըլլայ. ուրեմն, երբ երկու կեդրոնական անկիւններ իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս երկու ամբողջ թիւ, անոնց աղեղներն ալ նոյնպէս իրարու կը համեմատին:

Հէտ. Հակադարձաբար, եթէ ԱԲ եւ ԴԵ աղեղներն իրարու կը համեմատին ինչպէս երկու ամբողջ թիւ, ԱԳԲ եւ ԴԳԵ անկիւններն ալ նոյնպէս իրարու կը համեմատին. կամ ԱԲ : ԴԵ :: ԱԳԲ : ԴԳԵ. քանզի, որովհետեւ ԱՃ, ՃԾ, ԴՓ, ՓՕ եւայլն աղեղներն իրարու հաւասար են, ԱԳՃ, ՃԳԾ, ԴԳՓ, ՓԳՕ եւայլն անկիւններն ալ իրարու հաւասար են. ուրեմն

ԱԲ : ԴԵ :: ԱԳԲ : ԴԳԵ :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բոլորակին կամ հաւասար բոլորակաց երկու կեդրոնական անկիւններն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց աղեղները:



Եթէ ԱԳԲ եւ ԱԳԴ երկու հաւասար բոլորակաց կեդրոնական անկիւններն են, ԱԳԲ : ԱԳԴ :: ԱԲ : ԱԴ:

Քանզի, եթէ անկիւններն իրարու հաւասար են, աղեղներն ալ իրարու հաւասար են (Նախ. ԺԵ.): Եթէ անհաւասար են, փոքրը մեծին վրայ դիր: Արդ, եթէ նախադասութիւնը ճշմարիտ չէ, ենթադրենք թէ ԱԳԲ անկիւնը ԱԳԴ անկեան այնպէս կը համեմատի, ինչպէս ԱԲ աղեղը ԱԴ էն մեծ եղող ԱՕ աղեղան, այսինքն ԱԳԲ : ԱԳԴ :: ԱԲ : ԱՕ:

Բաժնէ ԱԲ աղեղը ԴՕ էն փոքր քանի մը իրարու հաւասար մասանց. բաժանման կէտերուն գոնէ մէկը Դ եւ Օ կէտերուն մէջտեղ պիտի իյնայ, ինչպէս Ի. քաշէ ԳԻ. ԱԲ եւ ԱԻ աղեղներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս երկու ամբողջ թիւ (Նախ. ԺԶ.). ուստի ԱԳԲ : ԱԳԻ :: ԱԲ : ԱԻ:

Այս երկու կարգ համեմատութեանց նախադասները նոյն են. ուստի յետադասներն իրարու համեմատ են (Գիրք Բ. Նախ. Դ.). կամ ԱԳԴ : ԱԳԻ :: ԱՕ : ԱԻ: ԱՕ՝ ԱԻ էն մեծ է. ուստի, եթէ այս համեմատութիւնը ճշմարիտ է, ԱԳԴ ալ ԱԳԻ էն մեծ է, բայց ընդհակառակն փոքր է. ուրեմն ԱԳԲ այնպէս չի համեմատիր ԱԳԴին ինչպէս ԱԲ՝ ԱԴ էն մեծ եղող որեւէ աղեղան:

Կրնայ նոյն կերպով ապացուցուիլ թէ համեմատութեան չորրորդ եզրը, ԱՕ, ԱԴ էն փոքր չի կրնար ըլլալ. ուրեմն ԱԳԲ : ԱԳԴ :: ԱԲ : ԱԴ:

Պար. 1. Որովհետեւ բոլորակի մը կեդրոնական անկիւնը եւ անոր կողմանց կտրած աղեղը անանկ կապակցութիւն մը ունին որ, երբ մէկը կը պակսի կամ կ'աւելնայ, միւսն ալ նոյն համեմատութեամբ կը պակսի կամ կ'աւելնայ, վասնորոյ այս քանակութեանց մէկը միւսին չափ կրնայ համարուիլ. եւ այսուհետեւ ԱԲ աղեղը ԱԳԲ անկեան չափ պիտի համարուի: Երբ կեդրոնական անկիւններ իրարու հետ կը բաղդատուին, յայտնի է թէ զանոնք չափելու ծառայող աղեղները հաւասար շառաւիղներով գծուած ըլլալու են:

Պար. 2. Ուղիղ անկեան չափը՝ շրջանակին քառորդ մասը, այսինքն 90°ի աղեղն է. սրանկեան չափը՝ շրջանակին քառորդ մասէն, այսինքն 90° էն փոքր աղեղն է, եւ բթանկեան չափը՝ շրջանակին քառորդ մասէն, այսինքն 90° էն մեծ աղեղն է:

Պար. 3. Նախընթաց երեք նախադասութեանց մէջ ինչ որ ապացուցուեցաւ անկեանց՝ աղեղներու հետ բաղդատութեանը նկատմամբ, հաւասարապէս ճշմարիտ է հատիչները աղեղներու հետ բաղդատելու նըկատմամբ ալ: Քանզի հատիչները ոչ միայն հաւասար են երբ իրենց անկիւնները հաւասար են, այլեւ բոլ ամենայնի իրենց անկեանցը համեմատական են․ ուրեմն ԱԳԲ և ԱԳԴ նոյն բոլորակէն կամ հաւասար բոլորակաց հատուածները իրարու այնպէս են համեմատին ինչպէս այս հատուածներուն ԱԲ և ԱԴ խարիսխները։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

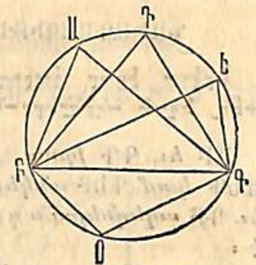
Շրջագծի անկեան մը չափը իր երկու կողմերուն մէջտեղի աղեղին կէսն է։

ԲԱԴ շրջապատի անկեան չափը ԲԴ աղեղան կէսն է։

Նախ․ Երբ բոլորակին կեդրոնը անկեան ներսը կ'իյնայ, ԱԵ տրամագիծն ու ԳԲ, ԳԴ շառաւիղները քաշէ։

ԲԳԱ եռանկեան արտաքին անկիւնը, ԲԳԵ, հաւասար է ԳԱԲ եւ ԳԲԱ ներքին անկեանց գումարին (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԵ․ Հետ․ 6)․ բայց, որովհետեւ ԲԱԳ եռանկիւնը երկկողմնազոյգ է, ԳԱԲ =ԳԲԱ անկեան․ ուստի ԲԳԵ անկիւնը ԲԱԳ անկեան կրկնապատիկն է։ Որովհետեւ ԲԳԵ կեդրոնական անկիւն է, անոր չափը՝ ԲԵ աղեղն է (Նախ․ ԺԲ․ Պար․ 1)․ ուստի ԲԱԳ անկեան չափը՝ ԲԵ աղեղան կէսն է։ Նմանապէս կրնայ ապացուցուիլ թէ ԳԱԴ անկեան չափը՝ ԵԴ աղեղան կէսն է․ ուրեմն ԲԱԳ+ԳԱԴ, կամ ԲԱԴ անկեան չափը՝ ԲԵ+ԵԴ, կամ ԲԴ աղեղան կէսն է։

Երկրորդ․ Երբ բոլորակին կեդրոնը անկեան դուրսը կ'իյնայ, ԱԵ տրամագիծը քաշէ։ ԲԱԵ անկեան չափը՝ ԲԵ աղեղան կէսն է․ ԴԱԵ անկեան չափը՝ ԴԵ աղեղան կէսն է․ ուստի ԲԱԵ—ԴԱԵ, կամ ԲԱԴ անկեան չափը՝ ԲԵ—ԴԵ, կամ ԲԴ աղեղան կէսն է․ ուրեմն ամէն շրջապատի անկեան չափը իր երկու կողմերուն մէջտեղի աղեղան կէսն է։



Հետ․ 1․ ԲԱԳ, ԲԴԳ եւ ԲԵԳ անկիւնները, միեւնոյն հատուածին մէջ գծուած ըլլալով, իրարու հաւասար են․ քանզի անոնց ամէն մէկուն չափը՝ ԲՕԳ աղեղան կէսն է։

Հետ․ 2․ Կիսաբոլորակի մը մէջ գծուած ամէն անկիւն, ԲԱԴ, ուղիղ անկիւն է․ քանզի անոր չափը կիսաշրջանակին կէսը կամ բոլոր շրջանակին մէկ չորրորդն է։

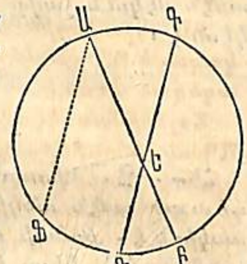
Հետ․ 3․ ԲԱԳ անկիւնը, կիսաբոլորակէն մեծ հատուածի մը մէջ գծուած ըլլալով, սրանկիւն է․ քանզի անոր չափը կիսաշրջանակէն փոքր եղող ԲՕԳ աղեղան կէսն է (Նախ․ ԺԲ․ Պար․ 2)։

ԲՕԳ անկիւնը, կիսաբոլորակէն փոքր հատուածի մը մէջ գծուած ըլլալով, բթանկիւն է․ քանզի անոր չափը կիսաշրջանակէն մեծ եղող ԲԱԳ աղեղան կէսն է։

Հետ․ 4․ ԱԲԳԴ ներսը գծուած քառանկեան Ա ու Գ ընդդիմակաց անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է․ քանզի ԲԱԴ անկեան չափը՝ ԲԳԴ աղեղան կէսն է, եւ ԲԳԴ անկեան չափը՝ ԲԱԴ աղեղան կէսն է․ այսինքն ԲԱԴ եւ ԲԳԴ անկեանց երկուքին չափը շրջանակին կէսն է․ ուրեմն անոնց գումարը երկու ուղիղ անկեանց հաւասար է (Նախ․ ԺԲ․ Պար․ 2)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու իրար կտրող լարաց անկեան չափը՝ անոնց մէջտեղ եղած աղեղներուն գումարին կէսն է։

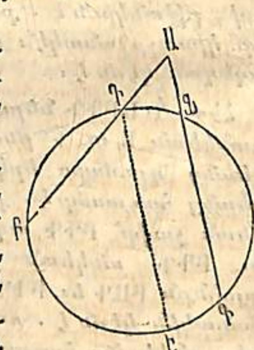


ԱԲ եւ ԳԴ իրար կտրող լարաց ԱԵԳ կամ ԴԵԲ անկեան չափը՝ ԱԳ եւ ԴԲ աղեղներուն գումարին կէսն է։

ԳԴ լարին զուգահեռական ԱՖ լարը քաշէ։ ԴՖ աղեղը հաւասար է ԱԳ աղեղան (Նախ. Ժ.). եւ ՖԱԲ անկիւնը հաւասար է ԴԵԲ անկեան (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ. 3)։ Բայց ՖԱԲ անկեան չափը՝ ՖԴԲ աղեղան կէսն է (Նախ. ԺԸ.). ուրեմն ԴԵԲ կամ ԱԵԳ անկեան չափը՝ ԲԴ ու ԴՖ, կամ ԲԴ ու ԱԳ աղեղներուն գումարին կէսն է։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԱԵԴ անկեան չափը՝ ԱԴ ու ԲԳ աղեղներուն գումարին կէսն է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ի. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու հատանողաց կազմած անկեան չափը՝ անոնց մէջտեղն եղած աղեղներուն տարբերութեան կէսն է։

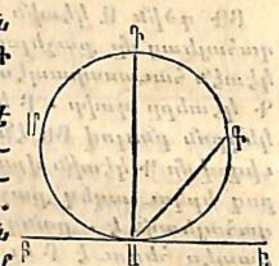


ԲԱ եւ ԱԳ հատանողաց կազմած ԲԱԳ անկեան չափը՝ ԲԳ ու ԴՖ աղեղներուն տարբերութեան կէսն է։

ԱԳ ին զուգահեռական ԴԵ գիծը քաշէ. ԵԳ աղեղը հաւասար է ԴՖ աղեղան, ԲԴԵ անկիւնն ալ՝ ԲԱԳ անկեան։ Բայց ԲԴԵ անկեան չափը՝ ԲԵ աղեղան կէսն է. ուստի ԲԱԳ անկեան չափն ալ՝ ԲԵ աղեղան կէսն է, այսինքն ԲԵԳ եւ ԵԳ կամ ԴՖ աղեղներուն տարբերութեան կէսը։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շօշափողէ եւ լարէ մը կազմած անկեան չափը՝ անոր կողմերուն մէջտեղի աղեղան կէսն է։



ԲԵ շօշափողին եւ ԱԳ լարին կազմած ԲԱԳ անկեան չափը՝ ԱՄԳ աղեղան կէսն է։

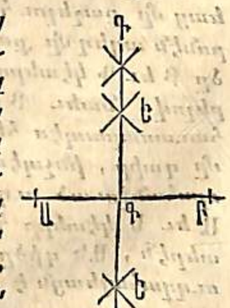
Շօշափման կէտէն, Ա, քաշէ ԱԴ տրամագիծը. ԲԱԴ ուղիղ անկիւն է (Նախ. Թ.) եւ անոր չափը՝ ԱՄԴ կիսաշրջանակին կէսն է. ԴԱԳ անկեան չափը՝ ԴԳ աղեղան կէսն է. ուստի ԲԱԴ+ԴԱԳ կամ ԲԱԳ անկեան չափը՝ ԱՄԴ+ԴԳ կամ ԱՄԴԳ աղեղան կէսն է։

Նաեւ, եթէ ԴԱԵ եւ ԴԱԳ անկեանց տարբերութիւնը գործածուի, կրնայ ապացուցուիլ թէ ԳԱԵ անկեան չափը՝ ԱԳ աղեղան կէսն է։

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

ԽՆԴԻՐ Ա.

Ուղիղ գիծ մը երկու հաւասար մասանց բաժնել։



ԱԲ գիծը երկու հաւասար մասանց բաժնելու համար, Ա եւ Բ կեդրոններէն, ԱԲ գծին կէսէն մեծ եղող ԱԴ շառաւիղով, Դ կէտին վրայ իրար կտրող երկու աղեղ քաշէ. Դ կէտը հաւասարապէս հեռու է Ա եւ Բ կէտերէն։ Նոյն կերպով ԱԲ գծին մէկ կամ միւս կողմը Ա եւ Բ կէտերէն հաւասարապէս հեռու ուրիշ կէտ մը, Ե, գտիր. Դ եւ Ե կէտերուն վրայէն ԴԵ գիծը քաշէ. ԴԵ կը բաժնէ ԱԲ գիծը երկու հաւասար մասանց (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ. Հետ.)։

ԽՆԴԻՐ Բ.

Ուղիղ գծի մը մէկ ծանօթ կէտին վրայ ուղղահայեաց մը հանել նոյն գծէն։

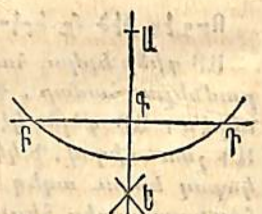
ԲԳ գծին Ա կէտին վրայ ուղղահայեաց մը քաշելու համար, Ա կէտէն հաւասարապէս հեռու Բ եւ Գ կէտերը գտիր. Բ եւ Գ կէտերը կեդրոն ընելով ԲԱ էն մեծ շառաւիղով մը Դ կէտին վրայ իրար կտրող երկու աղեղ քաշէ. ԱԴ գիծը պահանջուած ուղղահայեացն է. քանզի, որովհետեւ Դ կէտը հաւասարապէս հեռու է Բ եւ Գ կէտերէն, հարկաւ ԲԳ գծին Ա միջին կէտէն քաշուած ուղղահայեացին մէջն է (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ.). ուրեմն ԱԴ պահանջուած ուղղահայեացն է։

Պար. Նոյն կերպով ԲԳ գծին Ա կէտին վրայ ԲԱԴ ուղիղ անկիւնը կրնայ քաշուիլ։

ԽՆԴԻՐ Գ

Ուղիղ գծէ մը դուրս եղող կէտէ մը նոյն գծէն ուղղահայեաց մը հանել։

Ա կէտէն ԲԴ գծին ուղղահայեաց մը քաշելու համար, Ա կեդրոնէն աղեղ մը քաշէ յիշեալ գիծը Բ եւ Դ կէտերուն վրայ կտրելով. Նաեւ Բ եւ Դ կէտերէն հաւասարապէս հեռու եղող կէտ մը գտիր, ինչպէս Ե. ԱԵ գիծը պահանջուած ուղղահայեացն է. քանզի, որովհետեւ Ա եւ Ե կէտերը հաւասարապէս հեռու են Բ եւ Դ կէտերէն, ԱԵ գիծը ԲԴ գծին միջին կէտէն քաշուած ուղղահայեացն է (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ. Հետ.)։



ԽՆԴԻՐ Դ.

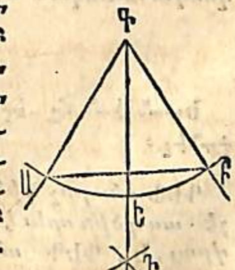
Գծի մը մէկ կէտին վրայ ծանօթ անկեան մը հաւասար անկիւն մը շինել։

ԱԲ գծին Ա կէտին վրայ ԻՔԼ անկեան հաւասար անկիւն մը շինելու համար, Ք գագաթը կեդրոն ընելով որեւէ շառաւիղով, ՔԻ, անկեան մէկ կողմէն մինչեւ միւսը ԻԼ աղեղը քաշէ. նոյն շառաւիղով Ա կեդրոնէն ԲՕ աղեղը քաշէ. Բ կեդրոնէն ԼԻ լարին հաւասար շառաւիղով աղեղ մը քաշէ, ԲՕ աղեղը Դ կէտին վրայ կտրելով. նաեւ ԱԴ գիծը քաշէ. ԴԱԲ անկիւնը պահանջուած անկիւնն է. քանզի, որովհետեւ ԲԴ եւ ԻԼ աղեղները հաւասար շառաւիղ եւ լարեր ունին, իրարու հաւասար են (Նախ. Գ.). ուրեմն ԲԱԴ եւ ԻՔԼ անկիւններն ալ իրարու հաւասար են։

ԽՆԴԻՐ Ե.

Աղեղ մը կամ անկիւն մը երկու հաւասար մասանց բաժնել։

Նախ. ԱԵԲ աղեղը երկու հաւասար մասանց բաժնելու համար, Ա եւ Բ կէտերը կեդրոն ընելով, հաւասար շառաւիղներով, Դ կէտին վրայ իրար կտրող երկու աղեղ քաշէ. ԳԴ գիծը ԱԲ աղեղը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ. քանզի Գ եւ Դ կէտերը հաւասարապէս հեռու են ԱԲ լարին ծայրերէն, Ա եւ Բ. ուստի ԳԴ ուղղահայեաց է ԱԲ լարին, եւ կը բաժնէ զանիկա երկու հաւասար մասանց (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ. Հետ.). ուրեմն ԱԲ աղեղն ալ երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ (Նախ. Զ.)։

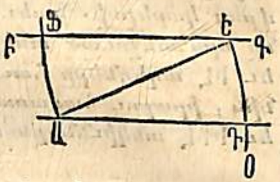


Երկրորդ. ԱԳԲ անկիւնը երկու հաւասար մասանց բաժնելու համար, Գ գագաթը կեդրոն ընելով ԱԵԲ աղեղը քաշէ. այս աղեղը երկու հաւասար մասանց բաժնէ վերոյիշեալ կերպով. յայտնի է թէ ԱԳԵ անկիւնը հաւասար է ԲԳԵ անկեան:

Պոր. ԱԵ եւ ԲԵ աղեղները նոյն կերպով կրնան բաժնուիլ, եւ այսպէս ծանօթ անկիւն մը երկու, չորս, ութ եւայլն հաւասար մասանց կրնայ բաժնուիլ:

ԽՆԴԻՐ Զ.

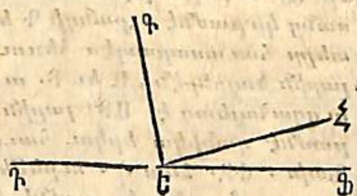
Տուած կէտէ մը վրայէն տուած գծի մը զուգահեռական մը տանել:



Ա կէտին վրայէն ԲԳ գծին զուգահեռական մը քաշելու համար, Ա կէտը կեդրոն ընելով ԵՕ աղեղը քաշէ. նաեւ Ե կէտը կեդրոն ընելով նոյն չառաւիղով ԱՖ աղեղը քաշէ. ԵՕ-էն ԱՖ աղեղին հաւասար ԵԴ աղեղը կտրէ. ԱԴ գիծը պահանջուած զուգահեռականն է: Քանզի, ԱԵ քաշելով, կը տեսնենք թէ ՖԵԱ եւ ԴԱԵ փոխադարձ անկիւնները իրարու հաւասար են. ուրեմն ԱԴ եւ ԲԳ զուգահեռական են (Գիրք Ա. Նախ. ԺԹ. Հետ. 1):

ԽՆԴԻՐ Է.

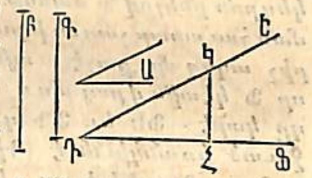
Եռանկեան մը երկու անկիւնները ճանչնալով երրորդը գտնել:



ԴԵՖ անորոշ գիծը քաշէ. աս գծին որեւէ կէտին վրայ, Ե, ԴԵԳ անկիւնը շինէ ծանօթ անկեանց մէկուն հաւասար. նաեւ ԳԵՀ անկիւնը՝ ծանօթ անկեանց միւսին հաւասար. ՀԵՖ պահանջուած անկիւնն է. քանզի աս երեք անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց (Գիրք Ա. Նախ. Ա. եւ ԻԵ.):

ԽՆԴԻՐ Ը.

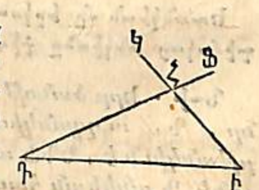
Եռանկեան մը երկու կողմերը եւ անոնց կազմած անկիւնը ճանչնալով եռանկիւնը գծել:



ԴՖ անորոշ գիծը քաշէ. ՖԴԵ անկիւնը շինէ Ա ծանօթ անկեան հաւասար. կտրէ ԴԿ կողմը Բ ծանօթ կողման հաւասար, եւ ԴՀ կողմը՝ Գ ծանօթ կողման հաւասար, եւ ԿՀ քաշէ. ԴԿՀ պահանջուած եռանկիւնն է (Գիրք Ա. Նախ. Ե.):

ԽՆԴԻՐ Թ.

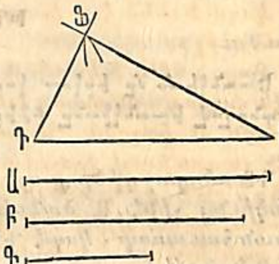
Եռանկեան մը մէկ կողմը եւ երկու անկիւնները ճանչնալով եռանկիւնը գծել:



Այս անկեանց կամ երկուքն ալ ծանօթ կողման կից պիտի ըլլան, կամ մէկը անոր կից՝ եւ միւսը ընդդիմակաց. եթէ ծանօթ անկեանց միայն մէկը կից է, երրորդ անկիւնը գտիր (Խնդիր Է.). այնատեն երկու կից անկիւնները ծանօթ կ'ըլլան: ԴԵ գիծը քաշէ ծանօթ կողման հաւասար. շինէ ԵԴՖ անկիւնը կից անկեանց մէկուն՝ եւ ԴԵԿ անկիւնը միւսին հաւասար. ԴՖ եւ ԵԿ իրար պիտի կտրեն Հ կէտին վրայ. ԴԵՀ պահանջուած եռանկիւնն է (Գիրք Ա. Նախ. Զ.):

ԽՆԴԻՐ Ժ․

Եռանկիւն մը երեք կողմերը գիտնալով եռանկիւնը գծել։

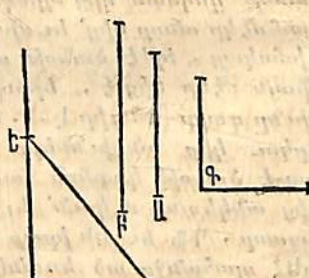


ԴԵ գիծը քաշէ Ա ծանօթ կողման հաւասար․ Ե կէտը կեդրոն ընելով Բ ծանօթ կողման հաւասար շառաւիղով աղեղ մը քաշէ․ Դ կէտն ալ կեդրոն ընելով Գ ծանօթ կողման հաւասար շառաւիղով ուրիշ աղեղ մը քաշէ, այնպէս որ Զ կէտին վրայ միւս աղեղը կտրէ․ ԶԵ եւ ԶԴ գիծերը քաշէ․ ԶԵԴ պահանջուած եռանկիւնն է (Գիրք․ Ա․ Նախ․ Ժ․)։

Պար․ Յայտնի է որ, եթէ կողմանց որեւէ մէկը միւս երկուքին գումարէն մեծ ըլլար, աղեղներն իրար պիտի չկտրէին․ բայց երբ որեւէ երկու կողմանց գումարը երրորդէն մեծ է, լուծելն հնարաւոր է։

ԽՆԴԻՐ ԺԱ․

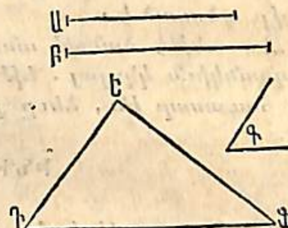
Եռանկիւն մը երկու կողմերը եւ անոնցմէ մէկուն ընդդիմակաց անկիւնը գիտնալով եռանկիւնը գծել։



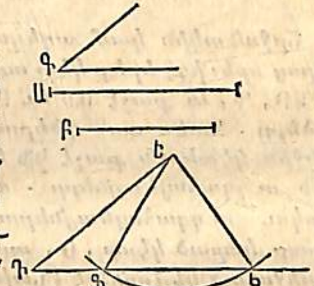
Նախ․ Երբ ծանօթ անկիւնը, Գ, ուղղանկիւն կամ բթանկիւն է, ԵԴԶ անկիւնը շինէ Գ անկեան հաւասար․ ԴԵ մասը կտրէ Ա ծանօթ կողման հաւասար․ Ե կէտը կեդրոն ընելով Բ ծանօթ կողման հաւասար շառաւիղով աղեղ մը քաշէ՝ ԴԶ գիծը Զ կէտին վրայ կտրելով․ նաեւ ԵԶ գիծը քաշէ․ ԴԵԶ պահանջուած եռանկիւնն է։

Յայտնի է թէ Գ ծանօթ անկիւնը ուղղանկիւն կամ բթանկիւն ըլլալուն պատճառաւ, անոր ընդդիմակաց Բ կողմը Ա կողմէն մեծ ըլլալու է (Գիրք Ա․ Նախ․ ԺԳ․)։

Երկրորդ․ Երբ Գ անկիւնը սրանկիւն է, եւ Բ կողմը Ա կողմէն մեծ է, խնդիրը վերոյիշեալ կերպով կրնայ լուծուիլ։



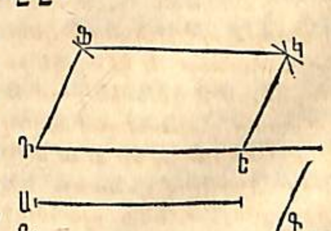
Բայց, եթէ Բ կողմը Ա կողմէն փոքր է, անատեն Ե կեդրոնէն Բ կողման հաւասար ԵԶ շառաւիղով քաշուած աղեղը՝ ԴԶ գիծը պիտի կտրէ երկու կէտի վրայ, Զ եւ Կ․ ուստի երկու եռանկիւններ պիտի գծուին, ԴԵԶ եւ ԴԵԿ, որոնց երկուքն ալ խնդրոյն պայմանները կը լեցնեն։



Պար․ Երբ Ե կեդրոնէն քաշուած աղեղը չօշափող է ԴԿ գծին, եռանկիւնը ուղղանկիւն եռանկիւն կ'ըլլայ, եւ անատեն միայն մէկ լուծում հնարաւոր է։ Երբ Բ կողմը Ե կէտէն ԴԶ գծին քաշուած ուղղահայեացէն փոքր է, խնդրոյն լուծումը անկարելի կ'ըլլայ։

ԽՆԴԻՐ ԺԲ․

Զուգահեռագիծ մը գծել՝ անոր մերձակայ կողմերը եւ անոնց կազմած անկիւնը գիտնալով։

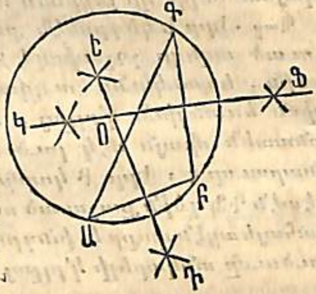


ԴԵ գիծը քաշէ Ա ծանօթ կողման հաւասար․ ԵԴԶ անկիւնն ալ՝ Գ ծանօթ անկեան հաւասար․ ԴԶ գիծը Բ ծանօթ կողման հաւասար ըրէ․ Զ կեդրոնէն ԴԵ կողման հաւասար շառաւիղով՝ եւ Ե կեդրոնէն ԴՑ կողման հաւասար շառաւիղով երկու աղեղ քաշէ Կ կէտին վրայ իրար կտրելով. նաեւ ՑԿ եւ ԵԿ քաշէ. ԴԵԿՑ պահանջուած զուգահեռագիծն է։ Քան-քաշէ. գի ընդդիմակաց կողմերն իրարու հաւասար գծուած են, ուստի ձեւը զուգահեռագիծ է (Գիրք Ա. Նախ. ԻԹ.). Նաեւ այս ձեւը ծանօթ կողմերովն ու անկիւնովը գծուած է։

Հետ. Եթէ ծանօթ անկիւնը ուղիղ անկիւն է, ձեւը ուղղանկիւն կ'ըլլայ. եթէ ասոր հետ մէկտեղ կողմերն ալ հաւասար են, ձեւը քառակուսի կ'ըլլայ։

ԽՆԴԻՐ ԺԳ.

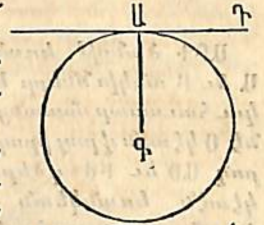
Ծանօթ բոլորակի կամ աղեղան մը կեդրոնը գտնել։



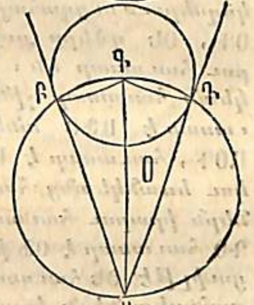
Շրջանակին կամ աղեղան վրայ որեւիցէ երեք կէտ առ, Ա, Բ, Գ, եւ քաշէ ԱԲ եւ ԲԳ գծերը. նաեւ աս գծերուն միջին կէտերէն քաշէ ԿՑ եւ ԵԴ ուղղահայեացները. աս երկու ուղղահայեացներուն իրար կտրած կէտը, Օ, պահանջուած կեդրոնն է (Նախ. Ձ. Պար.)։

ԽՆԴԻՐ ԺԴ.

Ծանօթ կէտէ մը ծանօթ շրջանակի մը շօշափող մը քաշել։



Եթէ ծանօթ կէտը, Ա, շրջանակին վրայ է, քաշէ ԳԱ շառաւիղը եւ անոր ուղղահայեաց ԱԴ գիծը. ԱԴ պահանջուած շօշափողն է (Նախ. Թ.)։



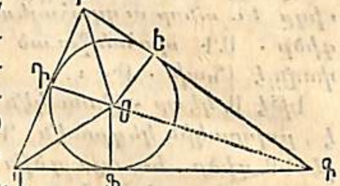
Եթէ Ա կէտը շրջանակէն դուրս է, բոլորակին կեդրոնէն, Գ, քաշէ ԳԱ գիծը, եւ այս գծին միջին կէտէն, Օ, շրջանակ մը քաշէ ՕԳ շառաւիղով որ ծանօթ շրջանակը Բ եւ Դ կէտերուն վրայ կտրէ. նաեւ ԱԲ գիծը քաշէ. աս գիծը պահանջուած շօշափողն է։ Քանզի, եթէ ԲԳ քաշուի, ԱԲԳ անկիւնը, կիսաբոլորակի մը մէջ գծուած ըլլալով, ուղիղ անկիւն է (Նախ. ԺԲ. Հետ. 2). ուստի ԱԲ գիծը, ԳԲ շառաւիղին ծայրէն քաշուած ուղղահայեաց մ'ըլլալով, շրջանակին շօշափող է։

Պար. 1. Երբ Ա կէտը բոլորակէն դուրս է, այս կէտէն երկու շօշափող կրնայ քաշուիլ, ԱԲ եւ ԱԴ. եւ աս շօշափողներն իրարու հաւասար են, քանզի ԳԲԱ եւ ԳԴԱ ուղղանկիւն եռանկիւնները միեւնոյն հակուղիղն ունին, ԳԱ, եւ ԳԲ=ԳԴ, ուստի եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Գիրք Ա. Նախ. ԺԷ.). ուրեմն ԱԴ հաւասար է ԱԲ ին, նաեւ ԳԱԴ հաւասար է ԳԱԲ անկեան։

Պար. 2. Որովհետեւ միայն մէկ գիծ կայ որ ԲԱԴ անկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ, յայտնի է թէ այն գիծը՝ որ երկու շօշափողաց կազմած անկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ, բոլորակին կեդրոնէն կ'անցնի.

ԽՆԴԻՐ ԺԵ.

Ծանօթ եռանկեան մը ներսը բոլորակ մը գծել:



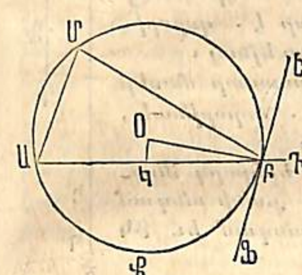
ԱԲԳ ծանօթ եռանկեան Ա եւ Բ անկիւնները երկերկու հաւասար մասանց բաժնէ Օ կէտին վրայ իրար կտրող ԱՕ եւ ԲՕ գծերով. Օ կէտէն եռանկեան երեք կողմերուն ուղղահայեաց ՕՖ, ՕԴ, ՕԵ գծերը քաշէ. աս ուղղահայեացները իրարու հաւասար են: Քանզի, ԴԱՕ անկիւնը ՕԱՖ անկեան հաւասար չինուած է. ԱԴՕ ուղիղ անկիւնը հաւասար է ԱՖՕ անկեան. ուրեմն երրորդ անկիւնը, ԱՕԴ, հաւասար է ԱՕՖ անկեան. նաեւ ԱՕ կողմը երկու եռանկեանց հասարակաց է. ուրեմն եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Գիրք Ա. Նախ. Զ.), եւ ԴՕ հաւասար է ՕՖ ին: Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ՕԵ հաւասար է ՕԴ ին. ուրեմն աս երեք ուղղահայեացներն իրարու հաւասար են:

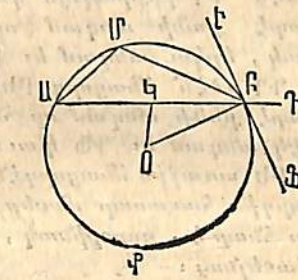
Արդ, եթէ Օ կեդրոնէն ՕԴ շառաւիղով շրջանակ մը քաշուի, յայտնի է թէ այս շրջանակը ԱԲԳ եռանկեան ներսը գծուած պիտի ըլլայ. քանզի ԱԲ կողմը, ՕԴ շառաւիղին ծայրէն քաշուած ուղղահայեաց ըլլալով, շօշափող է. նոյնպէս են նաեւ ԱԳ եւ ԲԳ կողմերը:

Պոր. Եռանկեան մը երեք անկիւններն երկերկու հաւասար մասանց բաժնող գծերը միեւնոյն կէտին վրայ իրար կը կտրեն:

ԽՆԴԻՐ ԺԶ.

Ծանօթ գծի մը վրայ բոլորակի հատուած մը գծել որ ծանօթ անկիւն մը պարունակէ. այսինքն, այնպէս հատուած մը որուն ներսը գծուած ամէն անկիւն՝ ծանօթ անկեան հաւասար ըլլայ:





ԱԲ ծանօթ գիծը երկնցուր դէպ ի Դ, եւ Բ կէտին վրայ ԵԲԴ անկիւնը շինէ՝ Գ ծանօթ անկեան հաւասար. ԲԵ գծին ուղղահայեաց ԲՕ գիծը քաշէ. նաեւ ԱԲ ին միջին կէտէն՝ ԱԲ ին ուղղահայեաց ԿՕ գիծը քաշէ. ԲՕ եւ ԿՕ գծերուն իրար կտրած տեղը, Օ, կեդրոն ընելով ՕԲ շառաւիղով շրջանակ մը գծէ. ԱՄԲ պահանջուած հատուածն է: Քանզի ԲՖ գիծը, որովհետեւ ՕԲ շառաւիղին ծայրէն քաշուած ուղղահայեաց է, շօշափող է, եւ ԱԲՖ անկեան չափը՝ ԱՔԲ աղեղան կէսն է (Նախ. ԻԱ.): Նաեւ ԱՄԲ անկեան չափը՝ ԱՔԲ աղեղան կէսն է. ուստի ԱՄԲ=ԱԲՖ=ԵԲԴ=Գ. ուրեմն ԱՄԲ հատուածին ներսը գծուած բոլոր անկիւնները Գ ծանօթ անկեան հաւասար են:

Պոր. Եթէ ծանօթ անկիւնը ուղիղ անկիւն ըլլար, պահանջուած հատուածը կիսաբոլորակ՝ եւ ԱԲ տրամագիծ պիտի ըլլար:

ԽՆԴԻՐ ԺԷ.

Երկու ծանօթ գծերուն նուազական ընդհանուր համեմատականը գտնել։

ԱԲ և ԳԴ ծանօթ գծերուն ընդհանուր համեմատականը գտնելու համար, ԱԲ մեծագոյն գծէն՝ ԳԴ փոքրագոյն գծին հաւասար մասեր կտրէ քանի անգամ որ հնար է. զորօրինակ, երկու անգամ և ԲԵ կ'աւելնայ։

ԳԴ գծէն՝ մնացորդ ԲԵ ին հաւասար մասեր կտրէ քանի անգամ որ հնար է. զորօրինակ, մէկ անգամ և ԴԶ կ'աւելնայ։

ԲԵ առաջին մնացորդէն՝ ԴԶ երկրորդ մնացորդին հաւասար մասեր կտրէ քանի անգամ որ հնար է. զորօրինակ, մէկ անգամ և ԲԿ կ'աւելնայ։

ԴԶ երկրորդ մնացորդէն՝ ԲԿ երրորդ մնացորդին հաւասար մասեր կտրէ քանի անգամ որ հնարէ։

Այս գործողութիւնը շարունակէ մինչև մնացորդ մը գտնուի որով առջի մնացորդը բաժնուի առանց մնացորդի։

Այս վերջին մնացորդը երկու գծերուն հասարակաց չափը կը կոչուի. այսինքն երկու գծերը անով կը բաժնուին առանց մնացորդի. և, եթէ աս մնացորդը միութիւն համարինք, կրնանք առջի մնացորդներուն և վերջապէս երկու ծանօթ գծերուն արժէքը գտնել, և ուստի անոնց թուական ընդհանուր համեմատականը։

Զորօրինակ, եթէ ԿԲ ճիշդ երկու անգամ կայ ԶԴին մէջ, երկու գծերը ԿԲ ով կրնան բաժնուիլ առանց մնացորդի։ ԲԿ=1 համարելով, ԶԴ=2 կ'ըլլայ. բայց ԵԲ ին մէջ մէկ անգամ ԶԴ կայ և ԿԲ կ'աւելնայ, ուրեմն ԵԲ=3. ԳԴ ին մէջ ԵԲ մէկ անգամ կայ և ԶԴ կ'աւելնայ, ուրեմն ԳԴ=5. և վերջապէս ԱԲ ին մէջ ԳԴ երկու անգամ կայ և ԵԲ կ'աւելնայ, ուրեմն ԱԲ=13. ուստի երկու գծերուն ընդհանուր համեմատա-

կանն է $\frac{13}{5}$։ Եթէ ԳԴ միութիւն համարուի, ԱԲ գիծը $\frac{13}{5}$ կ'ըլլայ, և, եթէ ԱԲ միութիւն համարուի, ԳԴ գիծը $\frac{5}{13}$ կ'ըլլայ։

Դտղ. Վերոյիշեալ կանոնը ճիշդ այն է՝ ինչ որ թուաբանութեան մէջ երկու թուոց ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար տրուած է. ուստի ուրիշ ապացոյցի կարօտութիւն չունի։

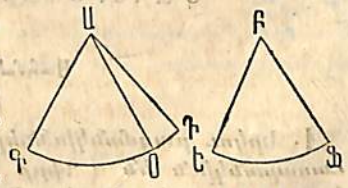
Գործողութիւնը որչափ ալ շարունակուի, կրնայ չգտնուիլ այնպիսի մնացորդ մը որով առջինը բաժնուի առանց մնացորդի, և անատեն կ'ըսուի թէ երկու գծերը նոյն չափով անչափելի են։

Ասոր մէկ օրինակը յետոյ պիտի տեսնուի, երբ քառակուսիին մէկ կողմը և տրամանկիւնը բաղդատուին։ Ուրեմն այսպիսի դէպքերու մէջ ճիշդ թուական ընդհանուր համեմատականը չի կրնար գտնուիլ. բայց, վերջին մնացորդը դուրս ձգելով, մերձաւոր ընդհանուր համեմատական մը պիտի գտնուի, աւելի կամ նուազ ճշդութեամբ, գործողութեան շատ կամ քիչ անգամ յառաջ տարուած ըլլալուն համեմատ։

ԽՆԴԻՐ ԺԸ.

Երկու ծանօթ անկեանց հասարակաց չափը գտնել, և այն չափին միջոցաւ անոնց նուազական ընդհանուր համեմատականը։

Ա և Բ ծանօթ անկեանց հասարակաց չափը գտնելու համար, Ա և Բ կէտերը կեդրոն ընելով միևնոյն շառաւիղով ԳԴ և ԵԶ աղեղները քաշէ. յետոյ աս



երկու աղեղներուն հասարակաց չափը և անոնց թուական ընդհանուր համեմատականը գտիր նախընթաց խնդրոյն կանոնովը։ Աս ընդհանուր համեմատականը ծանօթ անկեանց պահանջուած ընդհանուր համեմատականն է (Նախ. ԺԷ.). և, եթէ ԴՕ՝ աղեղներուն *հասարակաց չափն է, ԳԱՕ՝ անկեանց հասարակաց չափը կ'ըլլայ։*

Պար. Անկեան մը բացարձակ արժէքը կը գտնուի, եթէ անոր չափն եղող աղեղը բոլոր շրջանակին հետ բաղդատուի. զորօրինակ, եթէ ԳԴ աղեղը կը համեմատի բոլոր շրջանակին ինչպէս 3 առ 25, Ա անկիւնը չորս ուղիղ անկեանց $\frac{3}{25}$ը կամ մէկ ուղիղ անկեան $\frac{12}{25}$ը կ'ըլլայ։

Կրնայ ըլլալ որ բաղդատուած աղեղները հասարակաց չափ չունենան. անատեն անկեանց մերձաւոր ընդհանուր համեմատական մը պիտի գտնուի, առաւել կամ նուազ ճշգութեամբ, գործողութեան շատ կամ քիչ անգամ յառաջ տարուած ըլլալուն համեմատ։

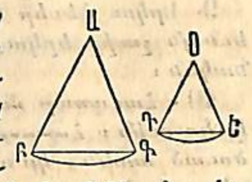
ԳԻՐՔ Դ.

ՁԵՒՈՑ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԻՒՆԸ ԵՒ ՄԱԿԵՐԵՍԱՑ ՉԱՓՈՒԻԼԸ

Սահմանք։

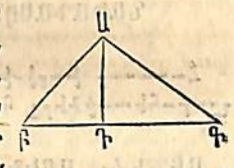
*1. Երկու բազմանկիւններ որ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են (Գիրք Ա. Սահմ. 20), եւ որոնց հաւասար անկեանց կողմերը իրարու համեմատական են, **նման բազմանկիւն** կը կոչուին։*

*2. Երկու նման բազմանկեանց որեւէ երկու կողմերը կամ անկիւնները՝ որ նման դիրք ունին, **համանման** կը կոչուին։*

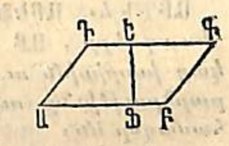


*3. Երկու տարբեր բոլորակաց **նման աղեղք, հատիք եւ հատուածք** անոնք են որ հաւասար կեդրոնական անկիւններ ունին։ Զորօրինակ եթէ Ա եւ Օ անկիւններն իրարու հաւասար են, անատեն իրարու նման են ԲԳ եւ ԴԵ աղեղները, ԲԱԳ եւ ԴՕԵ հատիչները, նաեւ ԲԳ եւ ԴԵ հատուածները։*

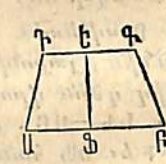
*4. Բազմանկեան մը **խարիսխն** այն կողմն է, որուն վրայ բազմանկիւնը կեցած է։*



*5. Եռանկեան մը **բարձրութիւնը՝** խարիսխին ընդդիմակաց գագաթէն խարիսխին կամ անոր շարունակութեանն եղող գծին ուղղահայեաց քաշուած գիծն է։ Զորօրինակ, ԱԴ ուղղահայեացը՝ ԲԱԳ եռանկեան բարձրութիւնն է։*



*6. Զուգահեռագծի մը **բարձրութիւնը՝** խարիսխին ընդդիմակաց կողմէն խարիսխին ուղղահայեաց քաշուած գիծն է։ Զորօրինակ, ԵՖ գիծը ԱԲԳԴ զուգահեռագծին բարձրութիւնն է։*



*7. Տրապիզաձեւի մը **բարձրութիւնը՝** իրարու զուգահեռական եղող երկու կողմանց մէկէն միւսին ուղղահայեաց քաշուած գիծն է։ Զորօրինակ, ԵՖ գիծը ԲԴ տրապիզաձեւին բարձրութիւնն է։*

*8. **Մակերես եւ մակերեսոյթ՝** իրարու շատ մօտ նշանակութիւն ունեցող բառեր են։ Մակերես կը նշանակէ մանաւանդ ձեւի մը երեսին պարունակութիւնը։ Մակերեսի մը արժէքը թուանշանով ցուցընելու համար, մակերեսը ուրիշ մակերեսի մը հետ կը բաղդատուի, եւ այս երկրորդ մակերեսին առջինին մէջ քանի անգամ պարունակուած ըլլալուն թիւը կը ցուցընէ առաջին մակերեսին արժէքը։*

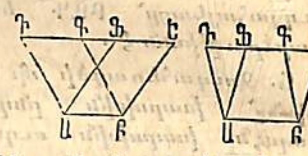
9․ Երկու ձեւեր հաւասար մակերես ունին, երբ միեւնոյն չափը երկուքն ալ նոյնքան անգամ կը պարունակեն ։

10․ Հաւասար մակերես ունեցող ձեւերը համազօր կը կոչուին ։ Հաւասար բառը, ձեւերու համար գործածուած ատեն, կը նշանակէ թէ ձեւերն ամէն բանի նկատմամբ իրարու հաւասար են (Սահմ 13)․ համազօր բառը միայն մէկ բանի, այսինքն ձեւերուն պարունակութեանը նկատմամբ հաւասարութիւն կը ցուցնէ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռագիծերը համազօր են ։

ԱԲԴԳ եւ ԱԲԵԶ զուգահեռագիծերը, ԱԲ հասարակաց խարիսխն ու միեւնոյն բարձրութիւնը ունենալով, համազօր են ։



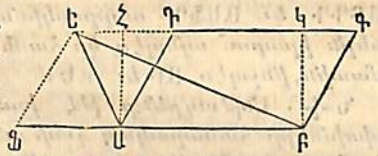
Որովհետեւ զուգահեռագիծերը նոյն բարձրութիւնն ունին, յայտնի է թէ ԳԴ եւ ԵԶ կողմերը միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ են ։ ԱԴ=ԲԳ, եւ ԱԶ=ԲԵ․ ԳԴ=ԱԲ եւ ԵԶ=ԱԲ․ ուստի ԳԴ=ԵԶ (Առ 1․)․ եթէ ԵԴ գծէն ԳԴ եւ ԵԶ հանուին, ԴԵ ու ԴԶ կը մնան իրարու հաւասար (Առ․ 3)․ ուրեմն ԴԱԶ եւ ԳԲԵ եռանկիւնք փոխադարձաբար հաւասարակողմ են եւ հետեւապէս իրարու հաւասար (Գիրք Ա․ Նախ․ Ժ․)։

Եթէ ԱԲԵԴ քառակողմէն ԱԴԶ եռանկիւնը հանուի, ԱԲԵԶ զուգահեռագիծը կը մնայ․ եթէ նոյն քառակողմէն՝ ԳԲԵ եռանկիւնը հանուի, ԱԲԳԴ զուգահեռագիծը կը մնայ․ ուրեմն այս երկու զուգահեռագիծերը համազօր են (Առ․ 3)։

Հետ․ Որեւիցէ զուգահեռագիծ համազօր է այն ուղղանկեան որ նոյն խարիսխն ու նոյն բարձրութիւնն ունի ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ եռանկիւն մը եւ զուգահեռագիծ մը հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունին, եռանկիւնը զուգահեռագիծին կիսոյն համազօր է ։



Եթէ ԱԲԳԴ զուգահեռագիծն ու ԱԲԵ եռանկիւնը միեւնոյն խարիսխը ունին, ԱԲ, ու միեւնոյն բարձրութիւնը, եռանկիւնը զուգահեռագծին կիսոյն չափ է ։

Քանզի, որովհետեւ եռանկիւնը եւ զուգահեռագիծը նոյն բարձրութիւնն ունին, եռանկեան գագաթը, Ե, խարսխին զուգահեռական եղող ԵԳ գծին վրայ է ։ Երկընցուր ԲԱ խարիսխը, եւ Ե կէտէն՝ ԱԴ կողման զուգահեռական ԵԶ քաշէ ։ ԶԲԵ եռանկիւնը՝ ԶԳ զուգահեռագծին կէսն է, եւ ԶԱԵ եռանկիւնը՝ ԶԴ զուգահեռագծին կէսն է (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԸ․ Հետ․)։

Արդ, եթէ ԶԳ զուգահեռագծէն ԶԴ զուգահեռագիծը հանուի, ԱԳ զուգահեռագիծը կը մնայ․ եթէ ԶԲԵ եռանկիւնէն, որ առաջին զուգահեռագծին կէսն է, ԶԱԵ եռանկիւնը հանուի, որ երկրորդ զուգահեռագծին կէսն է, ԱԲԵ եռանկիւնը կը մնայ՝ ԱԳ զուգահեռագծին կիսոյն համազօր ։

Հետ․ 1․ Ուստի ԱԲԵ եռանկիւնը միեւնոյն խարիսխն, ԱԲ, ու միեւնոյն բարձրութիւնն, ԱՀ, ունեցող ԱԲԿՀ ուղղանկեան կէսն է․ քանզի ԱԲԿՀ ուղղանկիւնը համազօր է ԱԲԳԴ զուգահեռագծին (Նախ․ Ա․ Հետ․)։

Հետ․ 2․ Հաւասար խարիսխ եւ բարձրութիւն ունեցող եռանկիւններ համազօր են, քանզի համազօր զուգահեռագծերուն կէսերն են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղղանկիւններ որ միենոյն բարձրութիւնն ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները։

ԱԴ բարձրութիւնն ունեցող ԱԲԳԴ եւ ԱԵԶԴ ուղղանկիւններն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԱԲ եւ ԱԵ։

Նախ. Ենթադրենք թէ խարիսխները հասարակաց չափ ունին եւ իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս, օրինակի համար, 7 կը համեմատի 4 ին։ Եթէ ԱԲ 7 հաւասար մասերու բաժնուի, ԱԵ այս մասերուն 4 ը կը պարունակէ. եւ, եթէ այս եօթը բաժանման կէտերէն խարսխին ուղղահայեաց գծեր քաշուին, եօթը փոքր ուղղանկիւններ կը կազմուին, որոնք իրարու համազօր են, քանզի հաւասար խարիսխ եւ բարձրութիւն ունին։ ԱԲԳԴ ուղղանկիւնը այս փոքր ուղղանկիւններէն եօթը հատ կը պարունակէ, եւ ԱԵԶԴ ուղղանկիւնը՝ չորս հատ. ուստի ԱԲԳԴ ուղղանկիւնը այնպէս կը համեմատի ԱԵԶԴ ուղղանկեան, ինչպէս 7՝ 4 ին կամ ԱԲ՝ ԱԵ ին. այսինքն երբ խարիսխները հասարակաց չափ ունին, նոյն բարձրութիւնն ունեցող երկու ուղղանկիւններն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները։

Երկրորդ. Թէեւ ԱԲ եւ ԱԵ խարիսխները հասարակաց չափ չունենան, այսու ամենայնիւ

ԱԲԳԴ : ԱԵԶԴ :: ԱԲ : ԱԵ։

Քանզի, եթէ այս համեմատութիւնը չիտակ չէ, ենթադրենք թէ ԱԲԳԴ այնպէս կը համեմատի ԱԵԶԴ ին, ինչպէս ԱԲ՝ ԱԵ էն մեծ եղող ԱՕ ին։

ԱԲ գիծը ԵՕ էն փոքր հաւասար մասերու բաժնէ. յայտնի է թէ բաժանման կէտերէն գոնէ մէկը, ինչպէս Ի, Ե ին եւ Օ ին մէջտեղը պիտի իյնայ. ԱԲ ին ուղղահայեաց ԻՔ քաշէ. ԱԲ եւ ԱԻ խարիսխները հասարակաց չափ ունին եւ

ԱԲԳԴ : ԱԻՔԴ :: ԱԲ : ԱԻ։

Բայց ենթադրուեցաւ թէ

ԱԲԳԴ : ԱԵԶԴ :: ԱԲ : ԱՕ։

Այս երկու համեմատութեանց նախադասները միեւնոյն են, ուստի յետադասներն համեմատական են (Գիրք Բ. Նախ. Դ.). եւ

ԱԻՔԴ : ԱԵԶԴ :: ԱԻ : ԱՕ։

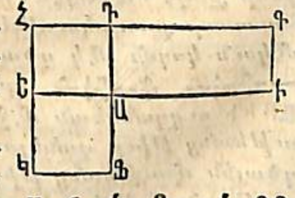
Բայց ԱՕ մեծ է ԱԻ էն. ուստի, եթէ այս համեմատութիւնը չիտակ է, ԱԵԶԴ ուղղանկիւնը ԱԻՔԴ ուղղանկիւնէն մեծ ըլլալու է. սակայն, ընդհակառակն, պզտիկ է. ուստի համեմատութիւնը չիտակ չէ. ուրեմն ԱԲԳԴ չի կրնար այնպէս համեմատիլ ԱԵԶԴ ին ինչպէս ԱԲ՝ ԱԻ էն մեծ եղող որեւէ գծի։

Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ համեմատութեան չորրորդ եզրը չի կրնար ԱԵ էն փոքր ըլլալ. ուստի ԱԵ ին հաւասար է։

Ուրեմն, խարիսխներուն ընդհանուր համեմատականն ինչ որ ըլլայ, նոյն բարձրութիւնն ունեցող երկու ուղղանկիւններն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղղանկիւնք իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխներուն և բարձրութեանց արտադրեալքը։



Եթէ ՅԲԳԴ եւ ԱԵԿԶ քառակողմերն ուղղանկիւն են, անատեն ԱԲԳԴ : ԱԵԿԶ :: ԱԲ× ԱԴ : ԱԶ×ԱԵ։

Երկու ուղղանկիւններն այնպէս դիր որ ԴԱԲ եւ ԵԱԶ գագաթան անկիւններ ըլլան (Գիրք Ա. Նախ. Դ.), եւ ԳԴ ու ԿԵ կողմերը երկնցուր մինչեւ իրար կտրեն Հ կէտին վրայ ։ ԱԲԳԴ եւ ԱԵՀԴ ուղղանկիւնները, նոյն բարձրութիւնն ունենալով, ԱԴ, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները, ԱԲ եւ ԱԵ. նաեւ ԱԵՀԴ եւ ԱԵԿՖ ուղղանկիւնները, նոյն բարձրութիւնն ունենալով, ԱԵ, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները, ԱԴ եւ ԱՖ. ուրեմն

ԱԲԳԴ : ԱԵՀԴ :: ԱԲ : ԱԵ,

եւ ԱԵՀԴ : ԱԵԿՖ :: ԱԴ : ԱՖ ։

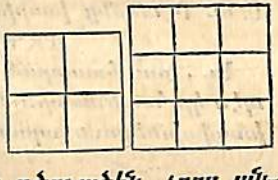
Այս երկու կարգ համեմատութեանց մէկուն առաջին եզրը միւսին առաջին եզրովը, երկրորդը՝ երկրորդովը, եւայլն բազմապատկելով (Գիրք Բ. Նախ. ԺԳ.) եւ ԱԵՀԴ, թէ նախադասին եւ թէ յետադասին բազմապատկիչ ըլլալուն համար, զանց ընելով՝ կ՚ունենանք

ԱԲԳԴ : ԱԵԿՖ :: ԱԲ×ԱԴ : ԱԵ×ԱՖ ։

Պար. 1. Եթէ որեւէ գիծ, ինչպէս 1 մատ, 1 ոտք, եւայլն, միութեան համարենք, եւ, եթէ այս գիծը՝ ԱԲԳԴ ուղղանկեան ԱԲ խարսխին մէջ, օրինակի համար, 10 անգամ՝ ու ԱԴ բարձրութեանը մէջ 3 անգամ կայ, ԱԲ ին արժէքը 10՝ եւ ԱԴ ինը 3 գծային միութիւն է (Սահմ. 8) ։ Բաժնէ ԱԲ 10 հաւասար մասանց, եւ բաժանման կէտերէն խարսխին ուղղահայեաց գծեր քաշէ. նաեւ ԱԴ 3 հաւասար մասանց բաժնէ ու բաժանման կէտերէն խարսխին զուգահեռական գծեր քաշէ ։ Այսպէս, ուղղանկիւնը քանի մը իրարու հաւասար քառակուսիներու կը բաժնուի, որոնց ամէն մէկուն կողմը մէկ գծային միութիւն է, եւ մակերեւութային միութիւն կը կոչուի ։ Նաեւ յայտնի է թէ ԱԲԳԴ ուղղանկեան մէջ եղած մակերեւութական միութեանց թիւը գտնելու համար, խարսխին մէջ եղած գծային միութեանց թիւը բազմապատկելու է բարձրութեան մէջի եղած գծային միութեանց թուով. այսինքն, ԱԲԳԴ ուղղանկեան մէջ 3×10 կամ 30 մակերեւութական միութիւնք կան. ուրեմն ուղղանկեան մը մակերեսը հաւասար է անոր խարսխին ու բարձրութեանն արտադրելոյն ։

Պար. 2. Երկրաչափութեան մէջ երկու գծից արտադրեալը եւ երկու գծից ուղղանկիւնը միեւնոյն բան կը նշանակեն. այսինքն ուղղանկիւն մը որուն խարիսխը՝ այն գծերէն մէկուն՝ եւ բարձրութիւնը միւսին հաւասար է ։ Թուաբանութեան մէջ ալ նոյն խօսքը կը գործածուի. զորօրինակ, երկու տարբեր թուոց արտադրեալը այն թուոց ուղղանկիւնը կը կոչուի, իսկ իրմով բազմապատկեալ թուոյ մը արտադրեալը այն թուոյն քառակուսին կը կոչուի ։

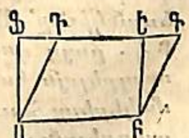
1, 2, 3 եւայլն թուոց քառակուսիքն են 1, 4, 9 եւայլն ։ Նմանապէս որեւիցէ երկայնութիւն ունեցող գծէ մը կրկին անգամ երկայն եղող գծի վրայ գծուած քառակուսին՝ առջի գծին վրայ գծուածին չորս անգամն է. նոյն առջի գծէն երեք անգամ երկայն եղող գծի վրայ գծուած քառակուսին՝ դարձեալ նոյն առաջնոյն վրայ գծուածին ինը անգամն է, եւայլն ։



ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւիցէ զուգահեռագծի մակերեսը հաւասար է անոր խարսխին ու բարձրութեանը արտադրելոյն ։

ԲԵ բարձրութիւնն ունեցող ԱԲԳԴ զուգահեռագծին մակերեսը հաւասար է ԱԲ×ԲԵ արտադրելոյն ։



ԳԴ կողմը երկնցուր եւ ԱԲ խարսխին ուղղահայեաց ՖԱ գիծը քաշէ. ԱԲԳԴ զուգահեռագիծը եւ ԱԲԵՖ ուղղանկիւնը համազօր են (Նախ. Ա. Հետ.). բայց այս ուղղանկեան մակերեսը հաւասար է ԱԲ×ԲԵ արտադրելոյն (Նախ․ Դ․ Պար․ 1)․ ուրեմն ԱԲԳԴ զուգահեռագծին մակերեսը հաւասար է ԱԲ×ԲԵ արտադրելոյն ։

Պար․ Հաւասար խարիսխներ ունեցող զուգահեռագծեր իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց բարձրութիւնքը, եւ հաւասար բարձրութիւններ ունեցող զուգահեռագծեր իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները ։

Քանզի, եթէ Բ երկու զուգահեռագծերու հասարակաց խարիսխն՝ ու Գ եւ Դ անոնց բարձրութիւնքն ըլլան, անատեն

Բ×Գ : Բ×Դ :: Գ : Դ (Գիրք Բ․ Նախ․ Է․)։

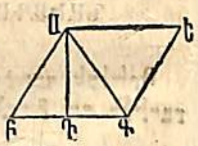
Եւ, եթէ Գ անոնց հասարակաց բարձրութիւնը՝ եւ Ա ու Բ անոնց խարիսխներն ըլլան,

Ա×Գ : Բ×Գ :: Ա : Բ ։

Եւ, առ հասարակ, զուգահեռագծեր իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց բարձրութեանց ու խարիսխներուն արտադրեալքը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը մակերեսը հաւասար է անոր խարիսխին ու բարձրութեանը արտադրելոյն կիսոյն ։



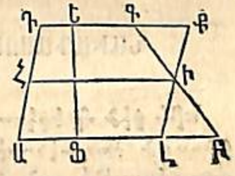
ԱԴ բարձրութիւնն ունեցող ԱԲԳ եռանկեան մակերեսը՝ ԲԳ×ԱԴ արտադրելոյն կիսոյն հաւասար է ։

ԱԲ ին զուգահեռական ԳԵ՝ եւ ԲԳ ին զուգահեռական ԱԵ գծերը քաշէ․ ԱԲԳ եռանկիւնը՝ ԱԲԳԵ զուգահեռագծին կէսն է (Նախ․ Բ․)․ բայց զուգահեռագծին մակերեսը՝ ԲԳ×ԱԴ արտադրելոյն հաւասար է (Նախ․ Ե․) ուրեմն եռանկեան մակերեսը հաւասար է $\frac{1}{2}$ ԲԳ×ԱԴ կամ ԲԳ× $\frac{1}{2}$ ԱԴ արտադրելոյն ։

Հետ․ Երկու եռանկիւնք որ հաւասար բարձրութիւն ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները․ եւ երկու եռանկիւնք, որ հաւասար խարիսխներ ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնքը ։ Եւ, առհասարակ, եռանկիւնք իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութեանց ու խարիսխներուն արտադրեալքը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Տրապիզոյնի մը մակերեսը հաւասար է անոր երկու զուգահեռական կողմանց գումարին կիսոյն և անոր բարձրութեանը արտադրելոյն ։



Եթէ ԱԲԳԴ տրապիզաձեւը ԵԶ բարձրութիւնն ունի, անոր մակերեսը հաւասար է ԵԶ× $\frac{1}{2}$(ԱԲ+ԳԴ) արտադրելոյն ։

ԲԳ ի միջին կէտէն, Ի, ԱԴ կողման զուգահեռական ԼՔ գիծը քաշէ, եւ ԴԳ կողմը երկնցուր մինչեւ Ք ։

ԻԲԼ եւ ԻԳՔ եռանկեանց ԻԲ եւ ԻԳ կողմերը իրարու հաւասար շինուած են․ ԼԻԲ=ԳԻՔ անկեան․ եւ, որովհետեւ ԳՔ եւ ԲԼ զուգահեռական են, ԻԲԼ=ԻԳՔ անկեան (Գիրք Ա․ Նախ․ Ի․ Հետ․ 2)․ ուստի եռանկիւնները իրարու հաւասար են (Գիրք Ա․ Նախ․ Զ․)․ ուրեմն ԱԲԳԴ տրապիզաձեւը համազօր է ԱԴՔԼ զուգահեռագծին, եւ անոր մակերեսը հաւասար է ԵԶ×ԱԼ արտադրելոյն ։

Բայց ԱԼ=ԴՔ․ եւ, որովհետեւ ԻԲԼ եւ ՔԳԻ եռանկիւններն իրարու հաւասար են, ԲԼ=ԳՔ․ ուստի ԱԲ+ԳԴ=ԱԼ+ԴՔ=2 ԱԼ․ ուստի ԱԼ՝ ԱԲ եւ ԳԴ կողմերուն գումարին կէսն է․ ուրեմն ԱԲԳԴ տրապիզաձեւին մակերեսը հաւասար է ԱԲ եւ ԳԴ զուգահեռական կողմանց գումարին կիսոյն եւ ԵԶ բարձրութեան արտադրելոյն․ այսինքն, ԱԲԳԴ=ԵԶ× $\frac{\text{ԱԲ+ԳԴ}}{2}$ ։

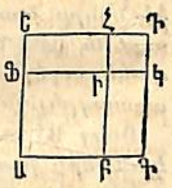
Պար. Եթէ ԲԳ գծին միջին կէտէն, Ի, ԱԲ խարսխին զուգահեռական ԻՀ քաշուի, Հ՝ ԱԴ գծին միջին կէտը պիտի ըլլայ: Քանզի, որովհետեւ ԱՀԻԼ եւ ԴՀԻՔ զուգահեռագիծ են, ԱՀ=ԻԼ, եւ ԴՀ=ԻՔ. բայց, որովհետեւ ԲԻԼ եւ ԳԻՔ եռանկիւններն իրարու հաւասար են, ԻԼ=ԻՔ. ուստի ԱՀ=ԴՀ: Նաեւ ՀԻ=ԱԼ= $\frac{\text{ԱԲ}+\text{ԳԴ}}{2}$. ուրեմն ԱԲԳԴ տրապիզաձեւին մակերեսը հաւասար է ԵՑ×ՀԻ արտադրելոյն. այսինքն, տրապիզաձեւին մակերեսը հաւասար է անոր հակեալ կողմանց միջին կէտերն իրար միացընող գծին եւ անոր բարձրութեանն արտադրելոյն:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ գիծ մը երկու մասանց բաժնուի, ամբողջ գծին վրայ գծուած քառակուսին համազօր է մասանց վրայ գծուած քառակուսիներուն գումարին, աւելի մասանց ուղղանկեան կրկնապատիկը:

Եթէ ԱԳ գիծը որեւիցէ կէտի վրայ, Բ, երկու մասանց, ԱԲ ու ԲԳ, բաժնուի,

ԱԳ^2 կամ (ԱԲ+ԲԳ)^2=ԱԲ^2+ԲԳ^2+2ԱԲ×ԲԳ:



ԱԳԴԵ քառակուսին գծէ. ԱԵ էն ԱԲ ին հաւասար ԱՑ մասը կտրէ. եւ ԱԳ ին զուգահեռական ՑԿ՝ ու ԱԵ ին զուգահեռական ԲՀ գծերը քաշէ:

ԱԴ քառակուսին չորս մաս ունի, որոնցմէ ԱԲԻՑ՝ ԱԲ գծին վրայ գծուած քառակուսին է, քանզի ԱՑ չինուած է ԱԲ ին հաւասար. որովհետեւ ԱԳ=ԱԵ ու ԱԲ=ԱՑ, ԱԳ—ԱԲ=ԱԵ—ԱՑ, կամ ԲԳ=ԵՑ. բայց ԲԳ=ԻԿ, եւ ԵՑ=ԴԿ. ուստի ԻԿԴՀ հաւասար է ԲԳ ին վրայ գծուած քառակուսւոյն. նաեւ ԲԳԿԻ եւ ԵՑԻՀ ուղղանկեանց իւրաքանչիւրը հաւասար է ԱԲ×ԲԳ արտադրելոյն. ուրեմն

ԱԳ^2 կամ (ԱԲ+ԲԳ)^2=ԱԲ^2+ԲԳ^2+2ԱԲ×ԲԳ:

Հետ. Երբ ԱԲ=ԲԳ, ԲԳԿԻ եւ ԵՑԻՀ քառակուսի կ'ըլլան, այսինքն, ամբողջ գծի մը վրայ գծուած քառակուսին՝ նոյն գծին կիսոյն վրայ գծուած քառակուսւոյն քառապատիկն է:

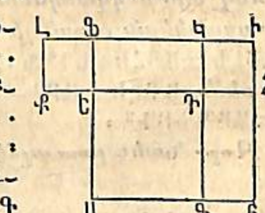
Պար. Այս նախադասութիւնը ըստ աղճէպրայի կըրնայ ապացուցուիլ: Եթէ գ՝ ամբողջ գիծը ցուցընէ, եւ ա ու բ՝ անոր մասերը, անատեն գ=ա+բ. եւ գ^2=ա^2+բ^2+2աբ:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու գծերուն տարբերութեանը վրայ գծուած քառակուսին համազօր է այն գծերուն վրայ գծուած քառակուսիներուն գումարին, նուազ նոյն գծերուն ուղղանկեան կրկնապատիկը:

Թող ԱԲ եւ ԲԳ երկու գիծ ցուցընեն. անատեն անոնց տարբերութիւնը՝ ԱԳ է, եւ

ԱԳ^2 կամ (ԱԲ—ԲԳ)^2=ԱԲ^2+ԲԳ^2—2ԱԲ×ԲԳ:



ԱԲԻՑ քառակուսին գծէ. ԱՑ էն ԱԳ ին հաւասար ԱԵ կտրէ. ԲԻ ին զուգահեռական ԳԿ՝ եւ ԱԲ ին զուգահեռական ՀՔ քաշէ. նաեւ ԵՑԼՔ քառակուսին գծէ: ԳԲԻԿ եւ ԿԼՔԴ ուղղանկեանց իւրաքանչիւրը հաւասար է ԱԲ×ԲԳ արտադրելոյն. նաեւ ԱԲԻԼՔԵԱ բազմանկիւնը համազօր է ԱԲ^2 + ԲԳ^2 գումարին. եւ, եթէ բազմանկիւնէն այն երկու ուղղանկիւնները հանուին, ԱԳԴԵ քառակուսին կը մնայ. ուրեմն

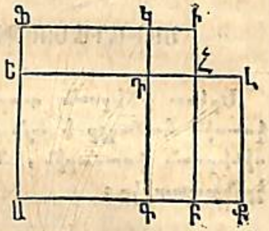
ԱԳ^2 կամ (ԱԲ—ԲԳ)^2=ԱԲ^2+ԲԳ^2—2ԱԲ×ԲԳ:

Պար. Նաեւ ըստ աղճէպրայի (ա—բ)^2=ա^2+բ^2—2աբ:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ . ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու գծերուն գումարին և տարբերութեան ուղղանկիւնը համազօր է նոյն գծերուն վրայ գծուած քառակուսիներուն տարբերութեանը :

Թող ԱԲ եւ ԲԳ երկու գիծ ցուցընեն . անատեն
$(ԱԲ+ԲԳ)\times(ԱԲ-ԲԳ)=ԱԲ^2-ԲԳ^2$:



ԱԲ եւ ԱԳ գծերուն վրայ ԱԲԻՖ ու ԱԳԴԵ քառակուսիները գծէ . ԱԲ երկնցուր մինչեւ ԲՔ հաւասար ըլլայ ԲԳ ին , եւ ԱՔԼԵ ուղղանկիւնը գծէ :

ԵՔ ուղղանկեան խարիսխը , ԱՔ , հաւասար է ԱԲ ու ԲԳ գծերուն գումարին . եւ անոր բարձրութիւնը , ԱԵ , հաւասար է նոյն գծերուն տարբերութեանը . ուստի $ԱՔԼԵ=(ԱԲ+ԲԳ)\times(ԱԲ-ԲԳ)$: Դարձեալ այս ուղղանկեան ԲՀԼՔ մասը հաւասար է ԵԴԿՖ ուղղանկեան , քանզի $ԲՀ=ԴԵ$, եւ $ԲՔ=ԵՖ$. ուստի $ԱՔԼԵ=ԱԲՀԵ+ԵԴԿՖ$. նաեւ $ԱԲՀԵ+ԵԴԿՖ=ԱԲ^2-ԲԳ^2$. ուրեմն $ԱՔԼԵ=ԱԲ^2-ԲԳ^2$, կամ $(ԱԲ+ԲԳ)\times(ԱԲ-ԲԳ)=ԱԲ^2-ԲԳ^2$:

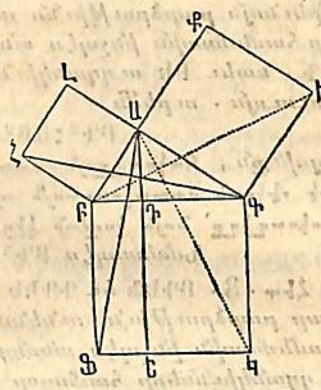
Պար . Նաեւ ըստ աւճէպրայի $(ա+բ)\times(ա-բ)=ա^2-բ^2$:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ . ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ ուղղանկիւն եռանկեան հակուղղոյն վրայ գծուած քառակուսին համազօր է միւս երկու կողմանց վրայ գծուած քառակուսեաց գումարին :

Եթէ ԱԲԳ եռանկեան ԲԱԳ անկիւնը ուղիղ է , $ԲԳ^2=ԱԲ^2+ԱԳ^2$:

Երեք կողմանց վրայ քառակուսիներ գծէ . ԲԳ ին ուղղահայեաց ԱԴԵ գիծը՝ եւ ԱՖ ու ԳՀ տրամանկիւնները քաշէ :



ԱԲՀ եւ ԳԲՖ , ուղիղ անկիւն ըլլալով , իրարու հաւասար են . ուստի ԱԲՀ+ԱԲԳ կամ ՀԲԳ անկիւնը հաւասար է ԳԲՖ+ԱԲԳ կամ ԱԲՖ անկեան . նաեւ ԱԲ եւ ԲՀ , միեւնոյն քառակուսւոյն կողմերն ըլլալով իրարու հաւասար են , եւ , նոյն պատճառաւ , $ԲԳ=ԲՖ$. ուրեմն ԱԲՖ եռանկիւնը հաւասար է ՀԲԳ եռանկեան (Գիրք Ա . Նախ . Ե .) :

Արդ ԱԲՖ եռանկիւնը ԲԵ ուղղանկեան կէսն է , քանզի երկուքն ալ միեւնոյն խարիսխը , ԲՖ , ու միեւնոյն բարձրութիւնը , ԲԴ , ունին (Նախ . Բ . Հետ . 1) . նաեւ , որովհետեւ ԲԱԳ ու ԲԱԼ ուղիղ անկիւն են , ԱԳ եւ ԱԼ գծերը՝ ՀԲ ին զուգահեռական մէկ ուղիղ գիծ կը կազմեն (Գիրք Ա . Նախ . Գ .) . ուստի ՀԲԳ եռանկիւնը եւ ԱՀ քառակուսին միեւնոյն խարիսխը , ԲՀ , ու միեւնոյն բարձրութիւնը , ԱԲ , ունին . ուրեմն եռանկիւնը քառակուսւոյն կէսն է :

Արդէն ապացուցուած է թէ ԱԲՖ եռանկիւնը հաւասար է ՀԲԳ եռանկեան . ուրեմն ԲԴԵՖ ուղղանկիւնը , որ ԱԲՖ եռանկեան կրկնապատիկն է , համազօր է ԱՀ քառակուսւոյն , որ ՀԲԳ եռանկեան կրկնապատիկն է : Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԳԴԵԿ ուղղանկիւնը համազօր է ԱԻ քառակուսւոյն . արդ ԲԴԵՖ եւ ԳԴԵԿ ուղղանկիւնները ԲԳԿՖ քառակուսին կը կազմեն . ուրեմն $ԲԳ^2=ԱԲ^2+ԱԳ^2$:

Հետ . 1 . Ուրեմն ուղղանկիւն եռանկեան մը կողմանց մէկուն քառակուսին համազօր է հակուղղոյն քառակուսւոյն՝ նուազ միւս կողման քառակուսին . զորօրինակ , $ԱԲ^2=ԲԳ^2-ԱԳ^2$:

Հետ. 2. ԱԴ *ուղղահայեացը կը բաժնէ հակուղղիղը երկու մասանց*, ԲԴ *եւ* ԴԳ, *որոնք հատուած կը կոչուին։*

Որովհետեւ ԲԿ *քառակուսին եւ* ԲԵ *ուղղանկիւնը միեւնոյն բարձրութիւնն ունին*, ԲՖ, *իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները*, ԲԳ *եւ* ԲԴ. *Նաեւ* ԲԵ *ուղղանկիւնը համազօր է* ԱՀ *քառակուսւոյն. ուրեմն*

ԲԳ^2 : ԱԲ^2 : : ԲԳ : ԲԴ.

այսինքն, հակուղղոյն քառակուսին՝ միւս կողմանց որևէ մէկուն քառակուսւոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս հակուղղէն՝ նոյն կողման կից եղող հատուածին։

Նմանապէս ԲԳ^2 : ԱԳ^2 : : ԲԳ : ԳԴ.

Հետ. 3. ԲԴԿԵ *եւ* ԴԳԿԵ *ուղղանկիւնները, հաւասար բարձրութիւն ունենալով, իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները. Նաեւ այս ուղղանկիւնները համազօր են* ԱՀ *եւ* ԱԻ *քառակուսիներուն. ուրեմն*

ԱԲ^2 : ԱԳ^2 : : ԲԴ : ԳԴ.

այսինքն, ուղիղ անկիւնը կազմող կողմանց քառակուսիքը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս հակուղղոյն այն կողմանց կից եղող հատուածները։

Հետ. 4. ԱԲԳԴ *քառակուսւոյն տրամանկիւնը* ԱԳ, ԱԲԳ *ուղղանկիւն եռանկեան հակուղղիղն է. ուրեմն* ԱԳ^2 = ԱԲ^2 + ԲԳ^2 = 2ԱԲ^2. *այսինքն*, քառակուսւոյն տրամանկեան վրայ գծուած քառակուսին՝ անոր որևէ կողման վրայ գծուած քառակուսւոյն կրկնապատիկն է։

Հետ. 5. *Որովհետեւ* ԱԳ^2 : ԱԲ^2 : : 2 : 1,

ԱԳ : ԱԲ : : $\sqrt{2}$: 1 (*Գիրք* Բ. *Նախ.* ԺԲ. *Հետ.*).

այսինքն քառակուսւոյն տրամանկիւնը և կողմը հասարակաց չափ չունին։

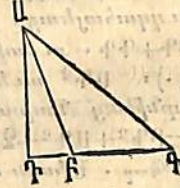
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն եռանկեան որևէ սրանկեան ընդդէմակաց կողման քառակուսին՝ համազօր է խարսխին ու միւս կողման քառակուսիներուն գումարէն, նուազ այն ուղղանկեան կրկնապատիկը որուն մէկ կողմը խարիսխն է, և միւս կողմը՝ խարսխին կամ անոր շարունակութեանը այն մասն է, որ ընդդէմակաց անկիւնէն իջուած ուղղահայեացին և սրանկեան գագաթին մէջտեղը կ'իյնայ։

Եթէ ԱԴ *ուղղահայեաց է* ԲԳ *խարսխին*, ԱԲ^2 = ԱԳ^2 + ԲԳ^2 − 2ԲԳ × ԳԴ.

Նախ. *Երբ* ԱԴ *ուղղահայեացը* Բ *եւ* Գ *իրն մէջտեղը կ'իյնայ*, ԲԴ = ԲԳ − ԳԴ, *եւ, հետեւապէս*, ԲԴ^2 = ԲԳ^2 + ԳԴ^2 − 2ԲԳ × ԳԴ (*Նախ.* Թ.)։ *Այս հաւասարութեան երկու կողմը* ԱԴ^2 *աւելցնելով կ'ունենանք* ԱԴ^2 + ԲԴ^2 = ԱԴ^2 + ԳԴ^2 + ԲԳ^2 − 2ԲԳ × ԳԴ, *կամ* ԱԲ^2 = ԱԳ^2 + ԲԳ^2 − 2ԲԳ × ԳԴ.

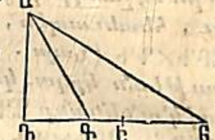
Երկրորդ. *Երբ* ԱԴ *ուղղահայեացը եռանկիւնէն դուրս կ'իյնայ*, ԲԴ = ԳԴ − ԲԳ, *եւ, հետեւապէս*, ԲԴ^2 = ԳԴ^2 + ԲԳ^2 − 2ԳԴ × ԲԳ (*Նախ.* Թ.)։ ԱԴ^2 *աւելցնելով, առաջուան պէս կ'ունենանք* ԱԲ^2 = ԲԳ^2 + ԱԳ^2 − 2ԲԳ × ԳԴ.



ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն բթանկեան եռանկեան մէջ, բթանկեան ընդդիմակաց կողման քառակուսին հաւասար է խարսխին ու միւս կողման քառակուսիներուն գումարին, աւելեալ այն ուղղանկեան կրկնապատիկը որուն մէկ կողմը խարիսխն է, և միւս կողմը՝ խարիսխին շարունակութեանը այն մասն է, որ ընդդիմական անկիւնէն իջած ուղղահայեացին և բթանկեան մէջտեղը կ'իյնայ :

Եթէ ԱԳԲ եռանկեան Գ անկիւնը բթանկիւն է, եւ ԱԴ ուղղահայեաց է ԲԳ խարսխին շարունակութեանը, ԳԴ, $ԱԲ^2=ԱԳ^2+ԲԳ^2+2ԲԳ\times ԳԴ$:



ԱԴ ուղղահայեացը՝ Բ եւ Գին մէջտեղը չի կրնար իյնալ. քանզի եթէ իյնար, օրինակի համար, Ե կէտին վրայ, ԱԳԵ եռանկեան մէջ Ե անկիւնը՝ ուղղանկիւն, եւ Գ անկիւնը բթանկիւն պիտի ըլլար. բայց ասիկա անկարելի է (Գիրք Ա. Նախ. ԻԵ. Հետ. 3). ուրեմն ուղղահայեացը եռանկիւնէն դուրս կ'իյնայ, եւ $ԲԴ=ԲԳ+ԳԴ$. *ուստի* $ԲԴ^2=ԲԳ^2+ԳԴ^2+2ԲԳ\times ԳԴ$ *(Նախ. Ը.)*: $ԱԴ^2$ *աւելցնելով եւ վերածելով, ինչպէս նախընթաց նախադասութեան մէջ, կ'ունենանք* $ԱԲ^2=ԲԳ^2+ԱԳ^2+2ԲԳ\times ԳԴ$:

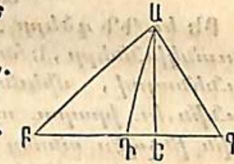
Պար. Միայն ուղղանկիւն եռանկեան երկու կողմանց քառակուսիներուն գումարը համազօր է միւս կողման քառակուսւոյն. քանզի, երբ երկու կողմանց մէջտեղի անկիւնը սուր է, անոնց քառակուսիներուն գումարը մեծ է միւս կողման քառակուսիէն, եւ, երբ անկիւնը բութ է, գումարը պզտիկ է միւս կողման քառակուսիէն :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն եռանկեան որեւէ երկու կողմանց քառակուսեաց գումարը՝ համազօր է երրորդ կողման կիսոյն քառակուսւոյն կրկնապատկին, աւելեալ նոյն կողման մէջին կէտէն մինչեւ ընդդիմակաց անկեան գագաթը քաշուած գծին քառակուսւոյն կրկնապատիկը :

Եթէ Դ՝ ԱԲԳ եռանկեան խարսխին միջին կէտն է,

$$ԱԲ^2+ԱԳ^2=2ԲԴ^2+2ԱԴ^2 :$$



ԲԳ խարսխին ուղղահայեաց ԱԵ գիծը քաշէ. անատեն $ԱԳ^2=ԱԴ^2+ԴԳ^2-2ԴԳ\times ԵԴ$ *(Նախ. ԺԲ.). եւ* $ԱԲ^2=ԱԴ^2+ԴԲ^2+2ԴԲ\times ԵԴ$ *(Նախ. ԺԳ.)* :

Այս երկու կարգ հաւասարութիւնները գումարելով, եւ գիտելով թէ ԴԲ հաւասար է ԴԳին, կ'ունենանք

$$ԱԲ^2+ԱԳ^2=2ԲԴ^2+2ԱԴ^2 :$$

Հետ. Ուրեմն ամէն զուգահեռագծին չորս կողմանց քառակուսեաց գումարը համազօր է անոր տրամանկիւններուն քառակուսեաց գումարին :

Քանզի ԱԳ եւ ԲԴ տրամանկիւնները իրար երկու հաւասար մասանց կը բաժնեն (Գիրք Ա. Նախ. ԼԱ.). ուստի ԱԲԳ եռանկեան մէջ $ԱԲ^2+ԲԳ^2=2ԱԵ^2+2ԲԵ^2$. *եւ ԱԴԳ եռանկեան մէջ* $ԱԴ^2+ԴԳ^2=2ԱԵ^2+2ԴԵ^2$. *գումարելով եւ գիտելով թէ ԲԵ հաւասար է ԴԵին, կ'ունենանք*

$$ԱԲ^2+ԱԴ^2+ԴԳ^2+ԲԳ^2=4ԱԵ^2+4ԴԵ^2 :$$

Բայց $4ԱԵ^2$՝ *2ԱԵին կամ ԱԳին քառակուսին է, եւ* $4ԴԵ^2$՝ *ԲԴին քառակուսին (Նախ. Ը. Հետ.). Ուրեմն կողմանց քառակուսեաց գումարը համազօր է տրամանկիւններուն քառակուսեաց գումարին :*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ եռանկեան խարսխին զուգահեռական քաշուած գիծը՝ միւս երկու կողմերը իրարու համեմատական մասանց կը բաժնէ ։

Եթէ ԴԵ *գիծը* ԱԲԳ *եռանկեան* ԲԳ *խարսխին զուգահեռական է ,*

ԱԴ:ԴԲ::ԱԵ:ԵԳ ։

ԲԵ *եւ* ԴԳ *գծերը քաշէ ․* ԱԴԵ *եւ* ԲԴԵ *եռանկիւնները ,* Ե *հասարակաց գագաթն ունենալով , միեւնոյն բարձրութիւնն ունին , եւ իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները ․ կամ*

ԱԴԵ:ԲԴԵ::ԱԴ:ԴԲ ․

Նաեւ ԱԴԵ *եւ* ԴԵԳ *եռանկիւնները ,* Դ *հասարակաց գագաթն ունենալով , իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց խարիսխները ․ կամ*

ԱԴԵ:ԴԵԳ::ԱԵ:ԵԳ ։

Բայց ԲԴԵ *եւ* ԴԵԳ *եռանկիւնները միեւնոյն խարիսխը ,* ԴԵ *, ունին , եւ , որովհետեւ իրենց գագաթները խարսխին զուգահեռական եղող* ԲԳ *գծին վրայ են , միեւնոյն բարձրութիւնն ալ ունին ․ ուստի իրարու համազօր են* (*Նախ ․* Բ․ *Հետ ․* 2) ․ *ուրեմն* (*Գիրք* Բ․ *Նախ ․* Դ․ *Հետ ․*)

ԱԴ:ԴԲ::ԱԵ:ԵԳ ։

Հետ ․ 1․ Ուրեմն *կ՚ունենանք* (*Գիրք* Բ․ *Նախ ․* Զ․)

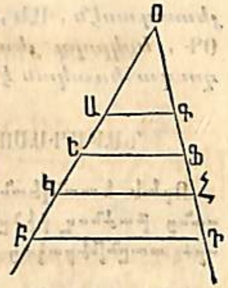
ԱԴ+ԴԲ:ԱԴ::ԱԵ+ԵԳ:ԱԵ ,

կամ ԱԲ:ԱԴ::ԱԳ:ԱԵ ․

նաեւ ԱԲ:ԲԴ::ԱԳ:ԳԵ ։

Հետ ․ 2․ *Եթէ* ԱԲ *եւ* ԳԴ *գծերը կտրող* ԱԳ , ԵՖ , ԿՀ , *եւայլն գծերը իրարու զուգահեռական են ,*

ԱԵ:ԳՖ::ԵԿ:ՖՀ::ԿԲ:ՀԴ ։



Երկնցուր ԲԱ *եւ* ԴԳ *գծերը մինչեւ* Օ *կէտին վրայ իրար կտրեն ։* ՕԵՖ *եռանկեան մէջ* ԱԳ *զուգահեռական է* ԵՖ *խարսխին ․ ուստի*

ՕԵ:ԱԵ::ՕՖ:ԳՖ ,

կամ ՕԵ:ՕՖ::ԱԵ:ԳՖ ․ *նաեւ* ՕԿՀ *եռանկեան մէջ* ՕԵ:ԵԿ::ՕՖ:ՖՀ ,

կամ ՕԵ:ՕՖ::ԵԿ:ՖՀ ․

Բայց (ՕԵ:ՕՖ) *ընդհանուր համեմատականը հասարակաց է այս երկու կարգ համեմատութեանց ․ ուրեմն*

ԱԵ:ԳՖ::ԵԿ:ՖՀ ։

Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ

ԵԿ:ՖՀ::ԿԲ:ՀԴ , *եւայլն ․*

ուրեմն ԱԲ *եւ* ԳԴ *գծերուն այն մասերը որ* ԱԳ , ԵՖ , ԿՀ , *եւայլն , զուգահեռականներէն կտրուած են , իրարու համեմատական են ։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ ուղիղ գիծ մը եռանկեան մը երկու կողմերը իրարու համեմատական մասանց կը բաժնէ , այն գիծը երրորդ կողման զուգահեռական է ։

Եթէ ԱԲԳ *եռանկեան մէջ* ԱԴ:ԴԲ::ԱԵ:ԵԳ , ԴԵ *գիծը* ԲԳ *կողման զուգահեռական է ։*

Քանզի , եթէ ԴԵ *զուգահեռական չէ ,* ԴՕ *գիծը քաշէ* ԲԳ *խարսխին զուգահեռական ․ անատեն*

ԱԴ:ԴԲ::ԱՕ:ՕԳ (*Նախ ․* ԺԵ ․) ․

բայց ենթադրուեցաւ թէ ԱԴ:ԴԲ::ԱԵ:ԵԳ ․

ուրեմն ԱՕ:ՕԳ::ԱԵ:ԵԳ ,

կամ ԱՕ:ԱԵ::ՕԳ:ԵԳ ։

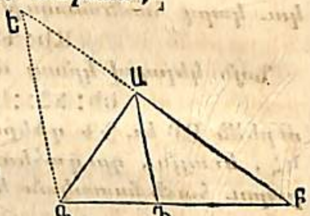
Բայց այս վերջին համեմատութիւնը չիտակ չէ , քանզի առաջին նախադասը , ԱՕ , *առաջին* յետադասէն, ԱԵ, պզտիկ է, իսկ երկրորդ նախադասը, ՕԳ, երկրորդ յետադասէն, ԵԳ, մեծ է. ուրեմն ԴԵ զուգահեռական է ԲԳ խարսխին ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ եռանկեան գագաթնանկիւնը երկու հաւասար մասանց բաժնող գիծը՝ կը բաժնէ խարիսխն ալ երկու մասանց, որք առընթերակայ կողմանց համեմատական են ։

Եթէ ԳԱԴ հաւասար է ԲԱԴ անկեան,

ԲԴ:ԳԴ::ԱԲ:ԱԳ ։



ԴԱ յին զուգահեռական ԳԵ գիծը քաշէ, եւ ԲԱ երկընցուր մինչեւ ԳԵ կտրէ Ե կէտին վրայ ։

Որովհետեւ ԲԳԵ եռանկեան մէջ ԱԴ զուգահեռական է ԳԵ յին,

ԲԴ:ԴԳ::ԱԲ:ԱԵ (Նախ. ԺԵ.) ։

Բայց, որովհետեւ ԱԴ եւ ԳԵ զուգահեռական են, ԱԳԵ հաւասար է ԴԱԳ անկեան, եւ ԱԵԳ հաւասար է ԲԱԴ անկեան (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ. 2, 3). սակայն ենթադրութեամբ, ԴԱԳ հաւասար է ԲԱԴ անկեան. ուրեմն ԱԳԵ հաւասար է ԱԵԳ անկեան, եւ, հետեւապէս, ԱԵ=ԱԳ (Գիրք Ա. Նախ. ԺԲ.) ։ Վերի համեմատութեան մէջ գտնուած ԱԵ յին տեղ ԱԳ դնելով կ'ունենանք

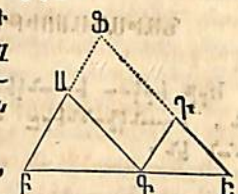
ԲԴ:ԳԴ::ԱԲ:ԱԳ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԸ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եռանկեանց համանուն կողմերը՝ իրարու համեմատական, և եռանկիւնները նման են ։

Եթէ ԱԲԳ եւ ԳԴԵ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, այսինքն ԲԱԳ=ԳԴԵ, ԱԲԳ=ԴԳԵ եւ ԱԳԲ=ԴԵԳ, անատեն

ԲԳ:ԳԵ::ԱԲ:ԳԴ::ԱԳ:ԴԵ ։



Եռանկիւններն այնպէս դիր որ ԲԳ եւ ԳԵ համանուն կողմերը ուղիղ գիծ մը կազմեն, եւ ԲԱ ու ԵԴ կողմերն երկնցուր մինչեւ իրար կտրեն Ֆ կէտին վրայ ։

Որովհետեւ ԲԳԵ ուղիղ գիծ է, եւ ԲԳԱ հաւասար է ԳԵԴ անկեան, կը հետեւի թէ ԱԳ ու ԴԵ զուգահեռական են (Գիրք Ա. Նախ. ԺԹ. Հետ. 2) ։ Նմանապէս, որովհետեւ ԱԲԳ հաւասար է ԴԳԵ անկեան, ԱԲ եւ ԴԳ զուգահեռական են. ուրեմն ԱԳԴՖ զուգահեռագիծ է ։

ԲՖԵ եռանկեան մէջ ԱԳ զուգահեռական է ՖԵ խարսխին. ուրեմն ԲԳ:ԳԵ::ԲԱ:ԱՖ (Նախ. ԺԵ.), կամ, եթէ ԱՖ յին տեղ անոր հաւասարը, ԳԴ, դրուի,

ԲԳ:ԳԵ::ԲԱ:ԳԴ ։

Նոյն ԲՖԵ եռանկեան մէջ, ԳԴ ու ԲՖ զուգահեռական են. ուրեմն ԲԳ:ԳԵ::ՖԴ:ԴԵ, կամ, եթէ ՖԴ յին տեղ անոր հաւասարը, ԱԳ, դրուի,

ԲԳ:ԳԵ::ԱԳ:ԴԵ ։

Եւ, որովհետեւ աս երկու կարգ համեմատութեանց առաջին եւ երկրորդ եզրերը, ԲԳ:ԳԵ, նոյն են, կ'ունենանք ԱԳ:ԴԵ::ԲԱ:ԳԴ (Գիրք Բ. Նախ. Դ. Հետ.) ։

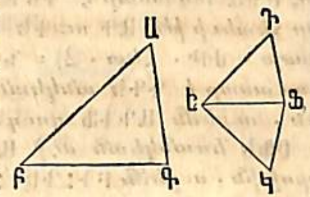
Ուստի ԲԱԳ եւ ԳԵԴ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եռանկեանց համանուն կողմերն իրարու համեմատական են ։ Ուրեմն աս երկու եռանկիւնները նման են (Սահմ. 1) ։

Հետ. Եթէ երկու եռանկեանց մէկուն երկու անկիւնքը միւսին երկու անկեանցը հաւասար են, եռանկիւններն իրարու նման են. քանզի անատեն երրորդ անկիւնքն ալ՝ հաւասար, եւ երկու եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են (Գիրք Ա. Նախ. ԻԵ. Հետ. 2) ։

Պար. Կը տեսնենք թէ նման եռանկեանց համանուն կողմերը հաւասար անկեանց դիմացը կ'իյնան. զորօրինակ, ԱԳԲ=ԴԵԳ անկեան, եւ ԱԲ ու ԴԳ կողմերը համանուն են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու եռանկեանց կողմերը իրարու համեմատական են, եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն և նման են։



Եթէ ԱԲԳ *եւ* ԴԵԶ *եռանկեանց մէջ* ԲԳ:ԵԶ::ԱԲ:ԴԵ:: ԱԳ:ԴԶ, *անատեն* Ա=Դ, Բ =Ե *եւ* Գ=Զ *անկեան, եւ եռանկիւնները նման են*։

Բ *անկեան հաւասար* ԶԵԿ *անկիւնը՝ եւ* Գ *անկեան հաւասար* ԵԶԿ *անկիւնը գծէ․ անատեն* Կ *անկիւնը* Ա *անկեան հաւասար կ'ըլլայ, եւ երկու եռանկիւնները,* ԱԲԳ *ու* ԵԶԿ *փոխադարձաբար հաւասարանկիւն կ'ըլլան* (*Գիրք* Ա. *Նախ.* ԻԵ. *Հետ.* 2)․ *ուրեմն*

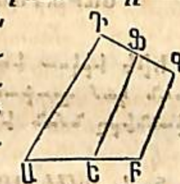
ԲԳ:ԵԶ::ԱԲ:ԵԿ (*Նախ.* ԺԸ.)․ *բայց, ենթադրութեամբ,* ԲԳ:ԵԶ::ԱԲ:ԴԵ․ *ուստի* ԵԿ=ԴԵ։

Նաեւ ԲԳ:ԵԶ::ԱԳ:ԶԿ (*Նախ.* ԺԸ.)․ *բայց, ենթադրութեամբ,* ԲԳ:ԵԶ::ԱԳ:ԴԶ․ *ուստի* ԶԿ=ԴԶ։ *Ուրեմն* ԵԿԶ *եւ* ԴԵԶ *եռանկիւնները հաւասարակողմ ըլլալով իրարու հաւասար են* (*Գիրք* Ա. *Նախ.* Ժ.)։ *Բայց* ԵԿԶ *եւ* ԱԲԳ *եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն չինուած են․ ուրեմն* ԴԵԶ *եւ* ԱԲԳ *եռանկիւններն ալ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն ու նման են*։

Դիտ. 1. *Աս եւ նախընթաց նախադասութենէն յայտնի է թէ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եռանկիւնք նման են․ եւ, հակադարձաբար, եթէ երկու եռանկեանց կողմերը համեմատական են, եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եւ նման են*։

Բայց երեքէն աւելի կողմ ունեցող բազմանկիւններն այնպէս չեն․ քանզի, օրինակի համար, քառակողմանց կողմերուն համեմատութիւնը կրնանք փոխել

առանց անկիւնները փոխելու․ նաեւ անկիւնները կրնանք փոխել առանց կողմանց համեմատութիւնը փոխելու․ ուստի քառակողմանց փոխադարձաբար հաւասարանկիւն ըլլալէն չենք կրնար հետեւցընել թէ կողմերը համեմատական են․ նաեւ կողմերուն համեմատականութենէն չենք կրնար հետեւցընել թէ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են․ զորօրինակ, յայտնի է որ, եթէ ԵԶ *գիծը* ԲԳ *ին զուգահեռական քաշուի,* ԱԵԶԴ *եւ* ԱԲԳԴ *քառակողմերուն անկիւնները նոյնը կ'ըլլան, թէեւ կողմերուն համեմատութիւնը տարբեր է․ նաեւ առանց* ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ *եւ* ԱԴ *կողմերը փոխելու կրնանք անկիւնները փոխել,* Բ *կէտը* Դ *ին մօտեցընելով կամ անկէ հեռացընելով*։



Դիտ. 2. ԺԱ, ԺԸ *եւ* ԺԹ *նախադասութիւնները երկրաչափութեան մէջ ամենէն կարեւորները, եւ գրեթէ ամէն երկրաչափական խնդիր լուծելու բաւական են։ Պատճառը սա է որ ամէն բազմանկիւն՝ եռանկիւններու, ամէն եռանկիւն ալ երկու ուղղանկիւն եռանկեան կրնան բաժնուիլ*։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ի. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու եռանկեանց մէկուն մէկ անկիւնը միւսին մէկ անկեան հաւասար է, և հաւասար անկիւնները կազմող կողմերը համեմատական են, եռանկիւնները նման են։

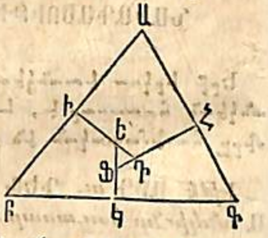
Եթէ ԱԲԳ *ու* ԴԵԶ *եռանկեանց* Ա *անկիւնը հաւասար է* Դ *անկեան, եւ* ԱԲ:ԴԵ::ԱԳ:ԴԶ, *եռանկիւնները նման են*։

ԱԲ *էն* ԴԵ *ին հաւասար* ԱԿ *կտրէ, եւ* ԲԳ *ին զուգահեռական* ԿՀ *քաշէ․* ԱԿՀ *հաւասար է* ԱԲԳ *անկեան* (*Գիրք* Ա. *Նախ.* Ի. *Հետ.* 3), *եւ* ԱԿՀ *ու* ԱԲԳ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են․ ուստի ԱԲ : ԱԿ : : ԱԳ : ԱՀ ․ բայց, ենթադրութեամբ, ԱԲ : ԴԵ : : ԱԳ : ԴԶ ․ նաեւ ԱԿ հաւասար է ԴԵ ին, ուստի ԱՀ հաւասար է ԴԶ ին․ ուրեմն ԱԿՀ ու ԴԵԶ եռանկիւնները իրարու հաւասար են (Գիրք Ա․ Նախ․ Ե․)։ Բայց ԱԿՀ նման է ԱԲԳ եռանկեան․ ուրեմն ԴԵԶ ու ԱԲԳ եռանկիւններն ալ նման են։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԱ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու եռանկեանց մէկուն կողմերը միւսին կողմերուն կամ զուգահեռական կամ ուղղահայեաց են, եռանկիւնները նման են։

Նախ․ Եթէ ԱԲԳ ու ԴԵԶ եռանկեանց ԱԲ կողմը զուգահեռական է ԴԵ կողման, ԲԳ ալ ԵԶ կողման, ԱԲԳ հաւասար է ԴԵԶ անկեան (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԴ․)․ եւ, եթէ ԱԳ զուգահեռական է ԴԶ կողման, ԱԳԲ հաւասար է ԴԶԵ անկեան․ ուստի երրորդ անկիւնները, ԲԱԳ ու ԵԴԶ, իրարու հաւասար են (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԵ․ Հետ․ 2)․ ուրեմն այս եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եւ նման են (Նախ․ ԺԸ․)։



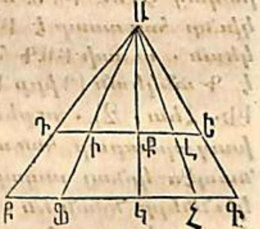
Երկրորդ․ Եթէ ԴԵ ուղղահայեաց է ԱԲ կողման, ԴԶ ալ ԱԳ կողման, ԱԻԴՀ քառակողման Ի եւ Հ անկիւնները ուղիղ են․ եւ, որովհետեւ անոր չորս անկեանց գումարը հաւասար է չորս ուղիղ անկեանց (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԶ․ Հետ․ 1), ԻԱՀ եւ ԻԴՀ անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։ Բայց ԵԴԶ ու ԻԴՀ անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց․

ուրեմն ԵԴԶ հաւասար է ԻԱՀ կամ ԲԱԳ անկեան։ Նմանապէս, եթէ ԵԶ ուղղահայեաց է ԲԳ կողման, կրնայ ապացուցուիլ թէ ԴԶԵ հաւասար է Գ անկեան, ԴԵԶ ալ Բ անկեան․ ուրեմն ԱԲԳ եւ ԴԵԶ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եւ նման են։

Դիտ․ Յայտնի է թէ իրարու զուգահեռական կամ ուղղահայեաց եղող կողմերը համանուն կողմերն են․ զորօրինակ, համանուն են ԴԵ եւ ԱԲ, նաեւ ԴԶ եւ ԱԳ, ու ԵԶ եւ ԲԳ կողմերը։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԲ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ եռանկեան մէջ երբ խարիսխին զուգահեռական գիծ մը տարուի, անոր գագաթէն տարուած բոլոր գծերը խարիսխն ու անոր զուգահեռականը համեմատական մասանց կը բաժնեն։



Եթէ ԴԵ զուգահեռական է ԲԳ խարիսխին, ԴԻ : ԲԶ : : ԻՔ : ԶԿ : : ՔԼ : ԿՀ, եւայլն։

Քանզի, որովհետեւ ԴԻ զուգահեռական է ԲԶ կողման, ԱԴԻ եւ ԱԲԶ եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, եւ

ԴԻ : ԲԶ : : ԱԻ : ԱԶ ․

եւ, որովհետեւ ԻՔ զուգահեռական է ԶԿ ին,

ԱԻ : ԱԶ : : ԻՔ : ԶԿ ․

ուրեմն ԴԻ : ԲԶ : : ԻՔ : ԶԿ (Գիրք Բ․ Նախ․ Դ․ Հետ․)։

Նմանապէս կրնայ ապացուցուիլ թէ

ԻՔ : ԶԿ : : ՔԼ : ԿՀ, եւայլն․

ուրեմն ԴԵ եւ ԲԳ համեմատական մասանց բաժնուած են։

Հետ․ Եթէ ԲԳ հաւասար մասանց բաժնուած ըլլար, ԴԵ ալ հաւասար մասանց բաժնուած պիտի ըլլար։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԳ․ ՀԱՅՏՆԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

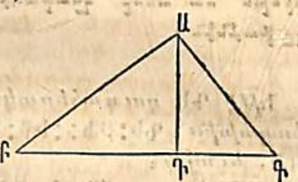
Երբ ուղղանկիւն եռանկեան մը գագաթէն հակուղիղին ուղղահայեաց գիծ մը իջեցուի,

Նախ․ Կազմուած երկու եռանկիւնները թէ իրարու և թէ ամբողջ եռանկեան նման են ։

Երկրորդ․ Ուղիղ անկիւնը կազմող որեւէ կողմ՝ հակուղիղին և այն կողման առընթերակաց հատուածին միջին համեմատականն է ։

Երրորդ․ Ուղղահայեացը հակուղիղին երկու հատուածներուն միջին համեմատականն է ։

Եթէ ԲԱԳ եռանկեան Ա անկիւնը ուղիղ է, եւ ԱԴ ուղղահայեաց է ԲԳ խարսխին,



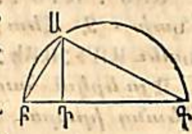
Նախ․ ԲԱԴ եւ ԲԱԳ եռանկեանց մէջ Բ անկիւնը հասարակաց է, եւ ԲԴԱ ուղիղ անկիւնը հաւասար է ԲԱԳ անկեան․ ուստի ԲԱԴ հաւասար է Գ անկեան (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԵ․ Հետ․ 2)․ ուրեմն այս երկու եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եւ նման են ։ Նմանապէս կրնայ ապացուցուիլ թէ ԴԱԳ եւ ԲԱԳ եռանկիւնները նման են․ ուրեմն բոլոր եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եւ նման են ։

Երկրորդ․ Որովհետեւ ԲԱԴ եւ ԲԱԳ եռանկիւնները նման են, ԲԴ:ԲԱ::ԲԱ:ԲԳ․ եւ, որովհետեւ ԱԴԳ եւ ԲԱԳ եռանկիւնները նման են, ԴԳ:ԱԳ::ԱԳ:ԲԳ․ այսինքն ԱԲ եւ ԱԳ կողմանց իւրաքանչիւրը իր առընթերակաց հատուածին եւ հակուղիղին միջին համեմատականն է ։

Երրորդ․ Որովհետեւ ԱԲԴ եւ ԱԴԳ եռանկիւնները նման են, ԲԴ:ԱԴ::ԱԴ:ԴԳ․ այսինքն ԱԴ ուղղահայեացը հակուղիղին ԲԴ եւ ԴԳ հատուածներուն միջին համեմատականն է ։

Պար․ Որովհետեւ ԲԴ:ԱԲ::ԱԲ:ԲԳ, $\text{ԱԲ}^2=\text{ԲԴ}\times\text{ԲԳ}$․ եւ, որովհետեւ ԴԳ:ԱԳ::ԱԳ:ԲԳ, $\text{ԱԳ}^2=\text{ԴԳ}\times\text{ԲԳ}$ (Գիրք Բ․ Նախ․ Ա․ Հետ․)․ ուրեմն $\text{ԱԲ}^2+\text{ԱԳ}^2=\text{ԲԴ}\times\text{ԲԳ}+\text{ԴԳ}\times\text{ԲԳ}=(\text{ԲԴ}+\text{ԴԳ})\times\text{ԲԳ}=\text{ԲԳ}\times\text{ԲԳ}=\text{ԲԳ}^2$․ այսինքն, ԲԳ հակուղիղին վրայ գծուած քառակուսին համազօր է ԱԲ եւ ԱԳ կողմերուն վրայ գծուած քառակուսեաց գումարին ։

Այսպիսով հակուղիղին քառակուսւոյն յատկութեանը դարձեալ կը հասնինք, եւ անանկ ճամբով մը որ ԺԱ․ Նախադասութեան մէջ գործածուածէն տարբեր է․ եւ, իրօք, կ'երեւի թէ այս յատկութիւնը ուրիշ մէկ ընդհանուր յատկութեան հետեւութիւնն է, այսինքն թէ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն եռանկեանց համանուն կողմերը համեմատական են ։



Հետ․ Եթէ ԲԳ տրամագիծ է, ԲԱԳ անկիւնը ուղիղ է (Գիրք Գ․ Նախ․ ԺԸ․ Հետ․ 2)․ եւ

Նախ․ ԱԴ ուղղահայեացը՝ ԲԳ տրամագծին ԲԴ եւ ԴԳ հատուածներուն միջին համեմատականն է․ այսինքն, $\text{ԱԴ}^2=\text{ԲԴ}\times\text{ԴԳ}$ ։

Երկրորդ․ ԱԲ լարը՝ ԲԳ տրամագծին եւ ԲԴ հատուածին միջին համեմատականն է․ այսինքն, $\text{ԱԲ}^2=\text{ԲԴ}\times\text{ԲԳ}$ ։ Նաեւ $\text{ԱԳ}^2=\text{ԴԳ}\times\text{ԲԳ}$․ ուրեմն

$$\text{ԱԲ}^2:\text{ԱԳ}^2::\text{ԲԴ}:\text{ԴԳ}$$ ։

Եթէ ԱԲ^2 եւ ԱԳ^2 բաղդատենք ԲԳ^2ին հետ, կ'ունենանք $\text{ԱԲ}^2:\text{ԲԳ}^2::\text{ԲԴ}:\text{ԲԳ}$,

եւ $\text{ԱԳ}^2:\text{ԲԳ}^2::\text{ԴԳ}:\text{ԲԳ}$ ։

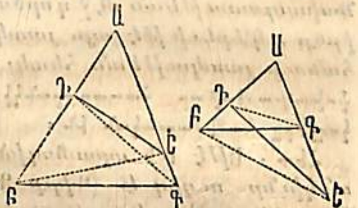
Վերի երեք համեմատութիւնները կը գտնուին նաեւ Նախադասութիւն ԺԱ․ Հետ․ 2 եւ 3 ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւններ, որոնց մէկուն մէկ անկիւնը միւսին մէկ անկեանը հաւասար է, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս հաւասար անկիւնները կազմող կողմանց արտադրեալները։

Եթէ ԱԲԳ *եւ* ԱԴԵ *եռանկեանց մէկուն* Ա *անկիւնը միւսին* Ա *անկեանը հաւասար է,*

ԱԲԳ:ԱԴԵ::ԱԲ×ԱԳ:ԱԴ×ԱԵ։



ԲԵ *եւ* ԴԳ *քաշէ. որովհետեւ* ԱԲԵ *եւ* ԱԴԵ *եռանկիւնները նոյն գագաթն ունին,* Ե,

ԱԲԵ : ԱԴԵ :: ԱԲ : ԱԴ
(Նախ. Զ. Հետ.).
Նաեւ ԱԲԳ : ԱԲԵ :: ԱԳ : ԱԵ։

Այս երկու համեմատութեանց իրարու համապատասխանող եզրերն իրարու հետ բազմապատկելով ու երկուքին հասարակաց եղող ԱԲԵ *եզրը ջնջելով, կ'ունենանք*

ԱԲԳ:ԱԴԵ::ԱԲ×ԱԳ:ԱԴ×ԱԵ։

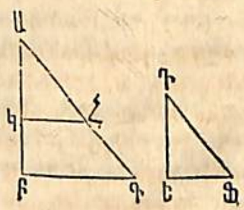
Հետ. Ուրեմն երկու եռանկիւնները իրարու համազօր են, երբ ԱԲ×ԱԳ=ԱԴ×ԱԵ, *կամ* ԱԲ:ԱԴ::ԱԵ:ԱԳ. *այսինքն, երբ* ԴԳ *եւ* ԲԵ *զուգահեռական են։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Նման եռանկիւնք իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիները։

Եթէ ԱԲԳ *եւ* ԴԵՖ *նման եռանկեանց* Ա *անկիւնը հաւասար է* Դ *անկեան, եւ* Բ *անկիւնը* Ե *անկեան, անատեն*

ԱԲԳ:ԴԵՖ::ԱԳ^2:ԴՖ^2 ։



Քանզի, որովհետեւ Ա *հաւասար է* Դ *անկեան,*

ԱԲԳ:ԴԵՖ::ԱԲ×ԱԳ:ԴԵ×ԴՖ (Նախ. ԻԴ.).
եւ, որովհետեւ եռանկիւնները նման են,

ԱԲ:ԴԵ::ԱԳ:ԴՖ.

աս համեմատութեան ու հետեւեալին իրարու համապատասխանող եզրերը բազմապատկէ,

ԱԳ:ԴՖ::ԱԳ:ԴՖ, *եւ*

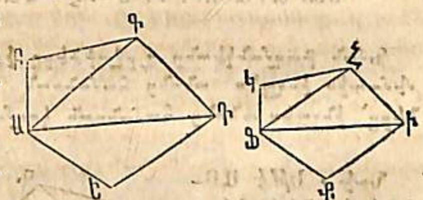
կ'ունենանք ԱԲ×ԱԳ:ԴԵ×ԴՖ::ԱԳ^2:ԴՖ^2 (Գիրք Բ. Նախ. ԺԳ.).

ուրեմն ԱԲԳ:ԴԵՖ::ԱԳ^2:ԴՖ^2 (Գիրք Բ. Նախ. Դ. Հետ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման բազմանկիւնք կրնան նոյն թիւ եռանկեանց բաժնուիլ, անանկ որ մէկուն եռանկիւնները միւսին եռանկիւններուն հետ նման զոյգ առնելով, և երկուքին եռանկիւններն իրարու նման ըլլան։

ԱԲԳԴԵ *եւ* ՖԿՀԻՔ *նման բազմանկեանց որեւէ երկու համանուն անկիւններէն,* Ա *եւ* Ֆ, *քաշէ* ԱԳ, ԱԴ *եւ* ՖՀ, ՖԻ *տրամանկիւնները։*



Որովհետեւ բազմանկիւնները նման են, ԱԲԳ *հաւասար է* ՖԿՀ *անկեան, եւ* ԱԲ:ՖԿ::ԲԳ:ԿՀ (Սահմ. 1). *ուրեմն* ԱԲԳ *եւ* ՖԿՀ *եռանկիւնները իրարու նման են* (Նախ. Ի.), *եւ* ԲԳԱ *հաւասար է* ԿՀՖ *անկեան։ Նաեւ* ԲԳԴ=ԿՀԻ *անկեան. ուրեմն* ԱԳԴ=ՖՀԻ *անկեան։ Բայց, որովհետեւ* ԱԲԳ *եւ* ՖԿՀ *եռանկիւնները նման են,* ԱԳ:ՖՀ::ԲԳ:ԿՀ. *եւ, որովհետեւ բազմանկիւնները նման են,* ԲԳ:ԿՀ::ԳԴ:ՀԻ. *ուրեմն* ԱԳ:ՖՀ::ԳԴ:ՀԻ (Գիրք Բ. Նախ. Դ. Հետ.)։ *Բայց* ԱԳԴ=ՖՀԻ *անկեան. ուրեմն* ԱԳԴ *եւ* ՖՀԻ *եռանկիւնները իրարու նման են* (Նախ. Ի.)։ *Նոյն կերպով կրնայ ապա-*

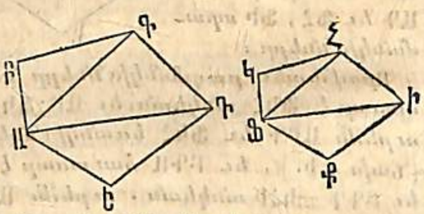
ցուցուիլ թէ մնացած եռանկիւնները իրարու նման են և նման դիրք ունին։

Պոր. Աս նախադասութեան հակադարձն ալ ճշմարիտ է. Եթէ երկու բազմանկիւնք կրնան նոյն թիւ եռանկեանց բաժնուիլ, այնպէս որ միևնոյն եռանկիւնները միևնոյն եռանկիւններուն հետ նման դիրք ունենան, և երկուքին եռանկիւններն իրարու նման ըլլան, բազմանկիւններն ալ իրարու նման են։

Քանզի, որովհետև եռանկիւնները իրարու նման են, ԱԲԳ=ՑԿՀ անկեան, ԲԳԱ=ԿՀՑ անկեան, ԱԳԴ=ՑՀԻ անկեան, և այլն. ուրեմն ԲԳԴ=ԿՀԻ անկեան, ԳԴԵ=ՀԻՔ անկեան, և այլն։ Նաև ԱԲ:ՑԿ::ԲԳ:ԿՀ::Ա[illegible]:ՑՀ::ԳԴ:ՀԻ, և այլն. ուստի երկու բազմանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, և անոնց կողմերը համեմատական են. ուրեմն իրարու նման են։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԷ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Նման բազմանկեանց շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց համանուն կողմերը, և մակերեսները՝ ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիքը։



Նախ. Եթէ ԱԲԳԴԵ և ՑԿՀԻՔ նման բազմանկիւնք են,

ԱԲ:ՑԿ::ԲԳ:ԿՀ::ԳԴ::ՀԻ, և այլն. ուրեմն

ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ և այլն : ՑԿ+ԿՀ+ՀԻ և այլն::ԱԲ:ՑԿ (Գիրք Բ. Նախ. Ժ.). այսինքն, առաջնոյն շրջագիծը երկրորդին շրջագծին այնպէս կը համեմատի ինչպէս ԱԲ և ՑԿ համանուն կողմերը։

Երկրորդ. Որովհետև ԱԲԳ և ՑԿՀ եռանկիւնները նման են, ԱԲԳ:ՑԿՀ::ԱԳ²:ՑՀ² (Նախ. ԻԵ.). և, որովհետև ԱԳԴ և ՑՀԻ եռանկիւնները նման են, ԱԳԴ:ՑՀԻ::ԱԳ²:ՑՀ². ուրեմն

ԱԲԳ:ՑԿՀ::ԱԳԴ:ՑՀԻ (Գիրք Բ. Նախ. Դ. Հետ.). նմանապէս կրնայ ապացուցուիլ թէ

ԱԳԴ:ՑՀԻ::ԱԴԵ:ՑԻՔ.

ուրեմն ԱԲԳ+ԱԳԴ+ԱԴԵ:ՑԿՀ+ՑՀԻ+ՑԻՔ::ԱԲԳ:ՑԿՀ, կամ ԱԲԳԴԵ:ՑԿՀԻՔ:ԱԲ²:ՑԿ² (Նախ. ԻԵ.). այսինքն նման բազմանկեանց մակերեսներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիքը։

Հետ. Երբ ուղղանկիւն եռանկեան մը երեք կողմերուն վրայ նման ձևեր կը գծուին, հակուղիղին վրայ գծուածը համազօր է միւս երկուքին գումարին. քանզի այս ձևերն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիները, և հակուղիղին քառակուսին համազօր է միւս երկու կողմանց քառակուսիներուն գումարին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԸ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բոլորակի մը մէջ երկու լար իրար կը կտրեն, անոնց հատուածները իրարու փոխակի համեմատական են։

ԱԲ և ԳԴ լարերը 0 կէտին վրայ իրար կտրելով չորս հատուած կ՚ըլլան, և այս հատուածները իրարու փոխակի համեմատական են, այսինքն առաջնոյն առաջին մասը այնպէս կը համեմատի երկրորդին առաջին մասին, ինչպէս երկրորդին երկրորդ մասը՝ առաջնոյն երկրորդ մասին. կամ Ա0:Դ0::0Գ:0Բ։

ԱԳ և ԲԴ գծերը քաշէ։ ԱԳ0 և ԲՕԴ եռանկեանց մէջ Ա0Գ և Բ0Դ անկիւնները գագաթնանկիւն ըլլալով, իրարու հաւասար են. Ա անկիւնը հաւասար է Գ անկեան (Գիրք Գ. Նախ. ԺԸ. Հետ. 1). և, նոյն պատճառաւ, Գ հաւասար է Բ անկեան. ուրեմն եռանկիւնները նման են, և Ա0:Դ0::0Գ:0Բ։

Հետ. Ուրեմն ԱՕ×ՕԲ=ԴՕ×ՕԳ. *այսինքն մէկ լարին երկու հատուածներուն արտադրեալը կամ ուղղանկիւնը հաւասար է միւսին հատուածներուն արտադրեալին կամ ուղղանկեանը* (Նախ. Դ. Պար. 2) :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բոլորակէ մը դուրս եղող կէտէ մը մինչեւ գոգաւոր աղեղը երկու հատանող կը տարուին, ամբողջ հատանողները իրենց արտաքին հատուածներուն փոփոխակի համեմատական են :

Օ *կէտէն* ՕԲ *եւ* ՕԳ *հատանողները քաշէ. անատեն* ՕԲ:ՕԳ::ՕԴ:ՕԱ :

ԱԳ *եւ* ԴԲ *գծերը քաշէ :* ՕԱԳ *եւ* ՕԲԴ *եռանկիւնները* Օ *հասարակաց անկիւնն ունին. նաեւ* Բ=Գ *անկեան* (Գիրք Գ. Նախ. ԺԸ. Հետ. 1). *ուրեմն այս եռանկիւնները նման են, եւ*

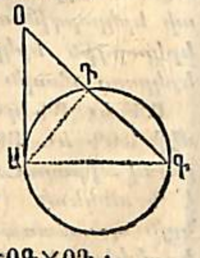
ՕԲ:ՕԳ::ՕԴ:ՕԱ :

Հետ. Ուրեմն ՕԱ×ՕԲ *ուղղանկիւնը հաւասար է* ՕԳ×ՕԴ *ուղղանկեան :*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Լ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բոլորակէ մը դուրս որեւէ կէտէ մը շօշափող մը եւ հատանող մը կը տարուին, շօշափողը ամբողջ հատանողին եւ անոր արտաքին մասին միջին համեմատականն է :

Օ *կէտէն* ՕԱ *շօշափողը եւ* ՕԳ *հատանողը քաշէ. անատեն* ՕԳ:ՕԱ::ՕԱ:ՕԴ, *կամ* ՕԱ^{2}=ՕԳ×ՕԴ :



ԱԴ *եւ* ԱԳ *քաշէ :* ՕԱԴ *եւ* ՕԱԳ *եռանկեանց մէջ* Օ *անկիւնը հասարակաց է.* ՕԱԴ *անկեան չափը* ԱԴ *աղեղան կէսն է* (Գիրք Գ. Նախ. ԻԱ.), *եւ* Գ *անկիւնը նոյն չափն ունի. ուստի այս երկու անկիւնները իրարու հաւասար են, եւ երկու եռանկիւնները նման են.*

ուրեմն ՕԳ:ՕԱ::ՕԱ:ՕԴ, *կամ* ՕԱ^{2}=ՕԳ×ՕԴ :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԼԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ եռանկեան մը որեւէ մէկ անկիւնէն գիծ մը կը տարուի մինչեւ անկեան ընդդիմակաց կողմը, անկիւնը երկու հաւասար մասանց բաժնելով, այն անկիւնը կազմող կողմանց ուղղանկիւնը համազօր է բաժնող գծին քառակուսւոյն, աւելեալ երրորդ կողման երկու մասանց ուղղանկիւնը :

Եթէ ԱԲԳ *եռանկեան մէջ* ԲԱԴ *հաւասար է* ԴԱԳ *անկեան, անատեն*

ԱԲ×ԱԳ=ԱԴ^{2}+ԲԴ×ԴԳ :

Բ, Ա *եւ* Գ *կէտերուն վրայ շրջանակ մը գծէ, երկնցուր* ԱԴ *գիծը մինչեւ* Ե *կէտը, եւ* ԳԵ *քաշէ :*

ԲԱԴ *նման է* ԵԱԳ *եռանկեան. քանզի, ենթադրութեամբ,* ԲԱԴ *անկիւնը հաւասար է* ԵԱԳ *անկեան, եւ* Բ *ու* Ե *անկիւնները նոյն չափը,* ԱԳ *աղեղան կէսը, ունենալով՝ իրարու հաւասար են. ուստի* ԱԲ:ԱԵ::ԱԴ:ԱԳ, *կամ* ԱԲ×ԱԳ=ԱԵ×ԱԴ. *բայց* ԱԵ=ԱԴ+ԴԵ, *եւ այս հաւասարութեան անդամները* ԱԴ *ով բազմապատկելով կ'ունենանք* ԱԵ×ԱԴ=ԱԴ^{2}+ԱԴ×ԴԵ. *արդ* ԱԴ×ԴԵ =ԲԴ×ԴԳ (Նախ. ԻԸ.). *ուրեմն* ԱԲ×ԱԳ=ԱԴ^{2}+ԲԴ ×ԴԳ :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԼԲ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամեն եռանկեան որեւէ երկու կողմանց ուղղանկիւնը հաւասար է այն ուղղանկեան, որուն մէկ կողմը եռանկեան շուրջը գծուած բոլորակին տրամագիծն է, եւ միւսը՝ երկու կողմանց կազմած անկեան գագաթէն մինչեւ երրորդ կողմը քաշուած ուղղահայեացը։

Եթէ ԱԲԳ *եռանկեան մէջ* ԱԴ *ուղղահայեաց է* ԲԳ *գծին, եւ* ԵԳ՝ *դուրս գծուած բոլորակին տրամագիծն է, անատեն* ԱԲ×ԱԳ=ԱԴ×ԳԵ։

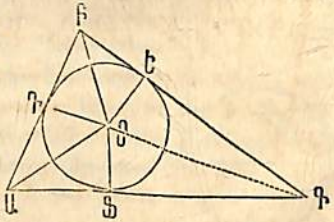
Քաշէ ԱԵ *գիծը։* ԱԳԵ *եւ* ԱԲԴ *եռանկեանց մէջ* ԲԴԱ *եւ* ԳԱԵ *անկիւնները ուղիղ են, նաեւ* Ե *անկիւնը հաւասար է* Բ *անկեան․ ուստի եռանկիւնները նման են, եւ* ԱԲ:ԳԵ::ԱԴ:ԱԳ․ *ուրեմն* ԱԲ×ԱԳ=ԱԴ×ԳԵ։

Հետ․ *Եթէ այս հաւասարութեան երկու անդամները* ԲԳ *ով բազմապատկուին, կ'ունենանք* ԱԲ×ԱԳ×ԲԳ=ԳԵ×ԱԴ×ԲԳ։

Արդ ԱԴ×ԲԳ՝ *եռանկեան մակերեսին կրկնապատիկն է* (Նախ․ Զ․)․ *ուրեմն* եռանկեան մը երեք կողմանց արտադրեալը հաւասար է անոր մակերեսին, բազմապատկեալ շուրջը գծուած բոլորակին տրամագծին կրկնապատիկովը։

Դար․ *Նաեւ կրնայ ապացուցուիլ թէ* եռանկեան մը մակերեսը հաւասար է անոր շրջագծին՝ բազմապատկեալ ներսը գծուած բոլորակին շառաւիղին կէսովը։

Քանզի ԱՕԲ, ԱՕԳ *եւ* ԲՕԳ *եռանկիւնները նոյն բարձրութիւնն ունին, այսինքն ներսը գծուած բոլորակին շառաւիղը․ ուրեմն անոնց գումարը կամ* ԱԲԳ *եռանկեան մակերեսը հաւասար է* ԱԲ, ԱԳ *եւ* ԲԳ *խարիսխներուն գումարին, բազմապատկեալ* ԴՕ *շառաւիղին կիսովը։*



ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԼԳ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամեն ներսը գծուած քառանկեան տրամանկեանց ուղղանկիւնը հաւասար է ընդդիմակաց կողմանց ուղղանկեանց գումարին։

ԱԲԳԴ *ներսը գծուած քառանկեան մէջ*

ԱԳ×ԲԴ=ԱԲ×ԳԴ+ԱԴ×ԲԳ։

ԳԴ *աղեղէն* ԳՕ *կտրէ հաւասար* ԱԴ *աղեղան, եւ* ԲՕ *գիծը քաշէ։*

Որովհետեւ ԱԴ=ԳՕ *աղեղան,* ԱԲԴ=ԳԲԻ *անկեան․ նաեւ* ԱԴԲ *եւ* ԲԳԻ *անկիւնները նոյն հատուածին մէջ գծուած ըլլալով իրարու հաւասար են․ ուստի* ԱԲԴ *եւ* ԻԲԳ *եռանկիւնները նման են, եւ* ԱԴ:ԳԻ::ԲԴ:ԲԳ․ *ուրեմն* ԱԴ×ԲԳ=ԳԻ×ԲԴ։

Դարձեալ, որովհետեւ ԱԴ=ՕԳ *աղեղան, ապա* ԱԴ+ԴՕ *կամ* ԱՕ=ՕԳ+ՕԴ *կամ* ԳԴ *աղեղան․ ուստի* ԱԲԻ=ԴԲԳ *անկեան․ Նաեւ* ԲԱԻ *եւ* ԲԴԳ *անկիւնները նոյն հատուածին մէջ գծուած ըլլալով իրարու հաւասար են․ ուստի* ԱԲԻ *եւ* ԴԲԳ *եռանկիւնները նման են, եւ* ԱԲ:ԲԴ::ԱԻ:ԳԴ․ *ուրեմն* ԱԲ×ԳԴ=ԱԻ×ԲԴ։ *Այս երկու հաւասարութիւնները գումարելով եւ գիտելով թէ* ԱԻ×ԲԴ+ԳԻ×ԲԴ=(ԱԻ+ԳԻ)×ԲԴ=ԱԳ×ԲԴ, *կ'ունենանք* ԱԴ×ԲԳ+ԱԲ×ԳԴ=ԱԳ×ԲԴ։

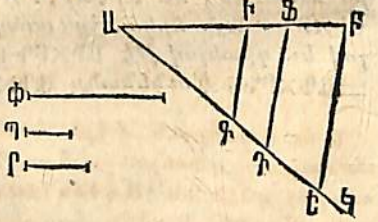
ԽՆԴԻՐՆԵՐ

ԽՆԴԻՐ Ա·

Ծանօթ գիծ մը տանի մը հաւասար մասանց բաժնել, կամ այնպիսի մասանց՝ որ ուրիշ ծանօթ գծերու համեմատական ըլլան ։

Նախ· ԱԲ գիծը հինգ հաւասար մասանց բաժնելու համար, Ա կէտէն ԱԿ անորոշ գիծը քաշէ, այս գծէն իրարու հաւասար հինգ մաս կտրէ, ԱԳ, ԳԴ, ԴԵ, եւայլն, նաեւ ԿԲ գիծը, եւ անոր զուգահեռական ԳԻ գիծը քաշէ· ԱԻ՝ ԱԲ գծին հինգերորդ մասն է, եւ, եթէ անոր չափը հինգ անգամ ԱԲ գըծէն կտրուի, ԱԲ՝ հինգ հաւասար մասանց բաժնուած կ՚ըլլայ ։

Քանզի, որովհետեւ ԳԻ զուգահեռական է ԿԲ գծին, ԱԳ եւ ԳԿ համեմատական են ԱԻ եւ ԻԲ գծերուն (Նախ· ԺԵ·)· բայց ԱԳ՝ ԱԿ ին հինգերորդ մասն է· ուրեմն ԱԻ՝ ԱԲ ին հինգերորդ մասն է ։

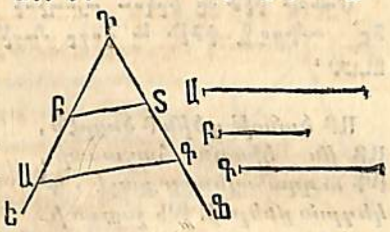


Երկրորդ· Եթէ պահանջուի թէ ԱԲ գիծը այնպէս բաժնուի որ անոր մասերը՝ Փ, Պ եւ Ր գծերուն համեմատական ըլլան, Ա կէտէն ԱԿ անորոշ գիծը քաշէ· այս գծէն Փ, Պ եւ Ր գծերուն հաւասար ԱԳ, ԳԴ եւ ԴԵ կտրէ· ԵԲ եւ անոր զուգահեռական ԴԶ եւ ԳԻ գծերը քաշէ· ԱԻ, ԻԶ եւ ԶԲ՝ պահանջուած մասերն են ։

Քանզի, որովհետեւ ԳԻ եւ ԴԶ զուգահեռական են ԲԵ գծին, ԱԻ, ԻԶ եւ ԶԲ համեմատական են ԱԳ, ԳԴ եւ ԴԵ գծերուն· բայց ասոնք հաւասար են Փ, Պ եւ Ր գծերուն· ուրեմն ԱԻ, ԻԶ եւ ԶԲ՝ պահանջուած մասերն են ։

ԽՆԴԻՐ Բ·

Երեք ծանօթ գծերու չորրորդ համեմատականը գտնել ։

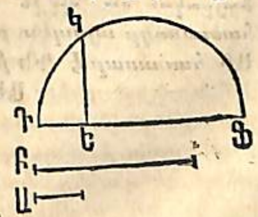


Ա, Բ եւ Գ գծերուն չորրորդ համեմատականը գտնելու համար, կէտ մը, ինչպէս Դ, ԴԵ եւ ԴԶ անորոշ գըծերը քաշէ· ԴԵ էն ԴԱ եւ ԴԲ կտրէ Ա եւ Բ գծերուն հաւասար· ԴԶ էն ԴԳ կտրէ Գ գծին հաւասար· ԱԳ եւ անոր զուգահեռական ԲՏ գծերը քաշէ· ԴՏ պահանջուած համեմատականն է· քանզի, որովհետեւ ԲՏ զուգահեռական է ԱԳ գծին, ԴԱ:ԴԲ::ԴԳ:ԴՏ· բայց այս համեմատութեան առաջին երեք եզրերը՝ Ա, Բ եւ Գ գըծերուն հաւասար են· ուրեմն ԴՏ պահանջուած համեմատականն է ։

Հետ· Նոյն կերպով Ա եւ Բ ծանօթ գծերուն երրորդ համեմատականը կրնայ գտնուիլ, քանզի պահանջուած համեմատականը՝ Ա, Բ եւ Բ երեք ծանօթ գծերուն չորրորդ համեմատականն է ։

ԽՆԴԻՐ Գ·

Երկու ծանօթ գծերու միջին համեմատականը գտնել ։

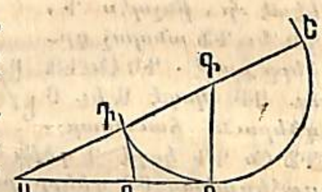


Ա եւ Բ գծերուն միջին համեմատականը գտնելու համար, ԴԶ անորոշ գծէն ԴԵ՝ Ա գծին հաւասար, եւ ԵԶ՝ Բ գծին հաւասար կտրէ, ԴԿԶ կիսաբոլորակը գծէ, եւ ԴԶ տրամագծին ուղղահայեաց ԵԿ քաշէ· ԵԿ՝ պահանջուած համեմատականն է ։

Քանզի ԵԿ ուղղահայեացը ԴԵ ու ԵՖ գծերուն միջին համեմատականն է (Նախ․ ԻԳ․ Հետ․)․ եւ այս հատուածները հաւասար են Ա եւ Բ գծերուն։

ԽՆԴԻՐ Դ․

Ծանօթ գիծ մը երկու այնպիսի մասանց բաժնել, որ մեծը՝ ամբողջ գծին և փոքր մասին միջին համեմատականն ըլլայ։



ԱԲ ծանօթ գծին Բ ծայրէն, ԱԲ ին կիսոյն հաւասար, ԲԳ ուղղահայեացը քաշէ․ Գ՝ կեդրոն ընելով, ԲԳ շառաւիղով կիսաբոլորակ մը գծէ, եւ ԱԴԳԵ ուղիղ գիծը քաշէ․ նաեւ ԱԲ գծէն ԱԴ ին հաւասար ԱՖ գիծը կտրէ․ ԱՖ եւ ՖԲ երկու պահանջուած հատուածներն են․ այսինքն ԱԲ:ԱՖ::ԱՖ:ՖԲ։

Քանզի ԱԲ՝ ԳԲ շառաւիղին ուղղահայեաց ըլլալով շօշափող է․ ուստի ԱԵ:ԱԲ::ԱԲ:ԱԴ (Նախ․ Լ․)․ ուրեմն ԱԵ—ԱԲ:ԱԲ::ԱԲ—ԱԴ:ԱԴ (Գիրք Բ․ Նախ․ Ջ․)։ Բայց, որովհետեւ ԲԳ շառաւիղը ԱԲ ին կէսն է, ԴԵ տրամագիծը՝ ԱԲ ին հաւասար է․ ուստի ԱԵ—ԴԵ=ԱԴ=ԱՖ․ նաեւ, որովհետեւ ԱՖ=ԱԴ, ԱԲ—ԱԴ=ՖԲ․ ուրեմն ԱՖ:ԱԲ::ՖԲ:ԱԴ կամ ԱՖ․ կամ շրջմամբ

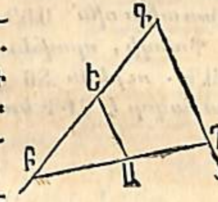
ԱԲ:ԱՖ::ԱՖ:ՖԲ։

Պար․ ԱԲ գծին վերոյիշեալ կերպով բաժանումը՝ ծայրական ու միջին եզերու բաժնել կը կոչուի։ ԱԵ հատանողը այսպէս բաժնուած է․ քանզի, որովհետեւ ԱԲ հաւասար է ԴԵ ի,

ԱԵ:ԴԵ::ԴԵ:ԱԴ։

ԽՆԴԻՐ Ե․

Ծանօթ անկեան մը ծանօթ մէկ կէտէն վրայէն գիծ մը քաշել մինչեւ անկեան երկու կողմերը՝ այնպէս որ կէտէն ու կողմերուն մէջտեղի մասերն իրարու հաւասար ըլլան։

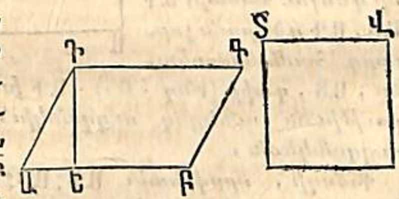


ԲԳԴ անկեան մէջ Ա կէտէն քաշէ ԱԵ գիծը ԴԳ ին զուգահեռական․ ԳԵ ին հաւասար ԵԲ կտրէ, եւ ԲԱԴ քաշէ․ ասիկա պահանջուած գիծն է։

Քանզի, որովհետեւ ԱԵ զուգահեռական է ԳԴ գծին, ԲԵ:ԵԳ::ԲԱ:ԱԴ․ բայց ԲԵ=ԵԳ․ ուրեմն ԲԱ=ԱԴ։

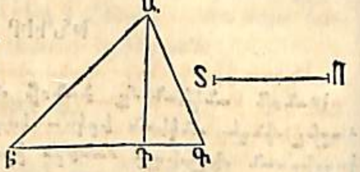
ԽՆԴԻՐ Զ․

Քառակուսի մը գծել որ ծանօթ զուգահեռագծի մը կամ ծանօթ եռանկեան մը համազօր ըլլայ։



Նախ․ ԱԲ խարիսխն ու ԴԵ բարձրութիւնն ունեցող ԱԲԳԴ զուգահեռագծին համազօր քառակուսի մը գծելու համար, ԱԲ եւ ԴԵ գծերուն միջին համեմատականը, ՏՎ, գտիր (Խնդիր Գ․)․ ՏՎ պահանջուած քառակուսւոյն կողմն է։

Քանզի, որովհետեւ ԱԲ:ՏՎ::ՏՎ:ԴԵ, ՏՎ^2=ԱԲ×ԴԵ․ բայց ԱԲ×ԴԵ՝ զուգահեռագծին մակերեսն է, ու ՏՎ^2՝ քառակուսիին մակերեսը․ ուրեմն իրարու համազօր են։

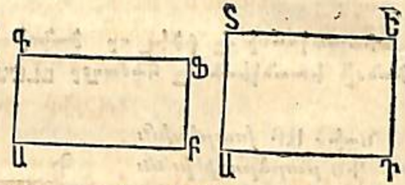


Երկրորդ. ԲԳ խարիսխը եւ ԱԴ բարձրութիւնն ունեցող ԱԲԳ եռանկեան համազօր քառակուսի մը գծելու համար, ԱԴ գծին կիսոյն ու ԲԳ ին միջին համեմատականը, ՈՏ, գտիր. ՈՏ գծին վրայ գծուած քառակուսին՝ ԱԲԳ եռանկեան համազօր պիտի ըլլայ:

Քանզի, որովհետեւ $\text{ԲԳ}:\text{ՏՈ}::\text{ՏՈ}:\frac{1}{2}\text{ԱԴ}$, $\text{ՏՈ}^2=\text{ԲԳ}\times\frac{1}{2}\text{ԱԴ}$. ուրեմն ՏՈ գծին վրայ գծուած քառակուսին համազօր է ԱԲԳ եռանկեան:

ԽՆԴԻՐ Է.

Տուեալ գծի մը վրայ ուղղանկիւն մը գծել որ տուեալ ուղղանկեան մը համազօր ըլլայ:

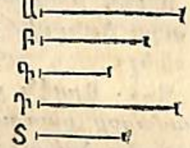


ԱԴ գծին վրայ ԱԲՑԳ ուղղանկեան համազօր ուղղանկիւն մը գծելու համար, ԱԴ ԱԲ, ԱԳ գծերուն չորրորդ համեմատականը, ԱՏ, գտիր (Խնդ. Բ.). ԱԴ խարիսխն ու ԱՏ բարձրութիւնն ունեցող ուղղանկիւնը՝ համազօր է ԱԲՑԳ ուղղանկեան:

Քանզի, որովհետեւ $\text{ԱԴ}:\text{ԱԲ}::\text{ԱԳ}:\text{ԱՏ}$, $\text{ԱԴ}\times\text{ԱՏ}=\text{ԱԲ}\times\text{ԱԳ}$. ուրեմն երկու ուղղանկիւններն իրարու համազօր են:

ԽՆԴԻՐ Ը.

Երկու գիծ գտնել որոնց ընդհանուր համեմատականը նոյն ըլլայ, ինչ որ է տուեալ գծերով կազմուած երկու ուղղանկեանց ընդհանուր համեմատականը:

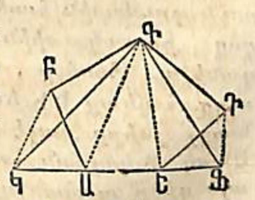


Ա, Բ, Գ եւ Դ գծերով կազմուած $\text{Ա}\times\text{Բ}$ եւ $\text{Գ}\times\text{Դ}$ ուղղանկեանց ընդհանուր համեմատականն ունեցող երկու գիծ գտնելու համար, Բ, Գ, Դ գծերուն չորրորդ համեմատականը, Տ, գտիր. Ա եւ Տ պահանջուած երկու գծերն են. քանզի, որովհետեւ $\text{Բ}:\text{Գ}::\text{Դ}:\text{Տ}$, $\text{Գ}\times\text{Դ}=\text{Բ}\times\text{Տ}$. ուրեմն $\text{Ա}\times\text{Բ}:\text{Գ}\times\text{Դ}::\text{Ա}\times\text{Բ}:\text{Բ}\times\text{Տ}::\text{Ա}:\text{Տ}$:

Հետ. Ա եւ Գ գծերուն վրայ գծուած քառակուսիներուն ընդհանուր համեմատականը գտնելու համար, Ա եւ Գ գծերուն երրորդ համեմատականը, Տ, գտիր. անատեն $\text{Ա}:\text{Գ}::\text{Գ}:\text{Տ}$, կամ $\text{Ա}\times\text{Տ}=\text{Գ}^2$, կամ $\text{Ա}^2\times\text{Տ}=\text{Ա}\times\text{Գ}^2$. ուրեմն $\text{Ա}^2;\text{Գ}^2::\text{Ա}:\text{Տ}$:

ԽՆԴԻՐ Թ.

Տուեալ բազմանկեան մը համազօր եռանկիւն մը գտնել:



ԱԲԳԴԵ բազմանկեան համազօր եռանկիւն մը գտնելու համար, ԳԵ տրամանկիւնը քաշէ. ԳԵ ին զուգահեռական ԴՑ գիծը քաշէ մինչեւ ԱԵ գծին շարունակութիւնը. քաշէ նաեւ ԳՑ. ԱԲԳԴԵ բազմանկիւնը համազօր է ԱԲԳՑ բազմանկեան որ առջի բազմանկիւնէն մէկ պակաս կողմ ունի:

Քանզի ԳԴԵ եւ ԳՑԵ եռանկիւնները նոյն խարիսխը, ԳԵ, ունին, եւ, որովհետեւ անոնց գագաթները ԳԵ խարսխին զուգահեռական եղող ԴՑ գծին վրայ են, նոյն բարձրութիւնն ունին. ուստի իրարու համազօր են ։ Անոնց իւրաքանչիւրին վրայ՝ ԱԲԳԵ զուգահեռագիծը գումարելով, կը տեսնենք թէ ԱԲԳԴԵ բազմանկիւնը համազօր է ԱԲԳՖ բազմանկեան ։

Նոյն կերպով ԱԲԳ եռանկեան տեղ ԱԿԳ եռանկիւնը դնելով, ԱԲԳԴԵ բազմանկեան համազօր եղող պահանջուած ԿԳՖ եռանկիւնը կ'ունենանք ։

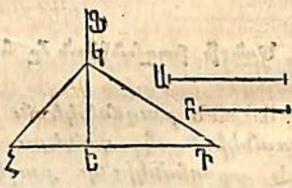
Որեւէ բազմանկեան կողմերը այսպէս մէկիկ մէկիկ դուրս ձգելով, անոր համազօր եռանկիւն մը կրնանք գտնել ։

Պտր. Արդէն ցուցուած է թէ ամէն եռանկիւն իրեն համազօր քառակուսւոյ կրնայ փոխուիլ (Խնդիր Զ.). այսպէս ծանօթ բազմանկեան մը համազօր քառակուսին միշտ կրնայ գտնուիլ, եւ աս գործողութիւնը կը կոչուի բազմանկիւնը քառակուսել ։

Բոլորակը քառակուսելու խնդիրը՝ ծանօթ տրամագիծով բոլորակի մը համազօր եղող քառակուսին գտնելն է ։

ԽՆԴԻՐ Ժ.

Երկու ծանօթ քառակուսիներուն մէկ գումարին և մէկ տարբերութեանը համազօր եղող քառակուսիին կողմը գտնել ։



Նախ. Ա եւ Բ կողմերն ունեցող երկու քառակուսիներուն գումարին համազօր եղող քառակուսիին կողմը գտնելու համար, իրարու ուղղահայեաց ԵԴ եւ ԵՖ անորոշ գծերը քաշէ. ԵԴ կտրէ Ա կողման հաւասար, ԵԿ ալ՝ Բ կողման հաւասար. նաեւ ԿԴ գիծը քաշէ. այս գիծը պահանջուած քառակուսւոյ կողմն է ։

Քանզի, որովհետեւ ԿԵԴ ուղղանկիւն եռանկիւն է, ԿԴ կողման վրայ գծուած քառակուսին համազօր է միւս երկու կողմանց վրայ գծուած քառակուսիներուն գումարին ։

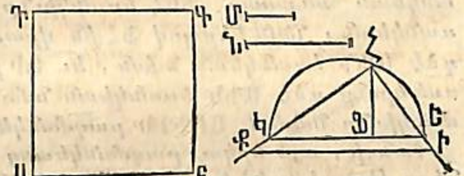
Երկրորդ. Ա եւ Բ կողմերն ունեցող երկու քառա-

կուսիներուն տարբերութեանը համազօր քառակուսիին կողմը գտնելու համար, ՖԵՀ ուղիղ անկիւնը գծէ. կտրէ ԵԿ՝ երկու ծանօթ կողմանց փոքրին հաւասար. Կ կէտը կեդրոն ընելով՝ միւս ծանօթ կողման հաւասար ԿՀ շառաւիղով աղեղ մը քաշէ, այնպէս որ ԵՀ գիծը կտրէ Հ կէտին վրայ. ՀԵ՝ պահանջուած քառակուսւոյ կողմն է ։

Քանզի, որովհետեւ ԿԵՀ ուղղանկիւն եռանկիւն է, ԵՀ կողմն ունեցող քառակուսին համազօր է միւս երկու կողմանց վրայ գծուած քառակուսիներուն տարբերութեանը ։

ԽՆԴԻՐ ԺԱ.

Քառակուսի մը գտնել որ ծանօթ քառակուսւոյ մը այնպէս համեմատի, ինչպէս երկու ծանօթ գծեր՝ իրարու ։

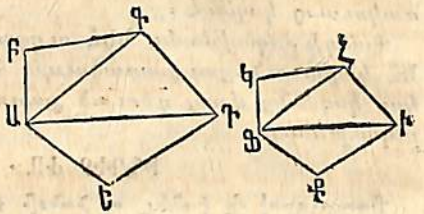


Քառակուսի մը գտնելու համար որ այնպէս համեմատի ԱԳ քառակուսւոյն, ինչպէս Մ եւ Ն գծերն՝ իրարու, ԵԿ անորոշ գծէն Մ գծին հաւասար՝ ԵՖ, եւ Ն գծին հաւասար՝ ՖԿ կտրէ, ԿԵ տրամագծին վրայ ԿՀԵ կիսաբոլորակը գծէ, եւ ՀՖ ուղղահայեացը քաշէ. ՀԿ լարը քաշէ եւ երկնցուր՝ մինչեւ ՀՔ հաւասար ըլլայ ծանօթ քառակուսւոյն ԱԲ կողմին. ՀԵ լարն ալ քաշէ եւ անորոշ կերպով երկնցուր. Ք կէտէն ՔԻ քաշէ ԿԵ ին զուգահեռական. ՀԻ պահանջուած քառակուսւոյ կողմն է ։

Քանզի, որովհետեւ ՔԻ զուգահեռական է ԿԵ ին, ՀԻ:ՀՔ::ՀԵ:ՀԿ. ուստի ՀԻ²:ՀՔ²::ՀԵ²:ՀԿ². բայց ՀԵ² այնպէս կը համեմատի ՀԿ² ին, ինչպէս ԵՖ՝ ՖԿ ին (Նախ. ԺԱ. Հետ. 3), կամ ինչպէս Մ՝ Ն ին. ուստի ՀԻ²:ՀՔ²::Մ:Ն ։ Բայց ՀՔ=ԱԲ. ուրեմն ՀԻ կողմն ունեցող քառակուսին այնպէս կը համեմատի ԱԲ քառակուսւոյն, ինչպէս Մ՝ Ն ին ։

ԽՆԴԻՐ ԺԲ.

Տրուած գծի մը վրայ տրուած բազմանկեան մը նման բազմանկիւն մը գծել։

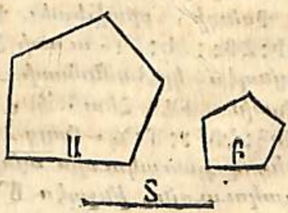


ՑԿ գծին վրայ ԱԲԳԴԵ բազմանկեան նման բազմանկիւն մը գծելու համար, նախ, ԱԳ եւ ԱԴ տրամանկիւնները քաշէ. յետոյ գծէ ԿՑՀ՝ ԲԱԳ անկեան հաւասար, եւ ՑԿՀ՝ ԱԲԳ անկեան հաւասար. ՑԿՀ եռանկիւնը նման է ԱԲԳ եռանկեան։ Նոյն կերպով ՑՀ ին վրայ ՑՀԻ եռանկիւնը գծէ ԱԳԴ եռանկեան նման, եւ ՑԻ ին վրայ ՑԻՔ եռանկիւնը գծէ ԱԴԵ եռանկեան նման։ ՑԿՀԻՔ բազմանկիւնը նման է ԱԲԳԴԵ բազմանկեան։

Քանզի, այս երկու բազմանկեանց մէջի եռանկիւնները թուով նոյն՝ եւ իրարու նման են, եւ նման դիրք ունին (Նախ. ԻՋ. Պար.)։

ԽՆԴԻՐ ԺԳ.

Բազմանկիւն մը գծել որ երկու տրուած նման բազմանկեանց թէ գումարին և թէ տարբերութեանը համազօր՝ ու բազմանկիւններուն նման ըլլայ։



Ա եւ Բ համանուն կողմերն ունեցող բազմանկեանց թէ գումարին եւ թէ տարբերութեանը համազօր՝ ու բազմանկիւններուն նման բազմանկիւն մը գծելու համար, Ա եւ Բ կողմերն ունեցող քառակուսեաց կամ գումարին եւ կամ տարբերութեանը համազօր Տ կողմն ունեցող քառակուսին գտիր։ Պահանջուած բազմանկիւնը՝ Տ գծին վրայ նախընթաց խնդրոյն կանոնովը կրնայ գծուիլ։

Քանզի նման բազմանկիւններ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիները։ Արդ՝ Տ կողմն ունեցող քառակուսին համազօր է Ա եւ Բ կողմերն ունեցող քառակուսեաց կամ գումարին եւ կամ տարբերութեանը. ուրեմն Տ գծին վրայ գծուած բազմանկիւնը համազօր է Ա եւ Բ գծերուն վրայ գծուած նման բազմանկեանց կամ գումարին եւ կամ տարբերութեանը։

ԽՆԴԻՐ ԺԴ.

Բազմանկիւն մը գծել որ նման ըլլայ տրուած բազմանկեան մը, և անոր այնպէս համեմատի, ինչպէս Մ՝ Նին։

Ենթադրենք թէ Տ՝ պահանջուած բազմանկեան այն կողմն է որ տրուած բազմանկեան Ա կողման համանուն է։ Պէտք է որ Տ² այնպէս համեմատի Ա²ին, ինչպէս Մ՝ Նին. ուստի ԺԱ. խնդրոյն կանոնովը Տ կրնանք գտնել, եւ Տ գիտնալով կրնանք բազմանկիւնը գծել ԺԲ. խնդրոյն կանոնովը։

ԽՆԴԻՐ ԺԵ.

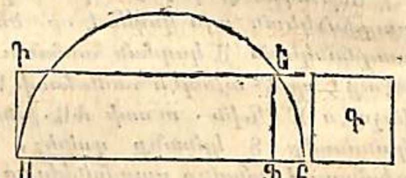
Փ բազմանկեան նման և Պ բազմանկեան համազօր բազմանկիւն մը գծել։

Փ բազմանկեան համազօր քառակուսույ Մ կողմը, եւ Պ բազմանկեան համազօր քառակուսույ Ն կողմը գտիր։ Մ, Ն եւ ԱԲ գծերուն չորրորդ համեմատականը , Տ , գտիր եւ անոր վրայ , իբրեւ ԱԲ կողման համանուն , Փ բազմանկեան նման բազմանկիւն մը գծէ . աս բազմանկիւնը համազօր պիտի ըլլայ Պ բազմանկեան ։

Քանզի աս բազմանկիւնը Վ անուանելով, կ'ունենանք Փ:Վ::ԱԲ^2:Տ^2. բայց ԱԲ:Տ::Մ. Ն, կամ ԱԲ^2: Տ^2::Մ^2:Ն^2 . ուրեմն Փ:Վ::Մ^2:Ն^2:Բայց Մ^2=Փ , եւ Ն^2=Պ . ուրեմն Փ: Վ::Փ:Պ . ուստի Վ=Պ . ուրեմն Վ բազմանկիւնը Փ բազմանկեան նման՝ ու Պին համազօր է ։

ԽՆԴԻՐ ԺԶ.

Ծանօթ քառակուսւոյ մը համազօր ուղղանկիւն մը գծել, որուն առընթերակաց կողմանց գումարը ծանօթ գծի մը հաւասար ըլլայ ։



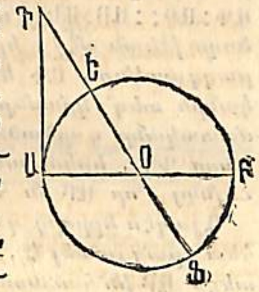
ԱԲ ծանօթ գծին վրայ ԱԵԲ կիսաբոլորակը գծէ . ԱԲ տրամագծին զուգահեռական եւ Գ ծանօթ քառակուսւոյն կողման չափ հեռաւորութեամբ ԴԵ գիծը քաշէ . քաշէ նաեւ ԵՑ ուղղահայեացը . ԱՑ եւ ՑԲ պահանջուած ուղղանկեան կողմերն են ։

Քանզի անոնց գումարը հաւասար է ԱԲ գծին, եւ անոնց ուղղանկիւնը, ԱՑ×ՑԲ, համազօր է ԵՑ քառակուսւոյն . ուրեմն համազօր է Գ ծանօթ քառակուսւոյն ։

Պար . Երբ ծանօթ քառակուսւոյն կողմը ծանօթ գծին կէսէն մեծ է, խնդիրը չի կրնար լուծուիլ ։

ԽՆԴԻՐ ԺԷ.

Ծանօթ քառակուսւոյ մը համազօր ուղղանկիւն մը գծել, որուն առընթերակաց կողմանց տարբերութիւնը ծանօթ գծի մը հաւասար ըլլայ ։

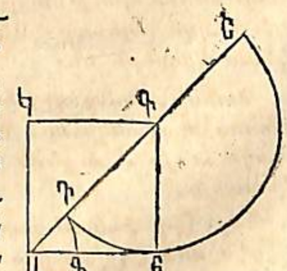


ԱԲ ծանօթ գծին վրայ կիսաբոլորակ մը գծէ , եւ Գ ծանօթ քառակուսւոյն կողման հաւասար ԱԴ շօշափողը քաշէ . քաշէ նաեւ ԴՑ հատանողը Դ կէտէն եւ Օ կեդրոնին վրայէն . ԴԵ եւ ԴՑ պահանջուած ուղղանկեան կողմերն են ։

Քանզի անոնց տարբերութիւնը հաւասար է ԵՑ կամ ԱԲին . եւ անոնց ուղղանկիւնը, ԴԵ×ԵՑ , համազօր է ԱԴ^{2}ին (Նախ . Լ.) . այսինքն համազօր է Գ ծանօթ քառակուսւոյն ։

ԽՆԴԻՐ ԺԸ.

Քառակուսւոյ մը կողման եւ անոր տրամանկեան հասարակաց չափը գտնել ։



ԱԲԳԿ քառակուսւոյն ԳԲ կողման եւ ԱԳ տրամանկեան հասարակաց չափը գտնելու համար , նախ՝ պէտք է գտնել թէ ԱԲ քանի անգամ կայ ԱԳին մէջ ։ Գ կէտը կեդրոն ընելով՝ ԳԲ շառաւիղով ԴԲԵ կիսաշրջանակը գծէ . յայտնի է թէ ԳԲ մէկ անգամ կայ ԱԳ տրամանկեան մէջ , եւ կ'աւելնայ ԱԴ , որ բաղդատուելու է ԳԲի , կամ անոր հաւասարն եղող ԱԲի հետ ։ Աս գործողութիւնը յառաջ տանելով մեա-

ցորդներն այնչափ կը պզտիկնան որ անհնար կ'ըլլայ ալ ետ զանոնք բաղդատել, եւ այսպէս չենք կրնար գիտնալ թէ աս երկու գծերը հասարակաց չափ մը ունին թէ չէ ։

Բայց ուրիշ պարզ կերպ մը կայ աս խնդիրը լուծելու ։ Որովհետեւ ԱԲԳ ուղիղ անկիւն է, ԱԲ շօշափող է, ԱԵ ալ հատանող է նոյն Ա կէտէն քաշուած, եւ ԱԴ:ԱԲ::ԱԲ:ԱԵ (Նախ. Լ.) ։ Ուստի երկրորդ գործողութեան մէջ, երբ ԱԴ մնացորդը ԱԲ ին հետ կը բաղդատենք, ԱԴ եւ ԱԲ ին ընդհանուր համեմատականին տեղ՝ կրնանք ԱԲ եւ ԱԵ ին ընդհանուր համեմատականը գործածել. բայց ԱԲ, կամ անոր հաւասարը ԳԴ, երկու անգամ կայ ԱԵ ին մէջ, եւ ԱԴ կ'աւելնայ, որ ԱԲ ին հետ բաղդատուելու է ։

Այսպէս երրորդ գործողութիւնը՝ դարձեալ ԱԴ ԱԲ ին հետ բաղդատել է, եւ կրնանք նոյն կերպով անոր տեղը ԱԲ ին հաւասար եղող ԳԴ բաղդատել ԱԵ ի հետ, եւ կը տեսնենք որ ԳԴ ԱԵ ին մէջ երկու անգամ կայ, եւ ԱԴ կ'աւելնայ ։

Ուստի յայտնի է թէ գործողութիւնը երբէք վախճան մը պիտի չունենայ. այսինքն, աս երկու գծերը հասարակաց չափ չունին ։ Աս ճշմարտութիւնը տեսանք նաեւ Նախ. ԺԱ. Հետ. Ե ի մէջ ։

ԳԻՐՔ Ե.

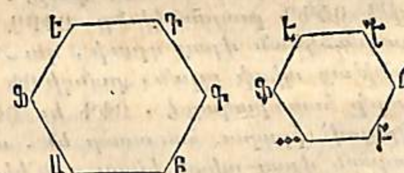
ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆՔ, ԵՒ ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՉԱՓՈՒԻԼԸ

Սահման ։

Կանոնաւոր բազմանկիւն կը կոչուի այն բազմանկիւնը որ թէ հաւասարակողմ եւ թէ հաւասարանկիւն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Նոյն թուով կողմեր ունեցող կանոնաւոր բազմանկիւնք իրարու նման են ։



Օրինակի համար, եթէ ԱԲԳԴԵԶ եւ աբգդեզ կանոնաւոր վեցանկիւններ են, իրարու նման են ։ Բոլոր անկեանց գումարը երկուքին մէջ ալ նոյն է, այսինքն ութ ուղիղ անկիւն (Գիրք Ա. Նախ. ԻԶ. Հետ. 3) ։ Ա անկիւնն աս գումարին մէկ վեցերորդն է, նոյնպէս է նաեւ ա անկիւնը. ուրեմն իրարու հաւասար են ։ Միեւնոյն պատճառաւ Բ=բ անկեան, Գ=գ, եւայլն ։

Դարձեալ, որովհետեւ բազմանկիւնները կանոնաւոր են, ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն, կողմերն իրարու հաւասար են, նոյնպէս իրարու հաւասար են աբ, բգ, գդ, եւայլն, կողմերը. ուստի ԱԲ:աբ::ԲԳ:բգ::ԳԴ:գդ, եւայլն. այսինքն, երկու բազմանկեանց անկիւններն իրարու հաւասար են, եւ անոնց համանուն կողմերն՝ իրարու համեմատական · ուրեմն բազմանկիւններն իրարու նման են (Գիրք Դ · Սահմ · 1) ։

Հետ · Նոյն թուով կողմեր ունեցող երկու կանոնաւոր բազմանկեանց շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն կողմերը · եւ անոնց մակերեսները՝ ինչպէս անոնց համանուն կողմանց քառակուսիները (Գիրք Դ · Նախ · Իէ ·) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն մը կրնայ բոլորակի մը ներսը կամ բոլորակի մը դուրսը գծուիլ ։

ԱԲԳԴ եւայլն կանոնաւոր բազմանկեան Ա, Բ, Գ կէտերէն շրջանակ մը գծէ, եւ շրջանակին Օ կեդրոնէն ՕՓ ուղղահայեացը քաշէ մինչեւ ԲԳ ին միջին կէտը · նաեւ ՕԱ, ՕԲ, ՕԳ, ՕԴ քաշէ ։ Եթէ ՕՓԳԴ բազմանկիւնը ՕՓԲԱ բազմանկեան վրայ դրուի, զուգընթաց պիտի ըլլան · քանզի ՕՓ կողմը հասարակաց է · ՕՓԳ եւ ՕՓԲ ուղիղ անկիւններ ըլլալով՝ իրարու հաւասար են · ուստի ՓԳ կողմը ՓԲ կողման վրայ պիտի իյնայ, Գ կէտն ալ Բ ին վրայ · նաեւ, որովհետեւ ՓԳԴ=ՓԲԱ անկեան, եւ ԳԴ=ԲԱ կողման, Դ կէտը Ա ին վրայ պիտի իյնայ · ուրեմն ՕԴ=ԱՕ, եւ ան շրջանակը որ Ա, Բ, Գ կէտերէն կ'անցնի, Դ կէտէն ալ պիտի անցնի ։ Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ այն շրջանակը որ Բ, Գ, Դ կէտերէն կ'անցնի, Ե, Ց, Կ, եւայլն, կէտերէն ալ պիտի անցնի · այսինքն բազմանկիւնը շրջանակին ներսը գծուած կ'ըլլայ ։

Դարձեալ, ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն, սա շրջանակին հաւասար լարեր են · ուստի հաւասարապէս հեռու են Օ կեդրոնէն (Գիրք Գ · Նախ · Ը ·) · ուրեմն, եթէ Օ

կեդրոնէն ՕՓ շառաւիղով շրջանակ մը գծուի, բազմանկեան իւրաքանչիւր կողման միջին կէտին պիտի դպչի · այսինքն բազմանկիւնը շրջանակին դուրսը գծուած պիտի ըլլայ ։

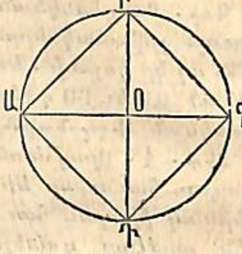
Պար · Բազմանկեան թէ ներսը եւ թէ դուրսը գծուած շրջանակներուն Օ կեդրոնը բազմանկեան կեդրոնն ալ կը կոչուի · եւ ԱԲ մէկ կողման ծայրերէն քաշուած ԱՕ եւ ԲՕ գծերուն կազմած ԱՕԲ անկիւնը՝ բազմանկեան կեդրոնական անկիւնը կը կոչուի ։

Հետ · 1 · Որովհետեւ ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն, լարերն իրարու հաւասար են, բոլոր կեդրոնական անկիւններն ալ իրարու հաւասար են · ուստի իւրաքանչիւրին արժէքը գտնելու համար չորս ուղիղ անկիւնը բազմանկեան կողմանց թուովը բաժնէ ։

Հետ · 2 · Ծանօթ բոլորակի մը ներսը կանոնաւոր բազմանկիւն մը գծելու համար, շրջանակը բազմանկեան կողմանց թուոյն չափ հաւասար մասանց բաժնէ · քանզի, որովհետեւ աղեղներն իրարու հաւասար են, ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն, լարերն ալ հաւասար են · նաեւ ԱՕԲ, ԲՕԳ, ԳՕԴ, եւայլն, եռանկիւններն իրարու հաւասար են, քանզի փոխադարձաբար հաւասարակողմ են · ուստի ԱԲԳ, ԲԳԴ, ԳԴԵ, եւայլն, անկիւնները իրարու հաւասար են · ուրեմն ԱԲԳԴԵՀ՝ կանոնաւոր բազմանկիւն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ԽՆԴԻՐ

Ծանօթ բոլորակի մը ներսը քառակուսի մը գծել

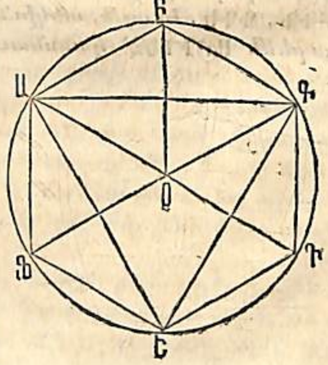


Իրարու ուղղահայեաց երկու տրամագիծ, ԱԳ եւ ԲԴ, քաշէ. քաշէ նաեւ ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ եւ ԴԱ գծերը. ԱԲԳԴ՝ պահանջուած քառակուսին է. քանզի, որովհետեւ ԱՕԲ, ԲՕԳ, եւայլն, անկիւններն իրարու հաւասար են, ԱԲ, ԲԳ, եւայլն, լարերն ալ իրարու հաւասար են. նաեւ ԱԲԳ ԲԳԴ, եւայլն, անկիւնները, կիսաբոլորակներու ներսը գծուած ըլլալով, ուղիղ են:

Պար. Որովհետեւ ԲԳՕ եռանկիւնը ուղղանկիւն ու երկկողմնապատ է, ԲԳ:ԲՕ::$\sqrt{2}$: 1 (Գիրք Դ. Նախ. ԺԱ. Հետ. 5). այսինքն ներսը գծուած քառակուսւոյն կողմը այնպէս կը համեմատի շառաւիղին, ինչպէս 2ին քառակուսի արմատը՝ 1 ին:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ԽՆԴԻՐ

Ծանօթ բոլորակի մը ներսը կանոնաւոր վեցանկիւն մը և հաւասարակողմ եռանկիւն մը գծել:



Ենթադրենք թէ խնդիրը լուծուած է, եւ ԱԲ՝ վեցանկեան մէկ կողմն է: ԱՕ եւ ԲՕ շառաւիղները քաշէ. ԱՕԲ եռանկիւնը հաւասարակողմ է. քանզի ԱՕԲ անկիւնը չորս ուղիղ անկեան մէկ վեցերորդ մասն է. ուստի, եթէ մէկ ուղիղ անկիւնը միութիւն համարինք, ԱՕԲ հաւասար կ'ըլլայ $\frac{4}{6}$ ի կամ $\frac{2}{3}$ ի. եռանկեան միւս երկու անկիւններն ալ, ԱԲՕ,

ԲԱՕ՝ $2-\frac{2}{3}$ ի կամ $\frac{4}{3}$ ի. նաեւ, որովհետեւ աս երկու անկիւններն իրարու հաւասար են, իւրաքանչիւրը հաւասար է $\frac{2}{3}$ ի. ուստի ԱԲՕ եռանկիւնը հաւասարակողմ է, ուրեմն ներսը գծուած կանոնաւոր վեցանկեան կողմը շառաւիղին հաւասար է:

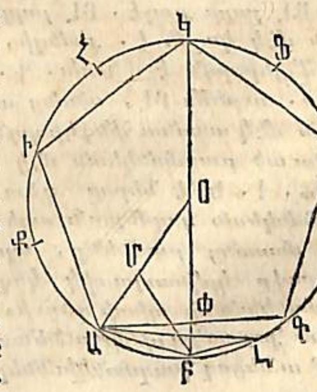
Հետեւապէս ծանօթ բոլորակի մը ներսը կանոնաւոր վեցանկիւն մը գծելու համար, շրջանակին մէկ կէտէն սկսելով շառաւիղին հաւասար վեց լար քաշելու է:

Հաւասարակողմ եռանկիւն մը գծելու համար, վեցանկեան առաջին, երրորդ եւ հինգերորդ գագաթներն իրար միացնելու է:

Պար. Որովհետեւ ԱԲ=ԲԳ=ԳՕ=ԱՕ, ԱԲԳՕ զուգահեռագիծ է. ուստի ԱԳ^2+ԲՕ^2= 4 ԱԲ^2 կամ 4 ԲՕ^2 (Գիրք Դ. Նախ. ԺԴ. Հետ.). եթէ երկու անդամներէն ԲՕ^2 հանենք, կը մնայ ԱԳ^2=3 ԲՕ^2. ուստի ԱԳ^2:ԲՕ^2::3:1, կամ ԱԳ:ԲՕ::$\sqrt{3}$: 1. այսինքն ներսը գծուած հաւասարակողմ եռանկեան մէկ կողմն այնպէս կը համեմատի շառաւիղին, ինչպէս երեքին քառակուսի արմատը՝ մէկին:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ԽՆԴԻՐ

Ծանօթ բոլորակի մը ներսը կանոնաւոր տասնանկիւն մը, հնգանկիւն մը և տասնուհինգ կողմ ունեցող բազմանկիւն մը գծել:



Նախ. ԱՕ շառաւիղը Մ կէտին վրայ ծայրական ու միջին եղերերու բաժնէ (Գիրք Դ. Խնդ. Դ. Պար.). ՄՕ մեծ հատուածին հաւասար ԱԲ լարը քաշէ. ԱԲ՝ պահանջուած տասնանկեան կողմն է: Քանզի, ՄԲ գիծը քաշելով կ'ունենանք ԱՕ:ՕՄ::ՕՄ:ԱՄ, կամ, որովհետեւ ԱԲ= ՕՄ, ԱՕ:ԱԲ::ԱԲ:ԱՄ.

որովհետեւ ԱԲՕ եւ ԱՄԲ եռանկիւնները Ա հասարակաց անկիւնն ունին, եւ այս անկիւնը կազմող կողմերն իրարու համեմատական են, եռանկիւններն իրարու նման են (Գիրք Դ. Նախ. Ի.)։ Բայց ՕԱԲ եռանկիւնը երկկողմնազոյգ է. ուրեմն ԱՄԲ ալ երկկողմնազոյգ է, եւ ԱԲ=ԲՄ. բայց, որովհետեւ ԱԲ=ՕՄ, ՄԲ=ՕՄ. ուրեմն ԲՄՕ եռանկիւնն ալ երկկողմնազոյգ է։

Դարձեալ, ԱՄԲ անկիւնը Օ անկեան կրկնապատիկն է (Գիրք Ա. Նախ. ԻԵ. Հետ. 6). բայց ԱՄԲ հաւասար է ՄԱԲ անկեան. ուստի ՕԱԲ եւ ՕԲԱ անկեանց իւրաքանչիւրը Օ անկեան կրկնապատիկն է, այսինքն եռանկեան երեք անկեանց գումարը Օ անկեան հինգ անգամին հաւասար է. ուրեմն Օ անկիւնը երկու ուղիղ անկեանց մէկ հինգերորդ, կամ չորս ուղիղ անկեանց մէկ տասներորդն է, այսինքն ԱԲ աղեղը՝ շրջանակին մէկ տասներորդն է, եւ ԱԲ լարը պահանջուած կանոնաւոր տասնանկեան կողմն է։

Երկրորդ. Եթէ կանոնաւոր տասնանկեան առաջին, երրորդ, հինգերորդ, եւայլն անկիւններն իրարու միացընենք, ԱԻԿԵԳ կանոնաւոր հնգանկիւնը պիտի գծուի։

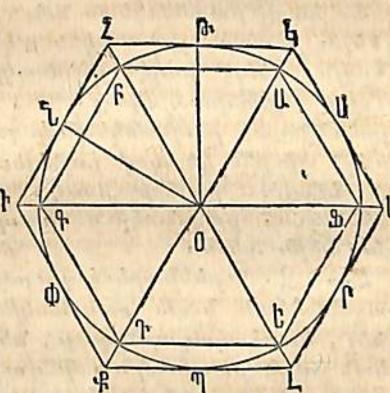
Երրորդ. Տասնուհինգ կողմ ունեցող կանոնաւոր բազմանկիւնը գծելու համար, ԱՕ շառաւիղին հաւասար ԱԼ լարը քաշէ. ԲԼ լարը պահանջուած բազմանկեան մէկ կողմն է. քանզի, ԱԼ աղեղը շրջանակին մէկ վեցերորդն է (Նախ. Դ.). ԱԲ ալ՝ մէկ տասներորդը. ուրեմն ԲԼ, անոնց տարբերութիւնը, շրջանակին մէկ տասնուհինգերորդն է, կամ ԲԼ լարը պահանջուած բազմանկեան մէկ կողմն է։

Հետ. 1. Եթէ ներսը գծուած որեւէ կանոնաւոր բազմանկեան կողմերուն աղեղները երկերկու հաւասար մասանց բաժնենք, այս բաժանեալ աղեղանց լարերովը կրկնապատիկ կողմ ունեցող կանոնաւոր բազմանկիւն մը պիտի գծուի։ Զորօրինակ, ներսը գծուած քառակուսի մը ունենալով, 8, 16, 32, եւայլն, կողմ ունեցող բազմանկիւններ կրնանք գծել։

Հետ. 2. Նաեւ յայտնի է թէ որեւէ ներսը գծուած կանոնաւոր բազմանկիւն՝ իրեն կողմանց թուոյն կրկնապատկին չափ կողմ ունեցող բազմանկիւնէն պակաս է, քանզի մասն ամբողջէն փոքր է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ԽՆԴԻՐ

Շրջանակի մը դուրսը բազմանկիւն մը գծել որ նոյն շրջանակին ներսը գծուած ծանօթ կանոնաւոր բազմանկեան նման ըլլայ։



ԱԲԳԴԵՑ ներսը գծուած բազմանկեան նման բազմանկիւն մը նոյն շրջանակին դուրսը գծելու համար, ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն, աղեղներուն միջին կէտերէն շօշափողներ քաշէ. ասոնք իրար կտրելով պահանջուած բազմանկիւնը պիտի գծեն։

Որովհետեւ Թ՝ ԲԹԱ աղեղան միջին կէտն է, Ն ալ՝ ԲՆԳ աղեղան միջին կէտը, ԲԹ=ԲՆ. այսինքն ներսը գծուած բազմանկեան Բ գագաթը՝ ՆԲԹ աղեղան միջին կէտն է։ Քաշէ ՕՀ. աս գիծը Բ կէտէն պիտի անցնի։

Քանզի, որովհետեւ ՕԹՀ եւ ՕՀՆ ուղղանկիւն եռանկիւններն ՕՀ հասարակաց հակուղիղն ունին, եւ ՕԹ հաւասար է ՕՆ կողման, եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Գիրք Ա. Նախ. ԺԷ.), եւ ԹՕՀ հաւասար է ՀՕՆ անկեան. ուրեմն ՕՀ՝ ԹՆ աղեղան Բ միջին կէտէն կ'անցնի։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ՕԻ՝ Գ կէտէն կ'անցնի, ՕՔ՝ Դ էն, եւայլն։

Բայց, որովհետեւ ԿՀ զուգահեռական է ԱԲ ին, ՀԻ ալ՝ ԲԳ ին (Գիրք Գ․ Նախ․ Ժ․), ԿՀԻ հաւասար է ԱԲԳ անկեան (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԴ․)․ նաեւ ՀԻՔ=ԲԳԴ անկեան, ԻՔԼ=ԳԴԵ, եւայլն․ այսինքն դուրսը գծուած բազմանկեան անկիւնները հաւասար են ներսը գծուածին անկիւններուն։ Նաեւ ԿՀ:ԱԲ::ՕՀ:ՕԲ, եւ ՀԻ:ԲԳ::ՕՀ:ՕԲ․ ուստի ԿՀ:ԱԲ::ՀԻ:ԲԳ ։ Բայց ԱԲ=ԲԳ․ ուստի ԿՀ=ՀԻ։ Նոյն պատճառաւ ՀԻ=ԻՔ, եւայլն․ ուստի դուրսը գծուած բազմանկեան կողմերն իրարու հաւասար են․ ուրեմն այս բազմանկիւնը կանոնաւոր է, եւ ներսը գծուածին նման ։

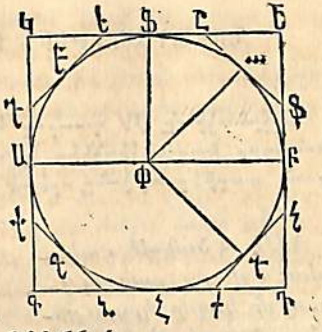
Հետ․ 1․ Հակադարձաբար, ԻՀԿՄԼՔ դուրսը գծուած կանոնաւոր բազմանկեան նման բազմանկիւն մը ներսը գծելու համար, շրջանակին Օ կեդրոնէն ՕԻ, ՕՀ, ՕԿ, եւայլն գծերը քաշէ՝ շրջանակը կտրելով Գ, Բ, Ա, եւայլն կէտերուն վրայ․ ԳԲ, ԲԱ, եւայլն լարերը պահանջուած բազմանկեան կողմերն են ։ Աս խնդիրը աւելի դիւրին կերպով լուծելու համար, ՆԹ, ԹՍ, ՍՐ, եւայլն լարերը քաշէ․ ասոնք ներսը գծուած կանոնաւոր բազմանկիւն մը պիտի կազմեն՝ դուրսը գծուածին նման ։

Հետ․ 2․ Ուրեմն որեւէ դուրսը գծուած կանոնաւոր բազմանկեան նման բազմանկիւն մը կրնանք ներսը գծել, եւ, հակադարձաբար, ներսը գծուած բազմանկեան նման բազմանկիւն մը դուրսը գծել։

Հետ․ 3․ Յայտնի է թէ ՆՀ+ՀԹ=ՀԹ+ԹԿ=ՀԿ որ կանոնաւոր բազմանկեան մէկ կողմն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է․ ԽՆԴԻՐ

Շրջանակէ մը դուրսը գծել կանոնաւոր բազմանկիւն մը, որուն կողմերուն թիւը՝ նոյն շրջանակին դուրսը գծուած ծանօթ կանոնաւոր բազմանկեան մը կողմերուն թուոյն կրկնապատիկն ըլլայ ։



Եթէ ԳԴԾԿ քառակուսին դուրսը գծուած բազմանկիւնն է, նոյն շրջանակին դուրսը ութանկիւն մը գծելու համար, ԱՀ, ՀԲ, ԲՖ եւ ՖԱ աղեղներն երկերկու հաւասար մասանց բաժնէ, եւ անոնց է, ք, ա, ե միջին կէտերէն շօշափողներ քաշէ մինչեւ քառակուսւոյն կողմերը․ ԱէՀքԲ եւայլն պահանջուած կանոնաւոր ութանկիւնն է։

Փք եւ Փա քաշէ․ ՓքէԲ հաւասար է ՓաֆԲ քառանկեան․ քանզի, եթէ այս երկուքն այնպէս իրարու վրայ դրուին որ մէկուն ՓԲ կողմը միւսին ՓԲ կողմին վրայ իյնայ, որովհետեւ քՓԲ հաւասար է ԲՓա անկեան, քՓ պիտի իյնայ Փա ին վրայ․ եւ, որովհետեւ Փաֆ ու Փքէ ուղիղ անկիւններ են, քէ պիտի իյնայ աֆ ին վրայ․ նաեւ, որովհետեւ ՓԲէ եւ ՓԲֆ ուղիղ անկիւններ են, Բէ պիտի իյնայ Բֆ ին վրայ․ ուստի է կէտը ֆ կէտին վրայ պիտի իյնայ․ ուրեմն Բէ=Բֆ, քէ=աֆ, եւ քէԲ=Բֆա անկեան ։ Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ աֆ=աՏ, ֆԲ=ՖՏ, եւ Բֆա=աՏՖ անկեան ։ Բայց, որովհետեւ ֆա եւ ֆԲ շօշափողներն իրարու հաւասար են (Գիրք Գ․ Նախ․ ԺԴ․ Պար․ 1), կը հետեւի թէ ֆա ին կրկնապատիկն եղող ֆՏ հաւասար է ֆԲ ի կրկնապատիկն եղող ֆէ ին ։

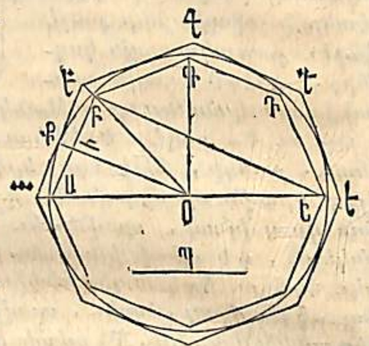
Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ ութանկեան ուրիշ որեւէ երկու կողմերը կամ անկիւններն իրարու հաւասար են․ ուրեմն ութանկիւնը կանոնաւոր է ։

Ծանօթ բազմանկեան կողմերուն թիւն ինչ որ ըլլայ, խնդիրն աս նոյն կանոնով կրնայ լուծուիլ ։

Հետ․ Յայտնի է թէ դուրսը գծուած քառակուսին դուրսը գծուած ութանկիւնէն մեծ է․ եւ, առհասարակ, որեւէ դուրսը գծուած կանոնաւոր բազմանկիւն՝ իրեն կողմանց թուոյն կրկնապատկին չափ կողմ ունեցող բազմանկիւնէն մեծ է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շրջանակէ մը թէ դուրսը և թէ ներսը երկու նման կանոնաւոր բազմանկիւններ կրնան գծուիլ, որոնց մակերեւոյթներուն տարբերութիւնը որեւէ ծանօթ մակերեսէ փոքր ըլլայ։



Եթէ Պ ծանօթ մակերեսէն փոքր քառակուսւոյ մը կողմը կը ցուցընէ, շրջանակը 2, 4, 8, 16, եւայլն, հաւասար աղեղանց բաժնէ մինչեւ որ անոնց մէկուն լարը, ԱԲ, Պ էն փոքր ըլլայ։ Բաժանման կէտերէն Ա, Բ, Գ, Դ, եւայլն, լարեր քաշէ. որովհետեւ աս լարերն իրարու հաւասար են, ԱԲԳԴԵ եւայլն ներսը գծուած բազմանկիւնը կանոնաւոր է։ Յետոյ շրջանակին դուրսը անոր նման աբգդե եւայլն բազմանկիւնը գծէ. այս երկու բազմանկեանց տարբերութիւնը Պ կողմն ունեցող քառակուսւոյն փոքր է։

ա եւ բ կէտերէն մինչեւ Օ կեդրոնը աՕ եւ բՕ քաշէ. աս գծերը Ա եւ Բ կէտերէն պիտի անցնին (Նախ. Զ.)։ Գ շօշափման կէտէն ԳՕ քաշէ. այս գիծը ԱԲ լարին ուղղահայեաց է եւ զանիկա երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ Ի կէտին վրայ (Գիրք Գ. Նախ. Զ. Պար.)։ Նաեւ ԱՕ գիծը մինչեւ Ե երկնցուր, եւ ԲԵ քաշէ։

Եթէ Փ՝ դուրսը գծուած բազմանկեան մակերեսը ցուցընէ, եւ ք՝ ներսը գծուածինը, որովհետեւ աՕբ եւ ԱՕԲ եռանկիւնները Փ եւ ք ին նման մասերն են, կ'ունենանք աՕբ:ԱՕԲ::Փ:ք (Գիրք Բ. Նախ. ԺԱ.). բայց, որովհետեւ եռանկիւններն իրարու նման են,

$$\text{աՕբ}:\text{ԱՕԲ}::\text{Օա}^2:\text{ՕԱ}^2,\ \text{կամ}\ \text{ՕԳ}^2.$$

ուրեմն $\text{Փ}:\text{ք}::\text{Օա}^2:\text{ՕԲ}^2$։

Դարձեալ, որովհետեւ ՕաԳ եւ ԵԱԲ եռանկեանց կողմերն իրարու զուգահեռական են, եռանկիւններն իրարու նման են, եւ

$$\text{Օա}^2:\text{ՕԲ}^2::\text{ԱԵ}^2:\text{ԵԲ}^2,$$

ուստի $\text{Փ}:\text{ք}::\text{ԱԵ}^2:\text{ԵԲ}^2$,

կամ $\text{Փ}:\text{Փ}-\text{ք}:\text{ԱԵ}^2:\text{ԱԵ}^2-\text{ԵԲ}^2$, կամ ԱԲ^2։

Բայց Փ՝ ԱԵ տրամագծին վրայ գծուած քառակուսիէն փոքր է (Նախ. Է. Հետ.). ուստի Փ—ք՝ ԱԲ ին վրայ գծուած քառակուսիէն փոքր է, եւ առաւել եւս փոքր է Պ կողմն ունեցող ծանօթ քառակուսիէն. ուրեմն շրջանակի մը թէ դուրսը եւ թէ ներսը երկու նման կանոնաւոր բազմանկիւններ կրնան գծուիլ, որոնց մակերեսներուն տարբերութիւնը որեւէ ծանօթ մակերեսէ փոքր ըլլայ։

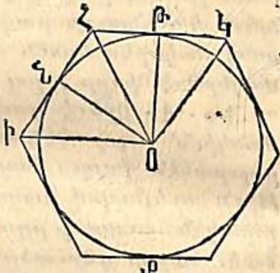
Հետ. 1. Որեւէ դուրսը գծուած կանոնաւոր բազմանկիւն՝ բոլորակէն մեծ է, եւ որեւէ ներսը գծուածը՝ բոլորակէն փոքր։ Բայց դուրսը գծուածին կողմերուն թիւն աւելնալով բազմանկիւնը կը պզտիկնայ եւ բոլորակին հաւասար ըլլալու կը մօտենայ (Նախ. Է. Հետ.). նաեւ ներսը գծուածը, իր կողմանց թուոյն աւելնալովը, կը մեծնայ եւ բոլորակին հաւասար ըլլալու կը մօտենայ։ Երբ բազմանկեանց կողմերուն թիւն աւելցունելը շարունակ յառաջ տանինք, երկրաչափական կերպով պէտք է ըսել, և վերջապէս, երկու բազմանկիւններն իրարու հաւասարին, և բոլորակին հաւասար պէտք ըլլան։

Հետ. 2. Որովհետեւ դուրսը գծուած բազմանկիւնը ներսը գծուածին չափ կողմ ունի, եւ երկուքն ալ կանոնաւոր են, իրարու նման են (Նախ. Ա.). ուստի, երբ իրարու հաւասար կ'ըլլան, նոյն շրջագիծը պիտի ունենան։ Բայց, որովհետեւ ոչ դուրսը գծուած բազմանկեան շրջագիծը կրնայ ներս իյնալ, եւ ոչ ներսինին շրջագիծը՝ դուրս իյնալ, կը հետեւի թէ բազմանկեանց շրջագծերը բոլորակին շրջանակին վրայ պէտք իյնան և անոր հաւասար ըլլան։

Հետ. 3. Երբ ներսը գծուած բազմանկեան շրջագիծը բոլորակին շրջանակին զուգընթաց կ'ըլլայ, ՕԻ ուղղահայեացը՝ շառաւիղ կ'ըլլայ, եւ բազմանկեան ԱԲԳՕ մասը՝ բոլորակին ՕԱՔԲԳ հատիչը կ'ըլլայ. եւ շրջագծին ԱԲ+ԲԳ մասը՝ ԱՔԲԳ աղեղը կ'ըլլայ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

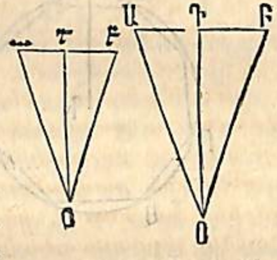
Որեւէ կանոնաւոր բազմանկեան մակերեսը հաւասար է անոր շրջագծին, բազմապատկեալ ներսը գծուած բոլորակին շառաւիղին կէսովը ։



Եթէ ՕՆ եւ ՕԹ գծերը ԿՀԻՔ կանոնաւոր բազմանկեան ներսը գծուած բոլորակին շառաւիղներ են, բազմանկեան մակերեսը հաւասար է անոր շրջագծին, բազմապատկեալ ՕԹ շառաւիղին կիսովը ։ Քանզի ՕԿՀ եռանկեան մակերեսը հաւասար է ՀԿ կողման, բազմապատկեալ ՕԹ ին կիսովը. եւ ՕՀԻ եռանկեան մակերեսը հաւասար է ԻՀ կողման, բազմապատկեալ ՕՆ ին կիսովը (Գիրք Դ. Նախ. Զ.) ։ Բայց ՕՆ=ՕԹ. ուստի այս երկու եռանկեանց մակերեսներուն գումարը հաւասար է (ԿՀ+ՀԻ)×$\frac{1}{2}$ՕԹ արտադրելոյն ։ Ուրեմն յայտնի է թէ բազմանկեան բոլոր եռանկեանց մակերեսներուն գումարը, կամ բազմանկեան մակերեսը հաւասար է անոր բոլոր կողմերուն գումարին, այսինքն անոր շրջագծին, բազմապատկեալ ՕԹ շառաւիղին կիսովը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ երկու նման, կանոնաւոր բազմանկեանց շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս իրենց դուրսը եւ իրենց ներսը գծուած բոլորակներուն շառաւիղները. եւ անոնց մակերեսները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս այն շառաւիղներուն քառակուսիները ։



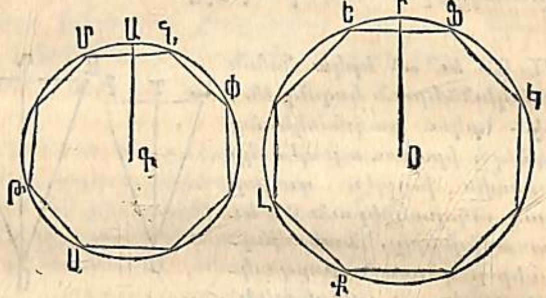
Եթէ ԱԲ եւ աբ երկու նման բազմանկիւններուն կողմեր են,

Նախ. Երկու բազմանկեանց շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս դուրսը գծուած բոլորակներուն ԱՕ եւ աօ շառաւիղները, նաեւ ինչպէս ներսը գծուած բոլորակներուն ԴՕ եւ դօ շառաւիղները ։ Քանզի այս շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԱԲ եւ աբ կողմերը (Գիրք Դ. Նախ. ԻԷ.). բայց Ա հաւասար է ա անկեան, որովհետեւ իւրաքանչիւրը բազմանկեան մէկ անկեան կէսն է. նաեւ Բ հաւասար է բ անկեան. ուրեմն ԱՕԲ նման է աօբ եռանկեան, եւ ԱՕԴ՝ աօդ ուղղանկիւն եռանկեան. ուստի ԱԲ:աբ::ԱՕ:աօ::ԴՕ:դօ. ուրեմն բազմանկեանց շրջագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԱՕ եւ աօ, կամ ԴՕ եւ դօ ։

Երկրորդ. Երկու բազմանկեանց մակերեսները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԱՕ^2 եւ աօ^2, կամ ինչպէս ԴՕ^2 եւ դօ^2 ։ Քանզի այս մակերեսները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԱԲ^2 եւ աբ^2 (Գիրք Դ. Նախ. ԻԷ.). ուրեմն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԱՕ^2 եւ աօ^2, կամ ինչպէս ԴՕ^2 եւ դօ^2 ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ երկու բոլորակներու շրջանակներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց շառաւիղները, և անոնց մակերեսները՝ ինչպէս այն շառաւիղներուն քառակուսիները:



Եթէ շրջ. ԳԱ, շրջ. ՕԲ եւ մակ. ԳԱ, մակ. ՕԲ ցուցնեն ԳԱ եւ ՕԲ շառաւիղ ունեցող բոլորակներուն շրջանակներն ու մակերեսները, ապացուցուելու է թէ

շրջ. ԳԱ:շրջ. ՕԲ::ԳԱ:ՕԲ,

եւ թէ

մակ. ԳԱ:մակ. ՕԲ::ԳԱ²:ՕԲ²:

Բոլորակներուն ներսը երկու իրարու նման կանոնաւոր բազմանկիւն գծէ. անոնց շրջագծերը իրարու այնպէս պիտի համեմատին ինչպէս ԳԱ եւ ՕԲ շառաւիղները (Նախ. Ժ.): Եթէ բազմանկեանց կողմերուն աղեղները երկերկու հաւասար մասանց բաժնուելով, բազմանկեանց կողմերուն թիւն աւելցընելը շարունակ յառաջ տարուի, վերջապէս բազմանկեանց շրջագծերն եւ բոլորակներուն շրջանակները պիտի միանան (Նախ. Ը. Հետ. 1), եւ

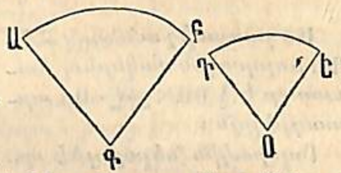
շրջ. ԳԱ:շրջ. ՕԲ::ԳԱ:ՕԲ:

Դարձեալ, ներսը գծուած բազմանկեանց մակերեսներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԳԱ² եւ ՕԲ² (Նախ. Ժ.): Եթէ բազմանկեանց կողմերուն

թիւը վերոյիշեալ կերպով կ'աւելցընենք մինչեւ որ անոնց շրջագծերը բոլորակներուն շրջանակներուն հետ կը միանան, անոնց խուրաքանչիւրին մակերեսը իր բոլորակին մակերեսին հաւասար կ'ըլլայ, եւ

մակ. ԳԱ:մակ. ՕԲ::ԳԱ²:ՕԲ²:

Հետ. ԱԲ եւ ԴԵ իրարու նման աղեղները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց շառաւիղները, ԱԳ եւ ԴՕ. եւ ԱԳԲ ու ԴՕԵ իրարու նման հատիչները՝ ինչպէս այն շառաւիղներուն քառակուսիները:



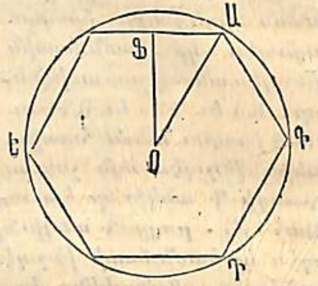
Քանզի Գ անկիւնը հաւասար է Օ անկեան (Գիրք Դ. Սահ. 3). բայց Գ անկիւնը չորս ուղիղ անկեանց այնպէս կը համեմատի ինչպէս ԱԲ աղեղը՝ ԱԳ շառաւիղ ունեցող շրջանակին. եւ Օ անկիւնը չորս ուղիղ անկեանց այնպէս կը համեմատի ինչպէս ԴԵ աղեղը՝ ԴՕ շառաւիղ ունեցող շրջանակին (Գիրք Գ. Նախ. ԺԷ.). ուստի ԱԲ եւ ԴԵ աղեղներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս այն շրջանակները. բայց այն շրջանակները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց շառաւիղները, ԱԳ եւ ԴՕ. ուրեմն

ԱԲ աղեղը:ԴԵ աղեղը::ԱԳ:ԴՕ:

Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԱԳԲ եւ ԴՕԵ հատիչները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԳԱ եւ ԴՕ շառաւիղներն ունեցող բոլորակները. ուրեմն ԱԳԲ հատիչը:ԴՕԵ հատիչը::ԱԳ²:ԴՕ²:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է անոր շրջանակին, բազմապատկեալ անոր շառաւիղին կիսովը։



ԱՕ շառաւիղ ունեցող ԱԳԴԵ բոլորակին մակերեսը հաւասար է $\frac{1}{2}$ ՕԱ×շրջ. ՕԱ *արտադրելոյն։*

Բոլորակին ներսը գծէ որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն, եւ անոր կողմանց մէկուն ուղղահայեաց ՕՖ *քաշէ։ Բազմանկեան մակերեսը հաւասար է անոր շրջագծին, բազմապատկեալ* $\frac{1}{2}$ ՕՖ *ով* (Նախ. Թ.)։ *Եթէ բազմանկեան կողմերուն աղեղները երկերկու հաւասար մասանց բաժնելով, անոր կողմանց թիւը չարունակ աւելցուի, վերջապէս անոր շրջագիծը հաւասար պիտի ըլլայ շրջանակին, անոր մակերեսը՝ բոլորակին մակերեսին, եւ* ՕՖ *ուղղահայեացը՝* ՕԱ *շառաւիղին* (Նախ. Ը. Հետ. 1 եւ 3). *ուրեմն*

մակ. ՕԱ=$\frac{1}{2}$ՕԱ×շրջ. ՕԱ։

Հետ. 1. *Հատիչի մը մակերեսը հաւասար է անոր աղեղին, բազմապատկեալ անոր շառաւիղին կիսովը։*

Քանզի ԱԳԲ *հատիչը ամբողջ բոլորակին այնպէս կը համեմատի ինչպէս* ԱՄԲ *աղեղը՝ ամբողջ շրջանակին* (Գիրք Գ. Նախ. ԺԷ. Պար. 3), *կամ, ինչպէս* ԱՄԲ×$\frac{1}{2}$ԱԳ՝ ԱԲԴ×$\frac{1}{2}$ԱԳ *արտադրելոյն։ Բայց բոլորակը հաւասար է* ԱԲԴ×$\frac{1}{2}$ԱԳ *ին. ուրեմն հատիչին մակերեսը հաւասար է* ԱՄԲ×$\frac{1}{2}$ԱԳ *արտադրելոյն։*

Հետ. 2. *Եթէ* ֆ *ցուցընէ այն շրջանակը որուն տրամագիծը միութիւն է, որովհետեւ շրջանակներ իրա-*

րու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց տրամագծերը, կ'ունենանք 1:ֆ::2ԳԱ:շրջ. ԳԱ. *ուստի* շրջ. ԳԱ=ֆ×2ԳԱ։ *Բազմապատկելով երկու անդամները* $\frac{1}{2}$ԳԱ *ով կ'ունենանք* $\frac{1}{2}$ԳԱ×շրջ. ԳԱ=ֆ×ԳԱ^2, *կամ* մակ. ԳԱ=ֆ×ԳԱ^2. **այսինքն բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է անոր շառաւիղին քառակուսւոյն, բազմապատկեալ շրջանակի մը եւ անոր շառաւիղին ընդհանուր համեմատականովը։**

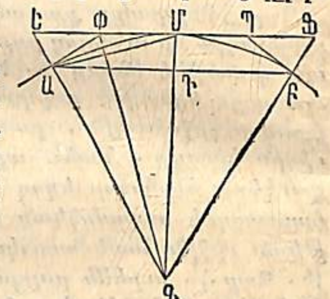
ՕԲ *շառաւիղն ունեցող բոլորակին մակերեսը հաւասար է* ֆ×ՕԲ^2 *արտադրելոյն. բայց* ֆ×ՕԲ^2:ֆ×ԳԱ^2:: ՕԲ^2:ԳԱ^2. *ուրեմն* **բոլորակներուն մակերեսներն իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց շառաւիղներուն քառակուսիները**, *ինչպէս նախընթաց նախադասութեան մէջ ապացուցուած է։*

Պար. *Բոլորակը քառակուսելու խնդիրը՝ ծանօթ տրամագիծ մը ունեցող բոլորակին համազօր քառակուսին գտնելն է* (Գիրք Դ. Խնդ. Թ. Պար.)։ *Արդէն ապացուցուեցաւ թէ բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է անոր շրջանակին, բազմապատկեալ անոր շառաւիղին կիսովը. նաեւ այս արտադրելոյն կամ ուղղանկեան համազօր եղող քառակուսւոյն մէկ կողմը հաւասար է ուղղանկեան երկայնութեան ու լայնութեան միջին համեմատականին* (Գիրք Դ. Խնդ. Գ. եւ Թ. Պար.). *ուրեմն բոլորակը քառակուսելու խնդիրը ծանօթ տրամագիծ մը ունեցող բոլորակին շրջանակը գտնելն է. այսինքն բոլորակին շրջանակին առ անոր տրամագիծը ունեցած ընդհանուր համեմատականը։ Մինչեւ հիմա այս համեմատականը միայն մերձաւորապէս որոշուած է։ Արքիմիդէս ցուցուց թէ այս համեմատականը* $3\frac{10}{70}$ *եւ* $3\frac{10}{71}$ *թիւերուն մէջտեղն է. Մետիոս ցուցուց թէ* $\frac{355}{113}$ *ին մօտ է, բայց ուրիշներ ապացուցած են թէ անոր արժէքն է* 3,1415926535891932+ *եւայլն։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ԽՆԴԻՐ

Բոլորակի մը թէ ներսը և թէ դուրսը գծուած իրարու նման կանոնաւոր բազմանկեանց մակերեսները գիտնալով, այն բազմանկեանց կրկնապատկին չափ կողմ ունեցող թէ ներսը և թէ դուրսը գծուած կանոնաւոր բազմանկեանց մակերեսները գտնել։

Թող ԱԲ ցուցընէ ներսը գծուած ծանօթ բազմանկեան մէկ կողմը, եւ անոր զուգահեռական եղող ԵՖ՝ դուրսը գծուածին մէկ կողմը ։ ԱՄ լարը եւ ԱՓ ու ԲՊ շօշափողները քաշէ. ԱՄ՝ ներսը գծուած, եւ ԱՓ+ՓՄ, կամ ՓՊ՝ դուրսը գծուած ծանօթ բազմանկեանց կրկնապատկին չափ կողմ ունեցող բազմանկեանց կողմերն են ։ Թող Ա ցուցընէ ներսը գծուած ծանօթ բազմանկեան մակերեսը, եւ Բ՝ դուրսը գծուածինը. նաեւ թող Ա′ եւ Բ′ ցուցընեն ծանօթ բազմանկեանց կրկնապատկին չափ կողմ ունեցող թէ ներսը եւ թէ դուրսը գծուածներուն մակերեսները։ Ա եւ Բ գիտնալով, Ա′ եւ Բ′ գտնելու ենք ։



Նախ. Եթէ Գ՝ բոլորակին կեդրոնն է, յայտնի է թէ Ա եւ Ա′ մակերեսները իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս ԳԱԴ եւ ԳԱՄ եռանկիւնները. այսինքն :Ա:Ա′ ::ԳԴ:ԳՄ:. դարձեալ, Ա′ եւ Բ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԳԱՄ եւ ԳԵՄ եռանկիւնները ։ այսինքն Ա′:Բ::ԳԱ:ԳԵ ։ Բայց, որովհետեւ ԱԴ եւ ԵՄ զուգահեռական են, ԳԴ:ԳՄ::ԳԱ:ԳԵ. ուստի Ա:Ա′ ::Ա′:Բ. ուրեմն $Ա'^2=Ա\times Բ$, կամ $Ա'=\sqrt{Ա\times Բ}$ ։

Երկրորդ. Որովհետեւ ԳՓՄ եւ ԳՓԵ եռանկիւնները նոյն բարձրութիւնն ունին, ԳՄ, ԳՓՄ:ԳՓԵ::ՓՄ:ՓԵ. բայց, որովհետեւ ԳՓ գիծը ԵԳՄ անկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ, ՓՄ:ՓԵ::ԳՄ:ԳԵ (Գիրք Գ. Նախ. ԺԷ)::ԳԴ:ԳԱ::Ա:Ա′. ուստի ԳՓՄ:ԳՓՄ+ԳՓԵ կամ ԳՄԵ:Ա:Ա+Ա′ ։ Բայց ԳՄՓԱ կամ 2ԳՄՓ:ԳՄԵ::Բ′:Բ. ուստի Բ′:Բ::2Ա:Ա+Ա′, եւ $Բ'=\frac{2Ա\times Բ}{Ա+Ա'}$:

Ա′ին արժէքը արդէն գտած ենք, ուրեմն Ա եւ Բ գիտնալով դիւրին է Ա′ եւ Բ′ մակերեսները գտնել ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ԽՆԴԻՐ

Այն բոլորակին մակերեսը գտնել, որուն շառաւիղը 1 է ։

Եթէ բոլորակին շառաւիղը 1 է, ներսը գծուած քառակուսոյն մէկ կողմը՝ $\sqrt{2}$ (Նախ. Գ. Պար.), եւ դուրսը գծուածինը՝ 2 կ՚ըլլայ. ուստի ներսը գծուածին մակերեսը՝ 2, եւ դուրսը գծուածինը՝ 4 կ՚ըլլայ ։ Եթէ նախընթաց նախադասութեան մէջ Ա ին արժէքը՝ 2, եւ Բ ին արժէքը 4 համարինք, կրնանք Ա′ ին եւ Բ′ ին, այսինքն թէ ներսը եւ թէ դուրսը գծուած ութանկեանց մակերեսները գտնել, եւ յետոյ 16,32,64 եւայլն, կողմ ունեցող բազմանկեանց մակերեսները ։ Վարի ցուցակը կը պարունակէ այս արժէքները ։

Թիւ կողմանց	Ներսի բազմանկեան մակերեսը ։	Դուրսի բազմանկեան մակերեսը ։
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933

8192 . . .	3,1415923 . . .	3,1415928
16384 . . .	3,1415923 . . .	3,1415927
32768 . . .	3,1415926 . . .	3,1415926

Որովհետեւ բոլորակին մակերեսը թէ ներսը եւ թէ դուրսը գծուած բազմանկեանց մակերեսներուն մէջտեղն է, կը հետեւցընենք թէ անոր արժէքը հաւասար է 3,1415926+ ին ։

Հետ . Որովհետեւ բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է անոր շրջանակին կիսոյն, բազմապատկեալ անոր շառաւիղովը, յայտնի է թէ երբ շառաւիղը 1 է, շրջանակին կէսն է 3,1415926+ . եւ երբ տրամագիծը 1 է, ամբողջ շրջանակն է 3,1415926+ . ուրեմն ֆ ին արժէքն (Նախ . ԺԲ . Հետ . 2) է 3,1415926+, կամ գրեթէ 3,1416 ։

ԳԻՐՔ Զ.

ՄԱԿԱՐԴԱԿՆԵՐ ԵՒ ՄԱՐՄՆՈՑ ԱՆԿԻՒՆՆԵՐ

Սահմանք ։

1 . Գիծ մը *մակարդակի մը ուղղահայեաց* է, երբ ուղղահայեաց է մակարդակին ամէն մէկ գծին որ անոր ոտքէն կ'անցնի ։ Հակադարձաբար, մակարդակը այն գծին ուղղահայեաց է ։ Ուղղահայեացին *ոտքը* այն կէտն է ուր ուղղահայեացը մակարդակին կը դպչի ։

2 . Գիծ մը *մակարդակի մը զուգահեռական* է, երբ մակարդակին չի հանդիպիր, որչափ որ երկարի մէկ կամ միւս կողմը ։ Հակադարձաբար, մակարդակը այն գծին զուգահեռական է ։

3 . Երկու *մակարդակ իրարու զուգահեռական* են, երբ իրարու չեն հանդիպիր, որչափ որ երկարին ։

4 . Երբ երկու մակարդակ իրար կը կտրեն, անոնց հակումը կամ բացուածքը մակարդակներուն *անկիւնը* կը կոչուին ։ Մակարդակները՝ *անկեան երեսները*, եւ անոնց հասարակաց գիծը *անկեան ծայրը* կը կոչուի ։ Այս անկիւնը չափելու համար, անկեան ծայրին որեւէ մէկ կէտէն, երկու երեսներուն վրայ՝ ծայրին ուղղահայեաց մէյմէկ գիծ քաշէ . այս երկու գծերուն անկիւնը մակարդակներուն անկեան չափն է, եւ կրնայ սուր, ուղիղ կամ բութ ըլլալ ։ Երբ երկու մակարդակներուն անկիւնը ուղիղ է, անոնք իրարու *ուղղահայեաց* են ։

5 . Երբ քանի մը մակարդակ հասարակաց կէտի մը վրայ իրար կը կտրեն, անոնց մէջտեղ եղած անկիւնաւոր միջոցը *մարմնոյ անկիւն* կը կոչուի . զորօրինակ, Ս մարմնոյ անկիւնը՝ ԱՍԲ, ԲԱԳ, ԳՍԴ եւ ԴՍԱ մակարդակներուն իրար կտրելովը կազմուած է ։ Ս կէտը մարմնոյ անկեան *գագաթն* է ։

Գոնէ երեք մակարդակ պէտք է մարմնոյ անկիւն մը կազմելու ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

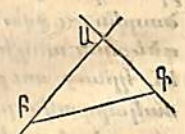
Գիծ մը չի կրնար ըստ մասին մակարդակի մը վրայ՝ եւ ըստ մասին անկէ դուրս ըլլալ։

Քանզի, երբ գիծ մը ըստ մասին մակարդակի մը վրայ է, գիծը եւ մակարդակը գոնէ երկու հասարակաց կէտ ունին . ուրեմն ամբողջ գիծը մակարդակին վրայ է (Գիրք Ա. Սահ. 6) ։

Պար. Երբ կ'ուզենք գիտնալ թէ մակերեւոյթ մը մակարդակ է թէ ոչ, անոր երեսին վրայ ուղիղ գիծ մը դնելու ենք այլեւայլ ուղղութեամբ . եթէ գիծը ծայրէ ծայր երեսը կը շօշափէ, մակերեւոյթը մակարդակ է ։

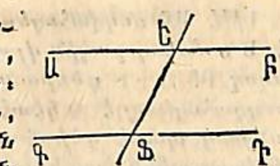
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու իրար կտրող գծեր մակարդակի մը դիրքը կ'որոշեն ։



Եթէ ԱԲ եւ ԱԳ գծերը Ա կէտին վրայ իրար կը կտրեն, մակարդակի մը դիրքը կ'որոշեն ։ Քանզի կրնանք մակարդակ մը ըմբռնել որուն վրայ ԱԲ գիծը գծուած է . եթէ այն մակարդակը ԱԲ ի վրայ, իբրեւ առանցքի վրայ, դարձընենք մինչեւ որ Գ կէտը անոր վրայ գտնուի, ԱԳ ամբողջ գիծը այն մակարդակին վրայ պիտի ըլլայ (Գիրք Ա. Սահ. 6) . նաեւ, եթէ մակարդակը որեւէ ուրիշ դիրքի մէջ ըլլայ, ԱԲ եւ ԱԳ գծերը անոր վրայ չեն կրնար ըլլալ . ուրեմն այս երկու գծերը մակարդակին դիրքը կ'որոշեն ։

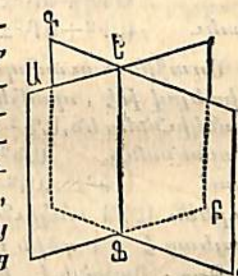
Հետ. 1. Եռանկիւն մը, կամ միեւնոյն գծի վրայ չեղող երեք կէտեր մակարդակի մը դիրքը կ'որոշեն ։



Հետ. 2. Երկու զուգահեռական գծեր, ինչպէս ԱԲ եւ ԳԴ, մակարդակի մը դիրքը կ'որոշեն ։ Քանզի, եթէ ԵԶ գիծը քաշուի, յայտնի է թէ ԱԲ եւ ԵԶ գծերուն մակարդակը՝ ԱԲ եւ ԳԴ գծերուն մակարդակն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

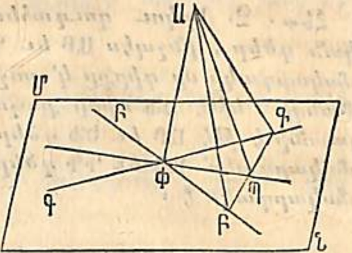
Երբ երկու մակարդակ իրար կը կտրեն, անոնց հասարակաց կէտերը ուղիղ գիծ մը կը կազմեն ։



Եթէ ԱԲ եւ ԳԴ մակարդակները Ե եւ Զ կէտերուն վրայ իրար կը կտրեն, անոնց հասարակաց բոլոր կէտերը ուղիղ գիծ մը կը կազմեն ։ ԵԶ ուղիղ գիծը քաշէ . որովհետեւ Ե եւ Զ կէտերը թէ ԱԲ եւ թէ ԳԴ մակարդակաց վրայ են, ԵԶ ամբողջ գիծն ալ անոնց վրայ է (Գիրք Ա. Սահ. 6), եւ անոնց հատման գիծն է . նաեւ, որովհետեւ ուղիղ գիծ մը եւ անկէ դուրս եղող կէտ մը չեն կրնար երկու իրարմէ տարբեր մակարդակաց վրայ լինալ, յայտնի է թէ ԱԲ եւ ԳԴ մակարդակները ԵԶ ուղիղ գծէն դուրս հասարակաց կէտ չունին ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ գիծ մը երկու ուրիշ գծերու ուղղահայեաց է՝ անոնց իրար կտրած տեղը, առաջին գիծը այն երկու գծերուն մակարդակին ալ ուղղահայեաց է ։



Եթէ ԱՓ ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին վրայ եղող ԲԲ, ԳԳ գծերուն, ուղղահայեաց է Փ կէտէն անցնող որևէ գծի մը որ մակարդակին վրայ է · այսինքն, մակարդակին ուղղահայեաց է (Սահ. 1)։

ՄՆ մակարդակին վրայ Փ կէտէն որևէ գիծ մը քաշէ, ինչպէս ՓՊ, և այս գծին որևէ մէկ կէտէն, ինչպէս Պ, ԲՊԳ գիծը այնպէս քաշէ որ ԲՊ հաւասար ըլլայ ՊԳ ին (Գիրք Դ. Խնդ. Ե.) · Նաև ԱԲ, ԱՊ և ԱԳ քաշէ ·

Որովհետև ՓԲԳ եռանկեան մէջ $ԲՊ=ՊԳ$,

$$ՓԳ^2+ՓԲ^2=2ՓՊ^2+2ՊԳ^2 .$$

Նաև $ԱԳ^2+ԱԲ^2=2ԱՊ^2+2ՊԳ^2$ (Գիրք Դ. Նախ. ԺԴ.)։

Առաջին հաւասարութիւնը երկրորդէն հանելով, և դիտելով թէ, որովհետև ԱՓԳ և ԱՓԲ ուղղանկիւն եռանկիւններ են, $ԱԳ^2-ՓԳ^2=ԱՓ^2$, և $ԱԲ^2-ՓԲ^2=ԱՓ^2$, կ'ունենանք $ԱՓ^2+ԱՓ^2=2ԱՊ^2-2ՓՊ^2$,
կամ $ԱՓ^2=ԱՊ^2-ՓՊ^2$, կամ $ԱՊ^2=ԱՓ^2+ՓՊ^2$.
ուրեմն ԱՓՊ անկիւնը ուղիղ է, և ԱՓ գիծը ուղղահայեաց է ՓՊ գծին ։

Պար. Յայտնի է թէ առաջին սահմանը (երես 147) ուղիղ է, քանզի, երբ գիծ մը ուղղահայեաց է մակարդակի մը, ուղղահայեաց է նաև իր ոտքէն անցնող բոլոր գծերուն որ մակարդակին վրայ են ։

Հետ. 1. ԱՓ ուղղահայեացը կարճ է որևէ խոտորնակ գիծէ մը, ինչպէս ԱՊ ։

Հետ. 2. Մակարդակի մը որևէ մէկ կէտէն մակարդակին ուղղահայեաց միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ · քանզի եթէ երկու հատ ըլլային, անոնց մակարդակը միւս մակարդակը պիտի կտրէր ուղիղ գծի մը վրայ, ինչպէս ՓՊ · և անատեն այս երկու ուղղահայեաց գծերը ՓՊ ին ուղղահայեաց պիտի ըլլային միևնոյն կէտին վրայ · բայց ասիկա անկարելի է (Գիրք Ա. Նախ. ԺԴ. Պար.) · ուրեմն միայն մէկ ուղղահայեաց կրնայ քաշուիլ ։

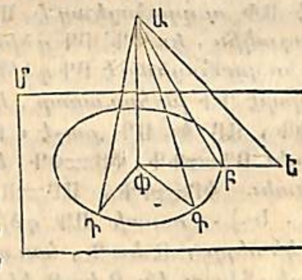
Հետ. 3. Նաև մակարդակէ մը դուրս եղող որևէ կէտէ մը մակարդակին ուղղահայեաց միայն մէկ գիծ կրնայ քաշուիլ · քանզի եթէ երկու հատ ըլլային, ինչպէս ԱՓ և ԱՊ, ԱՓՊ եռանկեան մէջ երկու անկիւն ԱՓՊ և ԱՊՓ ուղիղ պիտի ըլլային ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ մակարդակէ մը դուրս եղող կէտէ մը մակարդակին ուղղահայեաց գիծ մը քաշուի, և խոտորնակ գծեր՝ մակարդակին այլեայլ կէտերուն,

Նախ, Այն խոտորնակ գծերը, որոնք ուղղահայեացին ոտքէն հաւասարապէս հեռու եղող կէտերու վրայ մակարդակին կը դպչին, իրարու հաւասար են ։

Երկրորդ, Երկու խոտորնակ գծերուն՝ այն ոտքէն հեռու եղող կէտին վրայ դպչողը երկայն է ։



ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց ԱՓ գիծը քաշէ · և անոր Փ ոտքէն հաւասարապէս հեռու եղող Բ, Գ և Դ կէտերուն՝ ԱԲ, ԱԳ և ԱԴ խոտորնակ գծերը · Նաև Բ կէտին հեռաւորութենէն աւելի հեռու եղող Ե կէտին՝ ԱԵ գիծը քաշէ ։

Նախ · ԱԲ, ԱԳ և ԱԴ իրարու հաւասար են · քանզի, որովհետև ԱՓԲ, ԱՓԳ և ԱՓԴ անկիւնները ուղիղ են, և ՓԲ, ՓԳ և ՓԴ՝ իրարու հաւասար, այս երեք եռանկիւններն իրարու հաւասար են · ուրեմն ԱԲ, ԱԳ և ԱԴ իրարու հաւասար են ։

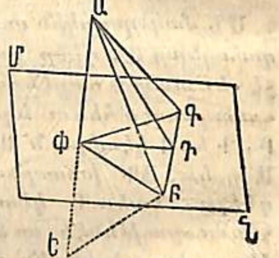
Երկրորդ · $ԱԵ>ԱԲ$, քանզի, որովհետև $ՓԵ>ՓԲ$, ԱԵ խոտորնակ գիծը մեծ է ԱԲ խոտորնակ գծէն (Գիրք Ա. Նախ. ԺԵ.) ։

Հետ. ՄՆ մակարդակէն դուրս եղող կէտէ մը ինչպէս Ա, մակարդակին ուղղահայեաց գիծ մը քաշելու համար, մակարդակին վրայ Ա կէտէն հաւասարապէս հեռու եղող երեք կէտեր գտիր, ինչպէս Բ, Գ եւ Դ, եւ այն կէտերուն վրայէն շրջանակ մը քաշէ. այս շրջանակին կեդրոնը, Փ, քաշուելու ուղղահայեացին ոտքն է։

Գոր. ԱԲՓ անկիւնը ԱԲ խոտորնակ գծին դէպի ՄՆ մակարդակը ունեցած հակումը կը կոչուի։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ մակարդակի մը ուղղահայեաց եղող գծի մը ոտքէն գիծ մը տարուի մակարդակին որեւէ մէկ գծին ուղղահայեաց, և ուրիշ գիծ մը՝ հատման կէտէն մինչև առաջին ուղղահայեացին որեւէ մէկ կէտին, այս վերջին գիծն ալ ուղղահայեաց պիտի ըլլայ մակարդակին գծին։



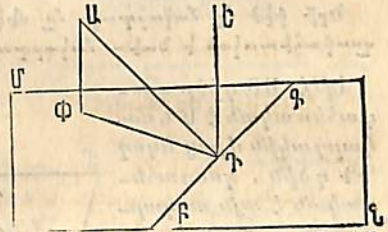
Եթէ ԱՓ ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, եւ ՓԴ՝ ԲԳ գծին, ԱԴ ալ ուղղահայեաց է ԲԳ գծին։

ԲԴ կտրէ ԴԳ ին հաւասար, եւ ՓԲ, ՓԳ, ԱԲ եւ ԱԳ քաշէ։ Որովհետեւ ԲԴ=ԴԳ, ՓԲ=ՓԳ. եւ որովհետեւ ՓԲ=ՓԳ, ԱԲ=ԱԳ (Նախ. Ե.)· ուստի ԱԴ գծին երկու կէտերը, Ա եւ Դ, հաւասարապէս հեռու են Բ եւ Գ կէտերէն. ուրեմն ԱԴ գիծը ուղղահայեաց է ԲԳ գծին (Գիրք Ա. Նախ. ԺԶ. Հետ.)։

Հետ. Որովհետեւ ԲԳ ուղղահայեաց է ԱԴ եւ ՓԴ գծերուն, յայտնի է թէ ուղղահայեաց է ԱՓԴ մակարդակին (Նախ. Դ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու զուգահեռական գծերուն մէկը մակարդակի մը ուղղահայեաց է, միւսն ալ ուղղահայեաց է նոյն մակարդակին։



Եթէ ԱՓ ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, ԱՓ ին հետ զուգահեռական եղող ԵԴ ալ ուղղահայեաց է նոյն մակարդակին։

ԱՓ եւ ԵԴ զուգահեռական գծերը մակարդակ մը կ'որոշեն որ կը կտրէ ՄՆ մակարդակը ՓԴ գծին վրայ։ Քաշէ ԱԴ գիծը, նաեւ ՄՆ մակարդակին վրայ՝ ԲԳ գիծը ՓԴ ին ուղղահայեաց։ Որովհետեւ ԲԳ ուղղահայեաց է ԱՓԴԵ մակարդակին (Նախ. Զ. Հետ.), ԲԴԵ անկիւնը ուղիղ է. եւ որովհետեւ ԱՓ ուղղահայեաց է ՓԴ գծին, ԱՓ ին հետ զուգահեռական եղող ԵԴ ալ ուղղահայեաց է նոյն գծին (Գիրք Ա. Նախ. Ի. Հետ. 1). ուստի ԵԴ գիծը ուղղահայեաց է ՓԴ եւ ԲԳ գծերուն. ուրեմն ուղղահայեաց է անոնց մակարդակին, ՄՆ (Նախ. Դ.)։

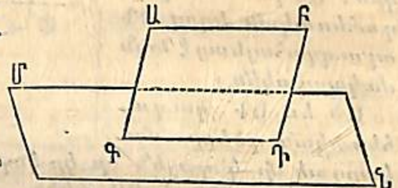
Հետ. 1. Հակադարձաբար, եթէ ԱՓ եւ ԵԴ գծերը ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց են, իրարու զուգահեռական են։ Քանզի, եթէ զուգահեռական չեն, Դ կէտէն գիծ մը քաշէ ԱՓ գծին զուգահեռական. այս գիծը ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին. բայց ենթադրութեամբ ԵԴ ուղղահայեաց է նոյն մակարդակին. ուրեմն՝ որովհետեւ երկու չեն կրնար ըլլալ (Նախ. Դ. Հետ. 2), յայտնի է թէ ԵԴ գիծը ԱՓ գծին զուգահեռական է։

Հետ. 2. Եթէ նոյն մակարդակին վրայ եղող երկու գծեր ուրիշ մակարդակի մը վրայ եղող գծի մը զուգահեռական են, այն երկու գծերը իրարու զուգա-

հեռական են ։ Քանզի, եթէ մակարդակ մը գծուի այս երրորդ գծին ուղղահայեաց, ուղղահայեաց պիտի ըլլայ նաեւ միւս երկու գծերուն․ ուրեմն անոնք իրարու զուգահեռական են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

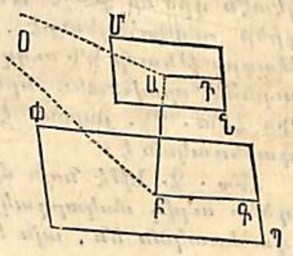
Երբ գիծ մը մակարդակի մը մէկ գծին զուգահեռական է, զուգահեռական է նաեւ մակարդակին ։



Եթէ ԱԲ գիծը զուգահեռական է ՄՆ մակարդակին վրայ եղող ԳԴ գծին, զուգահեռական է այն մակարդակին ։ Քանզի ԱԲ գիծը ԱԲԳԴ մակարդակին վրայ է, նաեւ այն եւ ՄՆ մակարդակներն իրար կը կտրեն ԳԴ գծին վրայ ։ Ուստի ԱԲ գիծը, եթէ կրնար ՄՆ մակարդակին դպչիլ, կամ ԳԴ գծին, կամ անոր շարունակութեանը վրայ պիտի դպչէր․ բայց ԱԲ եւ ԳԴ զուգահեռական ըլլալով չեն կրնար իրարու դպչիլ․ ուրեմն ԱԲ գիծը ՄՆ մակարդակին չի կրնար դպչիլ, եւ անոր զուգահեռական է (Սահ․ 2) ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու մակարդակներ միեւնոյն գծին ուղղահայեաց են, իրարու զուգահեռական են ։

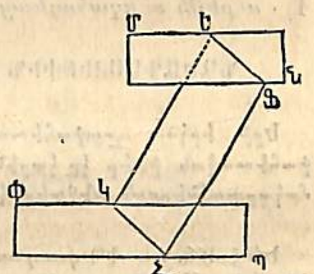


Եթէ ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակները ուղղահայեաց են ԱԲ գծին, իրարու զուգահեռական են ։ Ենթադրենք թէ զուգահեռական չեն, եւ թէ շարունակուելով կէտի մը վրայ, ինչպէս Օ, իրար կը կտրեն ։ Քաշէ ՕԱ եւ ՕԲ ։ Ո-

րովհետեւ ԱԲ գիծը ուղղահայեաց է ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակներուն, ուղղահայեաց է ՕԱ եւ ՕԲ գծերուն (Սահ․ 1)․ ուստի ՕԲԱ եռանկեան մէջ երկու ուղիղ անկիւն կայ․ բայց ասիկա անկարելի է (Գիրք Ա․ Նախ․ ԻԵ․ Հետ․ 3)․ ուրեմն ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակներն իրար չեն կրնար կտրել, եւ զուգահեռական են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

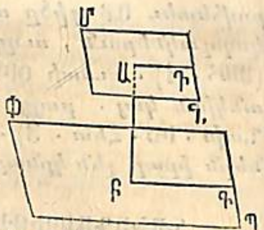
Երբ մակարդակ մը երկու իրարու զուգահեռական մակարդակներ կը կտրէ, հատման գծերը զուգահեռական են ։



Եթէ ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակները զուգահեռական են, եւ ԵՀ մակարդակը ԵՖ եւ ԿՀ գծերուն վրայ զանոնք կը կտրէ, ԵՖ եւ ԿՀ հատման գծերը իրարու զուգահեռական են ։ Քանզի, եթէ զուգահեռական չեն, միեւնոյն մակարդակին վրայ ըլլալով, եթէ շարունակուէին, իրարու պիտի դպչէին․ այսինքն ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակները իրար պիտի կտրեն․ բայց այս մակարդակները զուգահեռական են եւ չեն կրնար իրարու դպչիլ․ ուրեմն ԵՖ եւ ԿՀ զուգահեռական են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու մակարդակներ իրարու զուգահեռական են, այն գիծը որ մէկուն ուղղահայեաց է՝ միւսին ալ ուղղահայեաց է ։

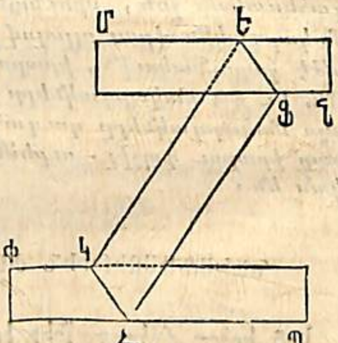


Եթէ ՄՆ եւ ՓՊ մակարդակները զուգահեռական են , ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց եղող ԱԲ գիծը ՓՊ մակարդակին ալ ուղղահայեաց է ։

ՓՊ *մակարդակին վրայ որեւէ ուղղութեամբ* ԲԳ *քաշէ , եւ* ԲԳ *ու* ԱԲ *գծերուն վրայէն մտօքդ մակարդակ մը անցուր որ կտրէ* ՄՆ *մակարդակը* ԱԴ *գծին վրայ ։* ԱԴ *զուգահեռական է* ԲԳ *գծին (Նախ . Ժ .) . ուստի* ԱԲ *գիծը , որ* ԱԴ *ին ուղղահայեաց է , ուղղահայեաց է* ԲԳ *գծին (Գիրք* Ա *. Նախ . Ի . Հետ . 1) . ուրեմն ուղղահայեաց է* ՓՊ *մակարդակին (Սահ . 1) ։*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ . ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու զուգահեռական մակարդակներ երկու զուգահեռական գծեր կը կտրեն , գծերուն այն մասերը , որ մակարդակներուն մէջտեղ կ'իյնան , իրարու հաւասար են ։



Եթէ ՄՆ *եւ* ՓՊ *զուգահեռական մակարդակները* ԿԵ *եւ* ՀՖ *զուգահեռական գծերը կը կտրեն* Կ , Ե , Հ *եւ* Ֆ *կէտերուն վրայ ,* ԿԵ *հաւասար է* ՀՖ *գծին ։*

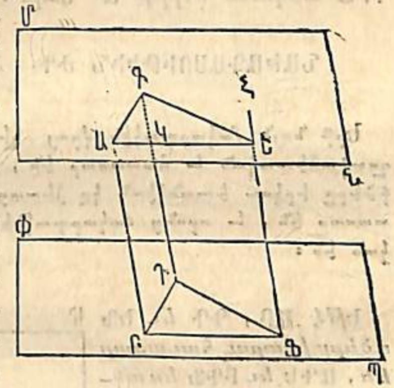
Քաշէ ԵՖ *եւ* ԿՀ *գծերը ։ Այս գծից վրայ* ԿԵՖՀ *մակարդակը՝* ՄՆ *եւ* ՓՊ *մակարդակները կը կտրէ . ուստի* ԿՀ *եւ* ԵՖ *զուգահեռական են . բայց ենթադրութեամբ* ԿԵ *եւ* ՀՖ *զուգահեռական են . ուրեմն* ԿԵՀՖ *զուգահեռագիծ է , եւ* ԿԵ *հաւասար է* ՀՖ*ին ։*

Հետ . Կը հետեւի թէ երկու զուգահեռական մակարդակներ ամեն տեղ իրարմէ հաւասարապէս հեռու են . *քանզի , եթէ երկու զուգահեռական գծերու մէկը այն*

մակարդակներուն ուղղահայեաց է , միւսն ալ ուղղահայեաց է (Նախ . Ի .) . եւ , որովհետեւ այս գծերը իրարու հաւասար են , մակարդակները իրարմէ հաւասարապէս հեռու են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ . ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ նոյն մակարդակին վրայ չեղող երկու անկեանց կողմերը զուգահեռական են , եւ նոյն ուղղութիւնը ունին , այն անկիւններն իրարու հաւասար են , եւ անոնց մակարդակները զուգահեռական են ։



Եթէ ԳԱ *եւ* ԴԲ՝ *նաեւ* ԱԵ *եւ* ԲՖ *զուգահեռական են ,*

Նախ . ԳԱԵ *հաւասար է* ԴԲՖ *անկեան ։*

Կտրէ ԱԳ *գիծը* ԲԴ*-ին հաւասար , նաեւ* ԱԵ՝ ԲՖ *ին հաւասար , եւ* ԳԵ , ԴՖ , ԱԲ , ԳԴ *եւ* ԵՖ *գծերը քաշէ ։*

Որովհետեւ ԱԳ *եւ* ԲԴ *իրարու զուգահեռական ու հաւասար են ,* ԱԲԴԳ *զուգահեռագիծ է . ուստի* ԳԴ *եւ* ԱԲ *զուգահեռական ու հաւասար են ։ Նաեւ , որովհետեւ* ԱԲՖԵ *զուգահեռագիծ է ,* ԵՖ *եւ* ԱԲ *զուգահեռական ու հաւասար են . ուստի* ԳԴ *եւ* ԵՖ *զուգահեռական ու հաւասար են (Նախ . Ի . Հետ . 2) . ուստի* ԳԵՖԴ *զուգահեռագիծ է , եւ* ԳԵ *ու* ԴՖ *իրարու զուգահեռական եւ հաւասար են . ուրեմն* ԱԳԵ *եւ* ԲԴՖ *եռանկիւնները հաւասար են (Գիրք* Ա *. Նախ . Ժ .) , եւ* ԳԱԵ *հաւասար է* ԴԲՖ *անկեան ։*

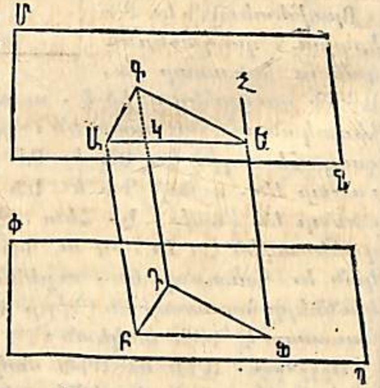
Երկրորդ . ԱԳԵ *եւ* ԲԴՖ *մակարդակները զուգահեռական են ։ Քանզի , եթէ այն մակարդակը , որ* ԲԴՖ *մակարդակին զուգահեռական է, եւ Ա կէտին վրայէն կ'անցնի, ԳԴ եւ ՑԵ գծերը կը կտրէր ոչ Գ եւ Ե՝ այլ ուրիշ կէտերու վրայ, ինչպէս Կ եւ Հ, ԴԿ եւ ՑՀ հաւասար կ'ըլլային ԱԲ գծին (Նախ. ԺԲ.). բայց ԳԴ եւ ՑԵ հաւասար են ԱԲ ին. ուրեմն ԱԳԵ եւ ԲԴՑ մակարդակները զուգահեռական են։*

Հետ. Երբ երկու զուգահեռական մակարդակներ, ինչպէս ՄՆ եւ ՓՊ, ուրիշ երկու մակարդակներ կը կտրեն, ինչպէս ԳԱԲԴ եւ ԵԱԲՑ, անոնց հատման գծերուն անկիւնները, ԳԱԵ եւ ԴԲՑ, իրարու հաւասար են. քանզի ԱԳ եւ ԲԴ զուգահեռական են, նաեւ ԱԵ եւ ԲՑ գծերը (Նախ. Ժ.). ուրեմն ԳԱԵ հաւասար է ԴԲՑ անկեան (Գիրք Ա. Նախ. ԻԴ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ նոյն մակարդակին վրայ չեղող երեք գծեր իրարու զուգահեռական եւ հաւասար են, անոնց ծայրերը միացնող գծերը երկու եռանկիւն կը ձեւացնեն որոնք իրարու հաւասար են, եւ որոնց մակարդակները իրարու զուգահեռական են։

Ենթէ ԱԲ, ԳԴ եւ ԵՑ գծերը իրարու հաւասար են, ԱԳԵ եւ ԲԴՑ եռանկիւններն իրարու հաւասար են, եւ անոնց մակարդակներն՝ իրարու զուգահեռական։



Որովհետեւ ԱԲ, ԳԴ եւ ԵՑ իրարու հաւասար եւ զուգահեռական են, ԱԲԴԳ, ԱԲՑԵ եւ ԳԴՑԵ զուգահեռագիծ են. ուստի ԱԳ եւ ԲԴ իրարու հաւասար եւ զուգահեռական են, նաեւ ԴՑ

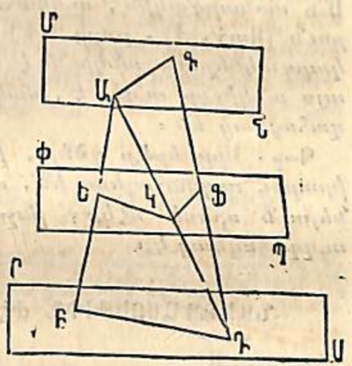
ու ԳԵ, եւ ԲՑ ու ԱԵ. ուրեմն ԱԳԵ եւ ԲԴՑ եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Գիրք Ա. Նախ. Ժ.). նաեւ անոնց մակարդակներն իրարու զուգահեռական են (Նախ. ԺԳ.)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երեք զուգահեռական մակարդակ երկու գիծ կը կտրեն, այն գծերուն մասերը իրարու համեմատական են։

Ենթէ ԱԲ եւ ԳԴ կտրող ՄՆ, ՓՊ եւ ՐՍ մակարդակները իրարու զուգահեռական են,

ԱԵ:ԵԲ::ԳՑ:ՑԴ։



ԱԴ, եւ ՓՊ մակարդակին վրայ ԵԿ եւ ԿՑ գծերը քաշէ; նաեւ ԱԳ եւ ԲԴ գծերը։ ԵԿ եւ ԲԴ զուգահեռական են (Նախ. Ժ.). ուստի ԱԵ:ԵԲ::ԱԿ:ԿԴ. *նաեւ ԱԳ եւ ԿՑ զուգահեռական են,*

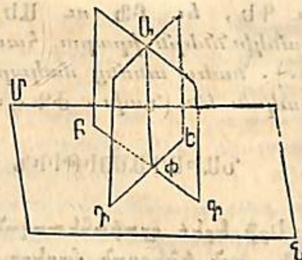
եւ ԱԿ:ԿԴ::ԳՑ:ՑԴ.

ուրեմն ԱԵ:ԵԲ::ԳՑ:ՑԴ (*Գիրք Բ. Նախ. Դ. Հետ.*)։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ գիծ մը որեւէ մակարդակի մը ուղղահայեաց է, այն մակարդակին ուղղահայեաց է նաեւ ամէն մակարդակ որ այն գծին վրայէն կ'անցնի։

Եթէ ԱՓ գիծը ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, ԱՓ գծին վրայէն անցնող որեւէ մակարդակ, ինչպէս ԱԲ, նոյն մակարդակին ուղղահայեաց է ։



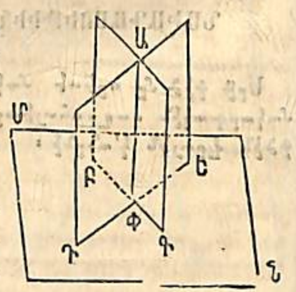
ՄՆ մակարդակին վրայ ԴԵ քաշէ՝ ՄՆ եւ ԱԲ մակարդակներուն հատման ԲԳ գծին ուղղահայեաց. որովհետեւ ԱՓ ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, ուղղահայեաց է ԲԳ եւ ԴԵ գծերուն (Սահ. 1). բայց ԱՓԴ անկիւնը ՄՆ եւ ՄԲ մակարդակներուն անկիւնն է (Սահ. 4), եւ, որովհետեւ այս անկիւնը ուղիղ է, մակարդակներն իրարու ուղղահայեաց են ։

Պոբ. Երբ երեք գծեր, ինչպէս ԱՓ, ԲՓ եւ ԴՓ, իրարու ուղղահայեաց են, անոնց որոշած մակարդակներուն որեւէ մէկը, ինչպէս ԱԲ, միւս երկուքին ուղղահայեաց է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու մակարդակներ իրարու ուղղահայեաց են, այն գիծը, որ մէկուն վրայ հատման գծին ուղղահայեաց տարուած է, միւս մակարդակին ուղղահայեաց է ։

Եթէ ԱԲ մակարդակը ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, եւ ԱՓ գիծը անոնց հատման ԲԳ գծին ուղղահայեաց է, ԱՓ ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին ։



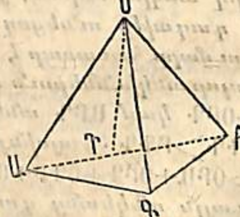
ՄՆ մակարդակին վրայ քաշէ ԴՓ գիծը ԲՓ գծին ուղղահայեաց. որովհետեւ մակարդակները իրարու ուղղահայեաց են, ԱՓԴ անկիւնը ուղիղ է. ուստի ԱՓ գիծը ՓԲ եւ ՓԴ գծերուն ուղղահայեաց է. ուրեմն ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց է (Նախ. Դ.) ։

Հետ. Երբ ԱԲ մակարդակը ուղղահայեաց է ՄՆ մակարդակին, եթէ անոնց հատման գծին որեւէ մէկ կէտէն, ինչպէս Փ, ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց գիծ մը քաշուի, ինչպէս ՓԱ, այն գիծը՝ ԱԲ մակարդակին վրայ պիտի ըլլայ. քանզի, եթէ այն մակարդակին վրայ չէ, այն մակարդակին վրայ Փ կէտէն ՓԲ հատման գծին ուղղահայեաց գիծ մը քաշէ. այս գիծը ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց է. ուստի Փ կէտէն ՄՆ մակարդակին ուղղահայեաց երկու գիծ քաշուած կ'ըլլան. բայց ասիկա անկարելի է (Նախ. Դ. Հետ. 2). ուրեմն ՓԱ ուղղահայեացը ԱԲ մակարդակին վրայ է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երեք մակարդակի անկիւններ մարմնոյ անկիւն մը կը կազմեն, անոնց որեւէ երկուքին գումարը երրորդէն մեծ է ։

Եթէ Ս մարմնոյ անկիւնը կազմող մակարդակի անկեանց մեծը՝ ԱՍԲ անկիւնն է, ապացուցանելու է թէ $\text{ԱՍԲ} < \text{ԱՍԳ} + \text{ԲՍԳ}$ ։

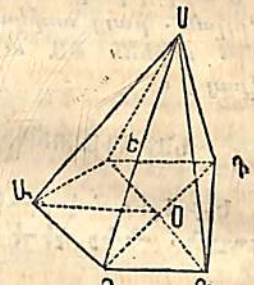


ԱՍԲ մակարդակին վրայ ՍԴ գիծը քաշէ՝ ԲՍԴ անկիւնը ԲՍԳ անկեան հաւասար ընելով, եւ որեւէ ուղղութեամբ ԱԴԲ քաշէ. նաեւ ՍԳ կտրէ ՍԴ գծին հաւասար, եւ ԱԳ ու ԳԲ քաշէ ։

ԲՍԴ եւ ԲՍԳ եռանկիւններն իրարու հաւասար են, քանզի անոնց մէկուն ԲՍ եւ ՍԴ կողմերը հաւասար են միւսին ԲՍ եւ ՍԳ կողմերուն. նաեւ ԲՍԴ անկիւնը հաւասար է ԲՍԳ անկեան. ուստի $\text{ԲԳ} = \text{ԲԴ}$ ։ Բայց ԱԲԳ եռանկեան մէջ $\text{ԱԲ} < \text{ԱԳ} + \text{ԲԳ}$. առր մէկ անդամէն հանելով ԲԴ , եւ միւսէն՝ ԲԴ ին հաւասար եղող ԲԳ , կ'ունենանք ԱԴ < ԱԳ ։ ԱՍԴ եռանկեան ԱՍ եւ ՍԴ կողմերը հաւասար են ԱՍԳ եռանկեան ԱՍ եւ ՍԳ կողմերուն · բայց ԱԴ < ԱԳ · ուստի ԱՍԴ < ԱՍԳ (Գիրք Ա· Նախ· Թ· Պար·) · եւ գումարելով ԲՍԴ=ԲՍԳ , կ'ունենանք ԱՍԴ+ԲՍԴ կամ ԱՍԲ < ԱՍԳ+ԲՍԳ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ի · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

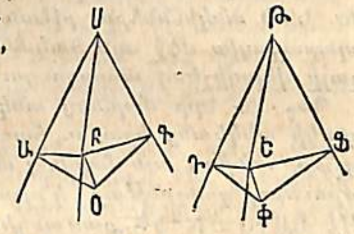
Որեւէ մարմնոյ անկեան կազմող մակարդակի անկեանց գումարը չորս ուղիղ անկիւններէ փոքր է ։



Ս մարմնոյ անկիւն կազմող մակարդակները կտրէ որեւէ մակարդակով , ինչպէս ԱԲԳԴԵ , եւ անոր մէկ կէտէն , Օ , քաշէ ՕԱ , ՕԲ , ՕԳ եւայլն գծերը , այնքան եռանկիւն գծելով որքան կը կազմեն Ս մարմնոյ անկիւնը ։ Որովհետեւ ամէն եռանկեան անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկիւններու , յայտնի է թէ Ս գագաթը ունեցող եռանկեանց բոլոր անկիւններուն գումարը հաւասար է Օ գագաթը ունեցող եռանկեանց բոլոր անկիւններուն գումարին ։ Բայց ԱԲՍ+ՍԲԳ > ԱԲՕ+ՕԲԳ կամ ԱԲԳ անկեան (Նախ· ԺԹ·) · նաեւ ՍԳԲ+ՍԳԴ > ԲԳԴ · այսինքն ՍԲԱ+ՍԲԳ+ՍԳԲ+ՍԳԴ եւայլն > ՕԲԱ+ՕԲԳ+ՕԳԲ+ՕԳԴ եւայլն · ուստի ԱՕԲ+ԲՕԳ եւայլն անկեանց գումարը մեծ է ԱՍԲ+ԲՍԳ եւայլն անկեանց գումարէն · բայց առաջին գումարը հաւասար է չորս ուղիղ անկեան (Գիրք Ա· Նախ· Դ· Պար·) · ուրեմն ԱՍԲ+ԲՍԳ եւայլն անկեանց գումարը փոքր է քան չորս ուղիղ անկիւն ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԻԱ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու մարմնոյ անկիւնք երեքական մակարդակի անկիւններէ կազմուած են , և մէկուն առաջին մակարդակի անկիւնը հաւասար է միւսին առաջին մակարդակի անկեան , երկրորդը՝ երկրորդին եւայլն , հաւասար մակարդակի անկեանց երեսները իրարու միեւնոյն հակումն ունին ։



Եթէ ԱՍԳ=ԴԹՑ անկեան, ԱՍԲ=ԴԹԵ անկեան, եւ ԲՍԳ=ԵԹՑ անկեան , ԱՍԳ եւ ԱՍԲ մակարդակաց հակումը՝ ԴԹՑ եւ ԴԹԵ մակարդակաց հակման հաւասար է ։

ՍԲ գծին որեւէ մէկ կէտէն , ինչպէս Բ , ԱՍԳ մակարդակին ուղղահայեաց ԲՕ գիծը քաշէ · այն գծին ոտքէն , Օ , ՍԱ եւ ՍԳ գծերուն ուղղահայեաց ՕԱ եւ ՕԳ քաշէ · նաեւ ԱԲ եւ ԲԳ քաշէ ։ Յետոյ ՍԲ գծին հաւասար ԹԵ կտրէ · ԴԹՑ մակարդակին ուղղահայեաց ԵՓ քաշէ · Փ ոտքէն ԹԴ եւ ԹՑ գծերուն ուղղահայեաց ՓԴ եւ ՓՑ քաշէ · քաշէ նաեւ ԴԵ եւ ԵՑ գծերը ։

ՍԱԲ եւ ԹԴԵ եռանկեանց մէջ Ա եւ Դ անկիւնները ուղիղ են (Նախ· Զ·) · եւ , որովհետեւ ԱՍԲ=ԴԹԵ , ՍԲԱ=ԹԵԴ եւ ՍԲ=ԹԵ , երկու եռանկիւններն իրարու հաւասար են , ՍԱ=ԹԴ , եւ ԱԲ=ԴԵ ։ Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ ՍԳ=ԹՑ , եւ ԲԳ=ԵՑ · ուստի ՍԱՕԳ հաւասար է ԹԴՓՑ քառանկեան · քանզի , եթէ մէկը միւսին վրայ դրուի այնպէս որ ԱՍԳ անկիւնը իրեն հաւասար եղող ԴԹՑ անկեան վրայ իյնայ , որովհետեւ ՍԱ=ԹԴ , եւ ՍԳ=ԹՑ , Ա կէտը՝ Դ ին վրայ , եւ Գ կէտը Ց ին վրայ պիտի իյնայ · նաեւ ՍԱ գծին ուղղահայեաց եղող ԱՕ պիտի իյնայ ԹԴ գծին ուղղահայեաց եղող ԴՓ ի վրայ , ՕԳ՝ ՓՑ ի վրայ , եւ Օ կէտը՝ Փ ի վրայ · ուստի ԱՕ=ԴՓ ։ Բայց ԱՕԲ եւ ԴՓԵ ուղղանկիւն եռանկեանց մէջ ԱԲ=ԴԵ, եւ ԱՕ=ԴՓ. ուստի այս եռանկիւնները իրարու հաւասար են (Գիրք Ա. Նախ. ԺԷ.). ուստի ՕԱԲ=ՓԴԵ անկեան. բայց ՕԱԲ անկիւնը ԱՍԲ եւ ԱՍԳ մակարդակաց հակումն է, եւ ՓԴԵ անկիւնը՝ ԴԹԵ ու ԴԹՑ մակարդակաց հակումը. ուրեմն այս հակումներն իրարու հաւասար են ։

Պար. 1. Երբ ԲՕ ուղղահայեացը ՍԱ գծէն դուրս կ'իյնայ, ԱՍԲ եւ ԱՍԳ մակարդակաց հակումը՝ նաեւ ԴԹԵ եւ ԴԹՑ մակարդակաց հակումը, այսինքն ԲԱՕ եւ ԵԴՓ անկիւնները բթանկիւն կ'ըլլան, բայց այս պարագային մէջ այն հակմանց իրարու հաւասար ըլլալը վերոյիշեալ ապացուցութեամբ կը ցուցուի ։

Պար. 2. Երբ մարմնոյ անկիւնները կազմող մակարդակի անկեանց իրարու հաւասար եզրները միեւնոյն դիրքը ունին, այն մարմնոյ անկիւնները, իրարու վրայ դրուելով զուգընթաց կ'ըլլան. քանզի ցուցուեցաւ թէ ԱՍԳՕ=ԴԹՑՓ քառանկեան. ուստի, Օ կէտը Փ ին վրայ պիտի իյնայ, եւ, որովհետեւ ՕԲ=ՓԵ, Բ կէտը՝ Ե ին վրայ, եւ Ս մարմնոյ անկիւնը Թ մարմնոյ անկեան հետ զուգընթաց կ'ըլլայ ։

Պար. 3. Երբ իրարու հաւասար եզող մակարդակի անկիւնները նոյն դիրքը չունին, թէեւ անոնց երեսները միեւնոյն հակումն ունին, մարմնոյ անկիւնները՝ իրարու վրայ դրուած ատեն, զուգընթաց չեն ըլլար. անատեն մարմնոյ անկիւնները համաչափաբերական հաւասար անկիւնք կը կոչուին ։

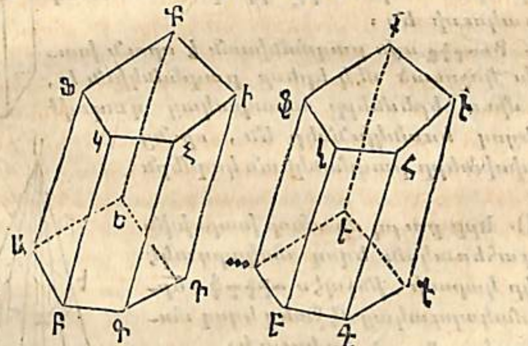
ԳԻՐՔ Է.

Բ Ա Զ Մ Ա Ն Ի Ս Տ Ք

Սահմանք ։

1. Ամէն մարմին՝ որ մակարդակի բազմանկիւններէ սահմանեալ է, **բազմանիստ** կը կոչուի ։ Սահմանող բազմանկիւնները՝ բազմանիստին **երեսները**, եւ այն գծերը՝ որոնց վրայ երեսներն իրար կը կտրեն, բազմանիստին **ծայրերը** կը կոչուին ։

2. **Հաւասարածակողմ** այն բազմանիստն է որուն երեսաց երկուքը հաւասար բազմանկիւն են, բազմանկեանց մակարդակներն ու համանուն կողմերն ալ՝ զուգահեռական. նաեւ միւս երեսները զուգահեռագիծ են ։



Զորօրինակ, ԱԲԳԴԵ-Ք բազմանիստը հաւասարածակողմ է. ԱԲԳԴԵ եւ ՑԿՀԻՔ երեսները իրարու հաւասար բազմանկիւն են, որոնց համանուն կողմերը, ԱԲ ու ՑԿ, ԲԳ ու ԿՀ, եւայլն զուգահեռական են. նաեւ ԱԲԿՑ, ԲԳՀԿ եւայլն երեսները զուգահեռագիծ են ։

ԱԲԳԴԵ բազմանկիւնը՝ հաւասարածակողման **վարի խարիսխը**, եւ ՑԿՀԻՔ անոր **վերի խարիսխը** կը կոչուի. եւ

ԱԲԿՑ, ԲԳՀԿ եւայլն զուգահեռագծերը հատուածակողման կորնթարդ մակերեւոյթը կը կազմեն:

3. Հատուածակողման բարձրութիւնը այն գիծն է, որ անոր մէկ խարսխին որեւէ մէկ կէտէն միւս խարսխին մակարդակին ուղղահայեաց կը քաշուի:

4. Երբ հատուածակողման կողմերը, ինչպէս ԱԲԿՑ, ԲԳՀԿ եւայլն, անոր խարսխին ուղղահայեաց են, հատուածակողմը ուղիղ կը կոչուի:

5. Հատուածակողմեր եռանկիւնի, քառանկիւնի, հնգանկիւնի, եւայլն կը կոչուին, երբ անոնց խարիսխներն են եռանկիւն, քառանկիւն, հնգանկիւն, եւայլն:

6. Զուգահեռանիստ այն հատուածակողմն է որուն խարիսխները զուգահեռագիծ են:

7. Ուղղանկիւն զուգահեռանիստ այն է որուն բոլոր երեսները ուղղանկիւն են:

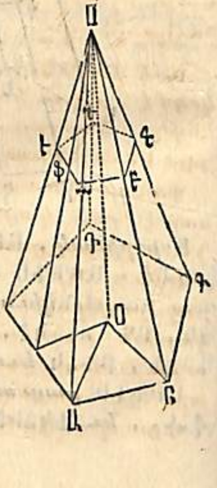
8. Խորանարդ կը կոչուի այն զուգահեռանիստը որուն երեսները իրարու հաւասար քառակուսի են:

9. Բուրգը այն բազմանիստն է որուն խարիսխ կոչուած մէկ երեսը բազմանկիւն է, եւ միւս երեսները հասարակաց գագաթ ունեցող եռանկիւններ են, որոնց խարիսխները բազմանկեան կողմերն են:

10. Երբ բուրգ մը անոր խարսխին զուգահեռական եղող մակարդակէ մը կը կտրուի, ինչպէս աբգդե, երկու մակարդակաց մէջտեղ եղող մասը հատեալ բուրգ կը կոչուի:

11. Եռանկիւնի երեսներուն հասարակաց կէտը բուրգին գագաթը կը կոչուի:

12. Բուրգի մը բարձրութիւնը այն ուղղահայեացն է որ բուրգին գագաթէն մինչեւ անոր խարսխին մակարդակը կը քաշուի:



13. Բուրգեր եռանկիւնի, քառանկիւնի, եւայլն կը կոչուին, երբ անոնց խարիսխներն են եռանկիւն, քառանկիւն, եւայլն:

14. Ուղիղ բուրգը այն է որուն խարիսխը կանոնաւոր բազմանկիւն է, նաեւ գագաթէն քաշուած ուղղահայեացը խարսխին կեդրոնէն կ'անցնի: Անատեն ուղղահայեացը բուրգին առանցքը կը կոչուի:

15. Ուղիղ բուրգի մը շեղեալ բարձրութիւնը այն գիծն է որ գագաթէն բուրգին խարսխին որեւէ կողման ուղղահայեաց կը քաշուի:

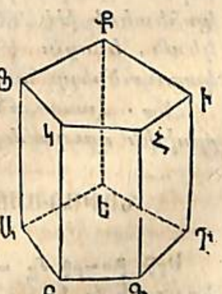
16. Բազմանիստին տրամանկիւնը այն գիծն է որ նոյն երեսին վրայ չեղող որեւէ երկու անկիւն իրարու կը կապէ:

17. Երկու բազմանիստներ նման են, երբ նոյն թիւ երես ունին, եւ մէկուն առաջին երեսը միւսին առաջին երեսին հաւասար է, երկրորդը՝ երկրորդին, եւայլն, նաեւ հաւասար երեսները նման դիրք ու նոյն հակումն ունին:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ հատուածակողման մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխին շրջագծին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը:

Եթէ ԱԲԳԴԵ-Ք ուղիղ հատուածակողմ է, անոր կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է (ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ)×ԱՑ արտադրելոյն:

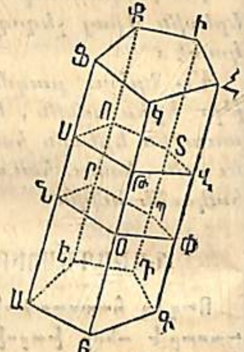


Քանզի այն մակերեւոյթը հաւասար է զայն կազմող ԱԿ, ԲՀ, ԳԻ, ԴՔ եւ ԵՑ ուղղանկիւններուն գումարին: Արդ ուղղանկիւններուն բարձրութիւնները եւ հատուածակողման բարձրութիւնը նոյն են. ուրեմն անոնց մակերեսաց գումարը, այսինքն հատուածակողման կորնթարդ մակերեւոյթը, հաւասար է (ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ)×ԱՑ արտադրելոյն:

Հետ. Երբ երկու ուղիղ հատուածակողմ նոյն բարձրութիւնն ունին, անոնց կողմնթարդ մակերեւոյթները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարըսխաց շրջապատները։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու զուգահեռական մակարդակ որեւէ հատուածակողմ կը կտրեն, կտրուածները նման բազմանկիւններ են։



Եթէ ԱԲԳԴԵ-Ք հատուածակողմը կտրող ՆՓ եւ ՍՎ մակարդակները զուգահեռական են, ՆՕՓՊՐ եւ ՍԹՎՏՌ կտրուածները նման բազմանկիւններ են։

Քանզի ՍԹ եւ ՆՕ զուգահեռական են (Գիրք Զ. Նախ. Ժ.). Նաեւ, որովհետեւ ՆՍ եւ ՕԹ զուգահեռական են, ՆՕ եւ ՍԹ իրարու հաւասար են։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԹՎ=ՕՓ, ՎՏ=ՓՊ, եւայլն։ Որովհետեւ հատուածներուն հաւասար եղող կողմերը զուգահեռական են, կը հետեւի թէ ՆՕՓ=ՍԹՎ անկեան, ՕՓՊ=ԹՎՏ անկեան, եւայլն (Գիրք Զ. Նախ. ԺԳ.). ուրեմն այս կտրուածները նման բազմանկիւններ են։

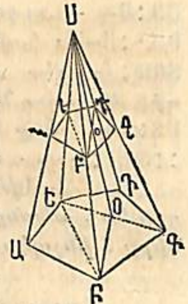
Հետ. Հատուածակողման մը ամէն կտրուածը որ խարըսխին զուգահեռական է, խարսխին հաւասար է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բուրգ մը անոր խարիսխին զուգահեռական եղող մակարդակէ մը կը կտրուի,

Նախ, Անոր ծայրերը և բարձրութիւնը համեմատական մասանց կը բաժնուին։

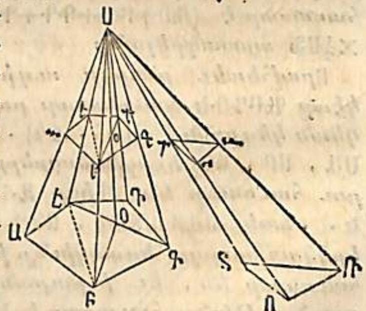
Երկրորդ, Կտրուածը խարիսխին նման բազմանկիւն մըն է։



Եթէ Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգը կտրող ագ մակարդակը բուրգին խարսխին զուգահեռական է, Սա:ՍԱ::Սօ:ՍՕ, եւ աբգդե բազմանկիւնը նման է ԱԲԳԴԵ խարըսխին։

Նախ. Որովհետեւ ԱԳ եւ ագ մակարդակները զուգահեռական են, աբ ու ԱԲ, բգ ու ԲԳ, եւայլն զուգահեռական են (Գիրք Զ. Նախ. Ժ.). ուստի Սա:ՍԱ::Սբ:ՍԲ. բայց, որովհետեւ բօ եւ ԲՕ զուգահեռական են, Սբ:ՍԲ::Սօ:ՍՕ. ուրեմն Սա:ՍԱ::Սօ:ՍՕ։

Երկրորդ. Որովհետեւ աբ ու ԱԲ, նաեւ բգ ու ԲԳ, եւայլն զուգահեռական են, աբգ հաւասար է ԱԲԳ անկեան, բգդ՝ ԲԳԴ անկեան, եւայլն (Գիրք Զ. Նախ. ԺԳ.). Նաեւ, որովհետեւ Սաբ նման է ՍԱԲ եռանկեան, Սբգ՝ ՍԲԳ եռանկեան, եւայլն, ԱԲ:աբ::ՍԲ:Սբ, եւ ՍԲ:Սբ::ԲԳ:բգ, եւայլն. ուստի ԱԲ:աբ::ԲԳ:բգ, եւայլն. ուրեմն աբգդե եւ ԱԲԳԴԵ բազմանկիւնները իրարու նման են (Գիրք Դ. Սահ. 1)։



Հետ. 1. Եթէ Ս հասարակաց գագաթն ունեցող Ս-ԱԲԳԴԵ եւ Ս-ՏՈՌ բուրգերուն խարիսխները միեւնոյն մակարդակին վրայ են, այն խարսխաց զուգահեռական եղող որեւէ մակարդակը՝ որ բուրգերը կը կտրէ, երկու կտրուածք կը ձեւացընէ, ինչպէս աբգդե ու տոռ, որոնք իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս խարիսխները։

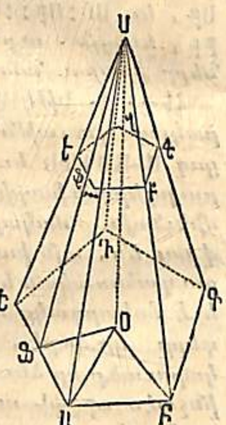
Քանզի, որովհետեւ ԱԲԳԴԵ եւ աբգդե նման բազմանկիւններ են, մակերես ԱԲԳԴԵ:մակերես աբգդե::ԱԲ^2:աբ^2 (Գիրք Դ. Նախ. ԻԷ.). բայց ԱԲ:աբ::

ՍԱ:Սա · ուստի մակերես ԱԲԳԴԵ: մակերես աբգդե:: ՍԱ²:Սա² : Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ մակերես ՏՈՌ: մակերես տոռ::ՍՏ²:Ստ² : Բայց, որովհետեւ աբգ եւ տոռ նոյն մակարդակին վրայ են, ՍԱ:Սա:: ՍՏ:Ստ (Գիրք Զ. Նախ. ԺԵ.) · ուրեմն ԱԲԳԴԵ:աբգդե ::ՏՈՌ:տոռ · կամ աբգդե:տոռ::ԱԲԳԴԵ:ՏՈՌ:

Հետ. 2. Եթէ ԱԲԳԴԵ եւ ՏՈՌ խարիսխները համազօր են, անոնց զուգահեռական եղող որեւէ կտրուածները, ինչպէս աբգդե եւ տոռ, համազօր են:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ բուրգի մը կողմնակի մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարիսխին շրջագծին, բազմապատկեալ շեղեալ բարձրութեան կիսովը:



Եթէ Ս–ԱԲԳԴԵ բուրգը ուղիղ է, եւ ՍՑ ուղղահայեաց է ԱԵ գծին, բուրգին կողմնակի մակերեւոյթը հաւասար է (ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ)×½ՍՑ արտադրելոյն:

Որովհետեւ բուրգը ուղիղ է, Օ կէտը ԱԲԳԴԵ կանոնաւոր բազմանկեան կեդրոնն է (Սահ. 14) · ուստի ՍԱ, ՍԲ, ՍԳ եւայլն ծայրերը իրարու հաւասար են (Գիրք Զ. Նախ. Ե.) · նաեւ ՍԱԲ, ՍԲԳ, ՍԳԴ եւայլն երկկողմնազոյգ եռանկիւնք իրարու հաւասար են, եւ իւրաքանչիւրին բարձրութիւնը հաւասար է ՍՑ գծին: Արդ ՍԱԲ եռանկեան մակերեսը հաւասար է ԱԲ×½ՍՑ արտադրելոյն · ուրեմն բոլոր եռանկեանց մակերեսներուն գումարը, կամ բուրգին կողմնակի մակերեւոյթը, հաւասար է (ԱԲ+ԲԳ+ԳԴ+ԴԵ+ԵԱ)×½ՍՑ արտադրելոյն:

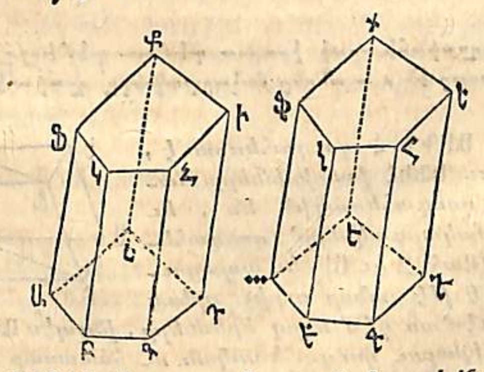
Հետ. Ուղիղ հատեալ բուրգի մը կողմնակի մակերեւոյ-

թը հաւասար է անոր խարսխաց շրջագծերուն կիսոյն, բազմապատկեալ անոր շեղեալ բարձրութեամբը:

Քանզի, որովհետեւ աբգդե կտրուածը խարիսխին նման է (Նախ. Գ.), եւ ԱԲԳԴԵ խարիսխը կանոնաւոր բազմանկիւն է (Սահ. 14), կը հետեւի թէ աբ, բգ, գդ, եւայլն իրարու հաւասար են · ուստի աԲ, բԳ, գԴ, եւայլն իրարու հաւասար տրապիզաձեւեր են, եւ իւրաքանչիւրին բարձրութիւնը հաւասար է ֆՑ գծին, կամ հատեալ բուրգին շեղեալ բարձրութեանը: Բայց իւրաքանչիւր տրապիզաձեւին մակերեսը հաւասար է ½(ԵԱ+եա)×Ցֆ արտադրելոյն (Գիրք Դ. Նախ. Է.) · ուրեմն ամենուն մակերեսը, այսինքն հատեալ բուրգին մակերեւոյթը, հաւասար է երկու խարսխաց շրջագծերուն կիսոյն, բազմապատկեալ շեղեալ բարձրութեամբ:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ հատուածակողման որեւէ մէկ մարմնոյ անկիւնը կազմող երեք երեսները ուրիշ հատուածակողման մէկ մարմնոյ անկիւնը կազմող երեք երեսաց հաւասար են, և հաւասար եղող երեսները նման դիրք ունին, հատուածակողմերն իրարու հաւասար են:



Եթէ ԱԲԳԴԵ հաւասար է աբգդե խարսխին, ԱԲԿՑ՝ աբկֆ զուգահեռագծին, եւ ԲԳՀԿ՝ բգհկ զուգահեռա-

գծին, ԱԲԳԴԵ–Թ հատուածակողմը հաւասար է աբգդե–թ հատուածակողման։

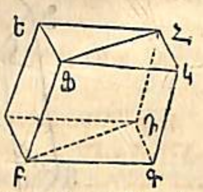
Քանզի, եթէ ԱԲԳԴԵ խարիսխը անոր հաւասար եղող աբգդե խարսխին վրայ դրուի, անոնք պիտի զուգընթանան. եւ, որովհետեւ Բ մարմնոյ անկիւնը հաւասար է բ մարմնոյ անկեան (Գիրք Զ. Նախ. ԻԱ. Պար. 2), ԲԿ անոր հաւասար եղող բկ ի վրայ պիտի իյնայ, եւ ԲԳ ու ԲԱ՝ բգ եւ բա ի վրայ. բայց, որովհետեւ ԲՖ եւ ԲՀ երեսները հաւասար են բֆ եւ բհ երեսներուն, ԿՖ եւ ԿՀ պիտի իյնան կֆ ու կհ ի վրայ, եւ հատուածակողմերուն վերի խարիսխները զուգընթաց պիտի ըլլան. ուրեմն ոչ միայն խարիսխները՝ այլեւ բոլոր երեսները զուգընթաց պիտի ըլլան. ուրեմն հատուածակողմերը հաւասար են։

Հետ. Հաւասար խարիսխ և հաւասար բարձրութիւն ունեցող հատուածակողմեր իրարու հաւասար են։

Քանզի, եթէ ԱԲ=աբ, եւ ԲԿ=բկ, ԱԲԿՖ=աբկֆ ուղղանկիւնին, նաեւ ԲԳՀԿ=բգհկ ուղղանկիւնին. ուստի Բ=բ մարմնոյ անկեան. ուրեմն հատուածակողմերը հաւասար են։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամեն զուգահեռանիստի իրարու դէմ առ դէմ եղող երեսները հաւասար են, և անոնց մակարդակները՝ զուգահեռական։



Եթէ ԱԲԳԴ–Հ զուգահեռանիստ է, ԱԲԳԴ եւ ԵՖԿՀ խարիսխները հաւասար զուգահեռագիծ են, եւ անոնց մակարդակները՝ զուգահեռական (Սահ. 2 եւ 6). եւ ապացուցանելու է թէ անոր ուրիշ որեւէ երկու դէմ առ դէմ եղող երեսները, ինչպէս ԱԵՀԴ եւ ԲՖԿԳ, իրարու զուգահեռական ու հաւասար են։

Որովհետեւ ԱԲԳԴ զուգահեռագիծ է, ԱԴ եւ ԲԳ հաւասար ու զուգահեռական են. ԱԵ եւ ԲՖ ալ հաւասար ու զուգահեռական են. ուստի ԴԱԵ հաւասար է ԳԲՖ անկեան, եւ անոնց մակարդակները զուգահեռական են (Գիրք Զ. Նախ. ԺԳ.). ուրեմն ԴԱԵՀ եւ ԳԲՖԿ զուգահեռագծերը զուգահեռական ու հաւասար են։

Հետ. 1. Կը հետեւի թէ զուգահեռանիստի մը վեց երեսաց որեւէ երկուքը որ իրարու դէմ առ դէմ են՝ խարիսխ կրնան համարուիլ։

Հետ. 2. Զուգահեռանիստ մը շուրջ տրամանկիւնները մէկզմէկ երկու հաւասար մասանց կը բաժնեն։

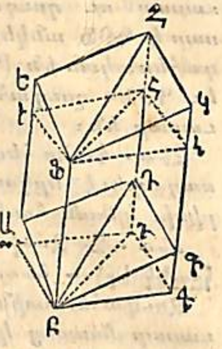
Զուգահեռանիստին ԲՀ եւ ՖԴ տրամանկիւնք իրար հաւասար մասանց կը բաժնեն, քանզի անոնք ԲԴՀՖ զուգահեռագծին տրամանկիւններն են (Գիրք Ա. Նախ. ԼԱ.). նաեւ ԵԳ ու ՖԴ տրամանկիւնք իրար հաւասար մասանց կը կտրեն, քանզի ԵՖԳԴ զուգահեռագծին տրամանկիւններն են. նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ ԱԿ ու ՖԴ իրար հաւասար մասանց կը բաժնեն. ուրեմն այն չորս տրամանկիւնները հասարակաց կէտ մը ունին որ զուգահեռանիստին կեդրոնը կրնայ համարուիլ։

Պար. Եթէ Ա կէտէն քաշուած ԱԲ, ԱԵ եւ ԱԴ գծերը, եւ անոնց իրարու հետ կազմած անկիւնները ծանօթ են, այն գծից վրայ զուգահեռանիստ մը գծելու համար, Բ կէտէն՝ ԴԱԵ ին, Ե կէտէն՝ ԲԱԴ ին, եւ Դ կէտէն ԲԱԵ ին զուգահեռական մակարդակ անցուր. այս բոլոր մակարդակները իրար կտրելով զուգահեռանիստ մը պիտի գծեն։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ մակարդակ մը զուգահեռանիստ մը որեւէ երկու տրամանկիւնային ծայրերէն կ'անցնի, զուգահեռանիստը երկու իրարու համաչափ հատուածակողմանց կը բաժնուի։

Եթէ ԱԲԳԴ–Հ զուգահեռատ է, անոր ԲՑ և ԴՀ տրամանկիւնային ծայրերուն վրայէն անցնող մակարդակը կը բաժնէ զուգահեռատը ԲԱԴ–Հ և ԲԳԴ–Հ հատուածակողմանց, որոնք իրարու համազօր են ։



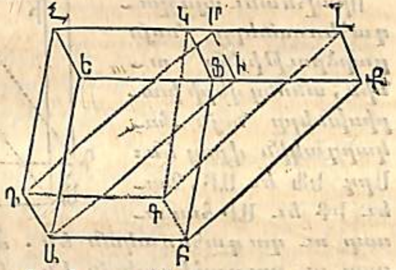
Բ ու Ց կէտերէն ԲՑ ծայրին ուղղահայեաց Բադէ և Ցէհէ մակարդակները անցուր, և ԱԵ, ԴՀ, և ԳԿ ծայրերը երկնցուր մինչև Բադէ մակարդակը կտրեն ։ Բադէ և Ցէհէ կտրուածները հաւասար են (Նախ. Բ.) ․ նաև զուգահեռագիծ են, քանզի աԲ ու էդ, և ադ ու Բէ զուգահեռական են (Գիրք Զ. Նախ. Ժ.) ։ Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ ԲաէՑ, ԲՑհէ, էդհէ, և ադհէ զուգահեռագիծ են․ ուստի Բադէ–հ ուղիղ հատուածակողմ է (Սահ. 4) ․ ուրեմն Բադ–հ և Բէդ–հ եռանկիւնի ուղիղ հատուածակողմերը, հաւասար խարիսխ, Բդա ու Բդէ, և նոյն բարձրութիւնը, ԲՑ, ունենալով, իրարու հաւասար են (Նախ. Ե. Հետ.) ։

Որովհետև ԱԲՑԵ և աԲՑէ զուգահեռագիծ են, ԱԵ=աէ․ և անոնց հասարակաց մասը, Աէ, հանելով կ՚ունենանք աԱ=էԵ ։ Նոյն կերպով կրնանք ցուցնել թէ դԴ=հՀ ։ Եթէ ՑէԵհՀ բազմանիստը ԲաԱդԴ բազմանիստին վրայ դրուի, որովհետև անոնց խարիսխները, Բադ և Ցէհ, հաւասար են, և Աա, Դդ, Եէ և Հհ ծայրերը խարսխաց ուղղահայեաց են, Եէ ու Հհ՝ Աա ու Դդ ի հետ զուգընթաց պիտի ըլլան․ ուրեմն այս բազմանիստերը իրարու հաւասար են․ և, եթէ իւրաքանչիւրին՝ ԱԲԴ–հ աւելցընենք, յայտնի է թէ ԲԱԴ–Հ և Բադ–հ համազօր են ։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ ԲԳԴ–Հ և Բէդ–հ համազօր են ։ Բայց արդէն ապացուցուեցաւ թէ Բադ–հ և Բէդ–հ համազօր են․ ուրեմն ԲԱԴ–Հ և ԲԳԴ–Հ իրարու համազօր են ։

Հետ. Երբ եռանկիւնի հատուածակողմ մը, ինչպէս ԴԱԲ–ՀԵՑ, և զուգահեռատ մը, ինչպէս ԱԿ, հասարակաց մարմնոյ անկիւն մը ունին, ինչպէս Ա, և հասարակաց ծայրեր, ինչպէս ԱԲ, ԱԴ և ԱԵ, հատուածակողմը զուգահեռատին կէսն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու զուգահեռանիստերու վարի խարիսխը հասարակաց է, և անոնց վերի խարիսխները միևնոյն մակարդակին վրայ, և միևնոյն զուգահեռական գծերուն մէջտեղը են, զուգահեռանիստերն իրարու համազօր են ։



ԱԿ և ԱԼ զուգահեռատները, որոնց վարի խարիսխը, ԱԲԳԴ, հասարակաց է, և վերի խարիսխները, ԵԿ և ՄՔ, միևնոյն մակարդակին վրայ եղող ՀԼ ու ԵՔ զուգահեռական գծերուն մէջտեղը կ՚իյնան, իրարու համազօր են ։

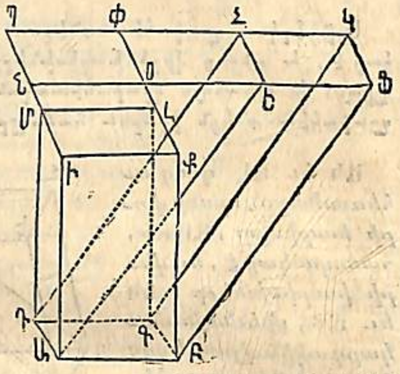
Որովհետև ԱԵ և ԲՑ, նաև ՀԵ ու ԿՑ զուգահեռական են, ԱԵԻ=ԲՑՔ անկեան, ՀԵԻ=ԿՑՔ անկեան, և ՀԵԱ=ԿՑԲ անկեան ։

Նաև, ԵՑ=ԻՔ, քանզի իւրաքանչիւրը հաւասար է ԱԲ գծին․ ուստի ԵՑ+ՑԻ=ՑԻ+ԻՔ, կամ ԵԻ=ՑՔ․ ուրեմն ԱԵԻ=ԲՑՔ եռանկեան (Գիրք Ա. Նախ. Ե.), և ԵՄ=ՑԼ զուգահեռագծին ։ Բայց ԱՀ=ԳՑ զուգահեռագծին (Նախ. Զ.) ․ ուրեմն Ե մարմնոյ անկիւնը հաւասար է Ց մարմնոյ անկեան, և (Նախ. Ե.) ԱԵԻ–Մ եռանկիւնի հատուածակողմը հաւասար է ԲՑՔ–Լ եռանկիւնի հատուածակողման ։

ԱԲՔԵ–Հ բազմանիստէն հանէ ԱԵԻ–Մ հատուածակողմը, ԱԼ զուգահեռատը կը մնայ․ նոյն բազմանիստէն հանէ ԲՑՔ–Լ հատուածակողմը, ԱԿ զուգահեռատը կը մնայ․ ուրեմն ԱԿ և ԱԼ զուգահեռատներն իրարու համազօր են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու զուգահեռանիստներ նոյն խարիսխն ու նոյն բարձրութիւնն ունին, իրարու համազօր են :

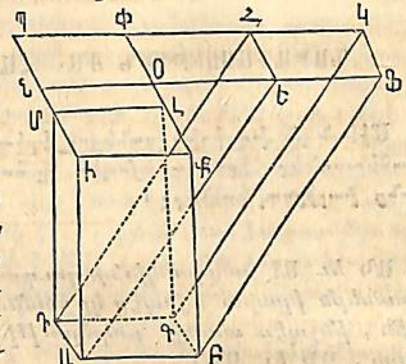


Եթէ ԱԲԳԴ խարիսխը ունեցող ԱԼ եւ ԱԿ զուգահեռանիստները նոյն բարձրութիւնն ունին, անոնք համազօր են :

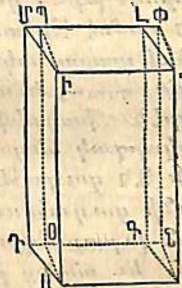
Որովհետեւ այս զուգահեռանիստները նոյն բարձրութիւնն ունին, անոնց վերի խարիսխները նոյն մակարդակին վրայ են: Արդ ՆՑ եւ ԱԲ, նաեւ ԻՔ եւ ԱԲ հաւասար ու զուգահեռական են. ուստի ՆՑ եւ ԻՔ հաւասար ու զուգահեռական են. եւ նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ ԿՑ եւ ԼՔ հաւասար ու զուգահեռական են: Երկնցուր ԿՀ, ՑՆ, ՔԼ եւ ԻՄ գծերը մինչեւ իրար կտրելով ՛ՆՕՓՊ զուգահեռագիծը կազմեն. յայտնի է թէ այս զուգահեռագիծը հաւասար է թէ ՆԿ եւ թէ ԻԼ զուգահեռագծին: Եթէ ԱԳ եւ ՆՓ խարիսխներն ունեցող երրորդ զուգահեռանիստ մը գծուի, այն զուգահեռանիստը համազօր պիտի ըլլայ թէ ԱԼ եւ թէ ԱԿ զուգահեռանիստին (Նախ. Ը.). ուրեմն ԱԼ եւ ԱԿ զուգահեռանիստները համազօր են :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ խոտորնակ զուգահեռանիստ մը համազօր ուղղանկիւնի զուգահեռանիստ մը կրնայ գծուիլ, որուն խարիսխը խոտորնակ զուգահեռանիստին խարիսխին համազօր, եւ բարձրութիւնը անոր բարձրութեանը հաւասար ըլլայ :

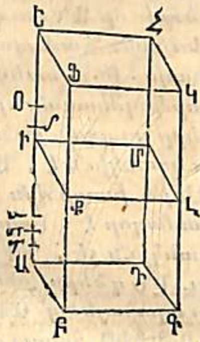


ԱԿ խոտորնակ զուգահեռանիստին խարիսխի կէտերէն, Ա,Բ,Գ,Դ, խարիսխին ուղղահայեաց ԱԻ,ԲՔ,ԳԼ,եւ ԴՄ գծերը քաշէ մինչեւ ՆՑԿՀ վերի խարիսխին մակարդակը. այսպէս ԱԼ զուգահեռանիստը կը գծուի որ ԱԿ զուգահեռանիստին համազօր է (Նախ. Թ.): Նաեւ անոր կողմնական երեսները ուղղանկիւն են: Ուրեմն, եթէ ԱԲԳԴ խարիսխը ուղղանկիւն է, ԱԼ՝ ուղղանկիւնի զուգահեռանիստ է, որ ԱԿ ին խարիսխն ու բարձրութիւնն ունի, եւ անոր համազօր է: Բայց, եթէ ԱԲԳԴ ուղղանկիւն չէ ; ԳԴ ին ուղղահայեաց ԱՕ եւ ԲՆ գծերը քաշէ, նաեւ խարիսխին ուղղահայեաց՝ ՕՊ եւ ՆՓ գծերը: ԱԲՆՕ–ԻՔՓՊ հատուածակողմը ուղղանկիւնի զուգահեռանիստ է. քանզի ԱԲՆՕ եւ ԻՔՓՊ խարիսխները, նաեւ ԱՔ, ԲՓ, ՆՊ, եւայլն կողմնական երեսները ուղղանկիւն են: Բայց ԱՓ եւ ԱԼ զուգահեռանիստներուն հասարակաց երեսը, ԱԲՔԻ, անոնց խարիսխը կրնայ համարուիլ, եւ ԱՕ՝ անոնց բարձրութիւնը (Նախ. Զ. Հետ. Ա.). ուստի այս զուգահեռանիստները իրարու համազօր են (Նախ. Թ.). ուրեմն ԱԼ ուղղանկիւնի զուգահեռանիստը ԱԿ խոտորնակ զուգահեռանիստին համազօր է. նաեւ անոնց խարիսխները համազօր, եւ անոնց բարձրութիւնները՝ հաւասար են :



ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն խարիսխն ունեցող երկու ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները։



ԱԿ եւ ԱԼ ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները, ԱԵ եւ ԱԻ։

Նախ․ Ենթադրենք թէ ԱԵ եւ ԱԻ հասարակաց չափ ունին, եւ իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս երկու ամբողջ թիւ, զորօրինակ, 15 եւ 8։ ԱԵ բաժնէ 15 հաւասար մասանց․ ԱԻ պիտի պարունակէ անոնցմէ 8 հատը․ Նաեւ ս,օ,ո, եւայլն բաժանման կէտերէն խարսխին զուգահեռական մակարդակ անցուր։ Այս մակարդակները պիտի բաժնեն ԱԿ զուգահեռանիստը 15 իրարու հաւասար ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներու, քանզի անոնց խարիսխներուն իւրաքանչիւրը հաւասար է ԱԳ խարսխին (Նախ․ Բ․), եւ անոնց բարձրութիւններն իրարու հաւասար են։ Բայց, որովհետեւ այս 15 զուգահեռանիստներէն 8 հատը ԱԼ ի մէջ են, ԱԿ։ԱԼ։։15։8․ այսինքն, զուգահեռանիստներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները։

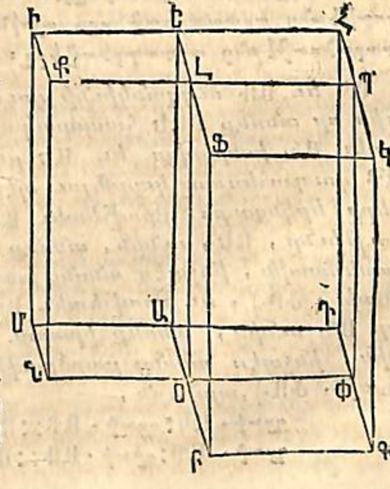
Երկրորդ․ Եթէ բարձրութիւնները հասարակաց չափ չունին, բայցեւայնպէս զուգ․ ԱԿ։զուգ․ ԱԼ։։ԱԵ։ԱԻ։

Քանզի, եթէ այս համեմատութիւնը ճիշդ չէ, ենթադրենք թէ զուգ․ ԱԿ։զուգ․ ԱԼ։։ԱԵ։ԱՕ։ Բաժնէ ԱԵ քանի մը հաւասար մասանց որոնց իւրաքանչիւրը ՕԻ էն փոքր ըլլայ․ բաժանման կէտերէն գոնէ մէկը, ինչպէս Տ, Օ եւ Ի կէտերուն մէջտեղ պիտի իյնայ․ եթէ ԱԲԳԴ խարիսխը եւ ԱՏ բարձրութիւնն ունեցող զուգահեռանիստը Փ ով ցուցընենք, կ'ունենանք զուգ․ ԱԿ։զուգ․ Փ։։ԱԵ։ԱՏ․ քանզի այս բարձրութիւնները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս երկու ամբողջ թիւ։ Բայց ենթադրութեամբ զուգ․ ԱԿ։զուգ․ ԱԼ։։ԱԵ։ԱՕ․ ուստի զուգ․ ԱԼ։զուգ․ Փ։։ԱՕ։ԱՏ։ Բայց ԱՕ մեծ է ԱՏ էն․ ուստի, եթէ այս համեմատութիւնը ճիշդ է, զուգ․ ԱԼ մեծ է զուգ․ Փ էն, բայց ընդհակառակն պզտիկ է․ ուրեմն համեմատութիւնը ճիշդ չէ, եւ յայտնի է թէ զուգ․ ԱԿ եւ զուգ․ ԱԼ իրարու չեն կրնար այնպէս համեմատիլ, ինչպէս ԱԵ՝ ԱԻ էն մեծ եղող որեւէ գծի մը։

Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ համեմատութեան չորրորդ եզրը՝ ԱԻ էն պզտիկ չի կրնար ըլլալ․ ուրեմն զուգ․ ԱԿ։զուգ․ ԱԼ։։ԱԵ։ԱԻ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Միեւնոյն բարձրութիւնն ունեցող երկու ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները։



Եթէ ԱԿ եւ ԱՔ ուղղանկիւնի զուգահեռանիստները նոյն բարձրութիւնն ունին, անտարեն զուգ․ ԱԿ։զուգ․ ԱՔ։։ԱԲԳԴ։ԱՄՆՕ։

Երկու զուգահեռանիստները իրարու քով դիր այնպէս որ ՄԱ եւ ԱԴ ուղիղ գիծ մը կազմեն, եւ ԱՕ ԱԲ ին հետ զուգընթաց ըլլայ․ Նաեւ ՕՆՔԼ մակարդակը երկնցուր մինչեւ ԳԴՀԿ մակարդակը կտրէ ՓՊ գծին վրայ, ԱՊ զու-

զուգահեռանիստը կազմելով։ Որովհետեւ ԱԿ եւ ԱՊ զուգահեռանիստները նոյն խարիսխը, ԱԵՀԴ, ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԱԲ եւ ԱՕ (Նախ. ԺԱ.). նաեւ, որովհետեւ ԱՊ եւ ԱՔ նոյն խարիսխը, ԱՕԼԵ, ունին, անոնք իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԱԴ ու ԱՄ. այսինքն,

զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՊ :: ԱԲ : ԱՕ,

եւ զուգ. ԱՊ : զուգ. ԱՔ :: ԱԴ : ԱՄ։

Այս երկու կարգ համեմատութեանց մէկուն առաջին եզրը միւսին առաջին եզրովը, երկրորդը՝ երկրորդովը, եւայլն բազմապատկելով (Գիրք Բ. Նախ. ԺԳ.), եւ զուգ. ԱՊ, թէ նախադասին եւ թէ յետադասին բազմապատկիչ ըլլալուն համար, զանց ընելով, կ'ունենանք զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՔ :: ԱԴ×ԱԲ : ԱՕ×ԱՄ։

Բայց ԱԴ×ԱԲ արտադրեալը ԱԲԳԴ մակերեսն է, եւ ԱՕ×ԱՄ՝ ԱՄՆՕ մակերեսը (Գիրք Դ. Նախ. Դ. Պար. 1). ուրեմն զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՔ :: ԱԲԳԴ : ԱՄՆՕ։

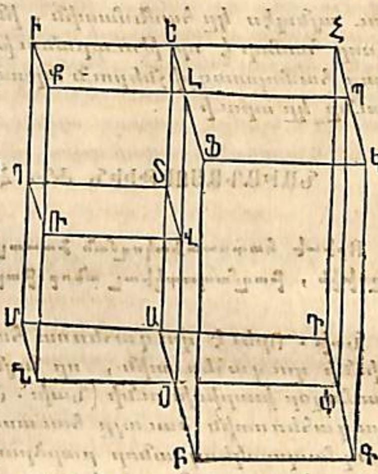
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ երկու ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխաց ու բարձրութեանց արտադրեալները, այսինքն, ինչպէս անոնց երեք տարածութեանց արտադրեալները։

ԱԿ եւ ԱՌ ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներն այնպէս դիր որ անոնք ԲԱԵ հասարակաց անկիւնը ունենան. նաեւ ԱՆ խարիսխը եւ ԱԵ բարձրութիւնն ունեցող ԱՔ զուգահեռանիստը կազմելու պէտք եղած մակարդակները երկնցուր։ Որովհետեւ ԱԿ եւ ԱՔ նոյն բարձրութիւնը, ԱԵ, ունին, անոնք իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները, ԱԳ եւ ԱՆ (Նախ. ԺԲ.). եւ որովհետեւ ԱՔ եւ ԱՌ նոյն խարիսխը ԱՆ ունին, անոնք իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները, ԱԵ եւ ԱՏ (Նախ. ԺԱ.), այսինքն,

զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՔ :: ԱԲԳԴ : ԱՄՆՕ,

եւ զուգ. ԱՔ : զուգ. ԱՌ :: ԱԵ : ԱՏ։



Ուստի բազմապատկելով եւ հասարակաց բազմապատկիչը, զուգ. ԱՔ, զանց ընելով կ'ունենանք զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՌ :: ԱԲԳԴ×ԱԵ : ԱՄՆՕ×ԱՏ։

Եթէ ԱԲԳԴ եւ ԱՄՆՕ խարիսխներուն տեղ ԱԲ×ԱԴ եւ ԱՕ×ԱՄ դնենք, կ'ունենանք զուգ. ԱԿ : զուգ. ԱՌ :: ԱԲ×ԱԴ×ԱԵ : ԱՕ×ԱՄ×ԱՏ. ուրեմն որեւէ երկու ուղղանկիւնի զուգահեռանիստներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց երեք տարածութեանց արտադրեալները։

Պար. 1. Եթէ ԱՕ՝ գծային միութիւն համարինք, եւ ԱՄ=ԱՕ, ԱՄ×ԱՕ՝ մակերեւութական միութիւն է (Գիրք Դ. Նախ. Դ.). նաեւ, եթէ ԱՏ=ԱՕ, ԱՕ×ԱՄ×ԱՏ=1։ ԱՄՆՕ-Տ զուգահեռանիստը ծաւալի միութիւն կը կոչուի, եւ, որովհետեւ ԱՕ×ԱՄ×ԱՏ արտադրելոյն թիւը՝ ԱՄՆՕ-Տ զուգահեռանիստին ծաւալի միութեանց թուոյն հաւասար է, յայտնի է թէ ԱԲ×ԱԴ×ԱԵ արտադրեալը եւ ԱԿ զուգահեռանիստը ծաւալի միութեանց հաւասար թիւ ունին. ուրեմն ուղղանկիւնի զուգահեռանիստի մը ծաւալը հաւասար է անոր երեք տարածութեանց արտադրելոյն։

Պար. 2. Որովհետեւ խորանարդին երեք տարածութիւններն իրարու հաւասար են, երբ անոր կողմը 1 է, անոր ծաւալը $1\times1\times1=1$ կ'ըլլայ. երբ կողմը 2 է, ծաւալը $2\times2\times2=8$ կ'ըլլայ. երբ կողմը 3 է, ծաւալը $3\times3\times3=27$ կ'ըլլայ, եւայլն. ուրեմն, եթէ կարգ մը խորանարդներուն կողմերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս 1,2,3, եւայլն, խորանարդները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս 1,8,27, եւայլն : Ասոր համար է որ թուաբանութեան մէջ երեք հաւասար համարտադրիչներուն արտադրելոյն խորանարդ անունը կը տրուի :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ հատուածակողման ծաւալը հաւասար է անոր խարիսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը :

Նախ. Որեւէ զուգահեռատ համազօր է այն ուղղանկիւնի զուգահեռատին, որ նոյն բարձրութիւնը, եւ համազօր խարիսխ ունի (Նախ. Ժ.). բայց ուղղանկիւնի զուգահեռատին ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը (Նախ. ԺԳ. Պար. 1). ուրեմն որեւէ զուգահեռատի ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը :

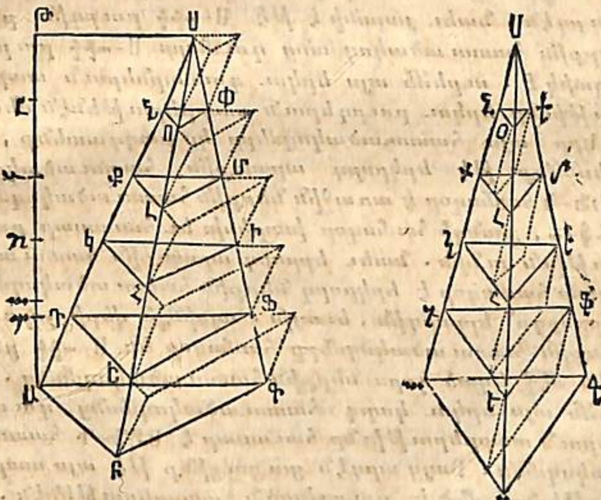
Երկրորդ. Որովհետեւ ամէն եռանկիւնի հատուածակողմ՝ նոյն բարձրութիւնը եւ կրկնապատիկ խարիսխը ունեցող զուգահեռատին կէսն է (Նախ. Է.), յայտնի է թէ եռանկիւնի հատուածակողման ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը :

Երրորդ. Որովհետեւ տրամանկիւններ քաշելով կրնանք որեւէ հատուածակողման խարիսխը քանի մը եռանկեանց բաժնել, յայտնի է թէ այն տրամանկիւններուն եւ հատուածակողման ծայրերուն վրայէն մակարդակ անցընելով կրնանք հատուածակողմը բաժնել եռանկեանց թուոյն չափ եռանկիւնի հատուածակողմանց. նաեւ բոլոր եռանկիւնի հատուածակողմանց ծաւալը հաւասար է անոնց խարսխաց, բազմապատկեալ անոնց բարձրութեամբը. ուրեմն ամէն հատուածակողման ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը :

Հետ. Նոյն բարձրութիւնն ունեցող հատուածակողմեր իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները. նաեւ նոյն խարիսխն ունեցող հատուածակողմեր իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները. եւ որեւէ երկու հատուածակողմանց ծաւալները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարսխաց ու բարձրութեանց արտադրեալները :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնի բուրգ որ հաւասար բարձրութիւն ու համազօր խարիսխ ունին, համազօր են, կամ հաւասար ծաւալ ունին :



Եթէ ԱԹ բարձրութիւնն ունեցող Ս–ԱԲԳ եւ Ս–աբգ բուրգերուն խարիսխները համազօր են, բուրգերն ալ համազօր են, կամ հաւասար ծաւալ ունին :

Եթէ համազօր չեն, ենթադրենք թէ Ս–աբգ պզտիկ է, եւ անոնց տարբերութիւնը հաւասար է ԱԲԳ խարիսխը եւ Աա բարձրութիւնը ունեցող հատուածակողման ։

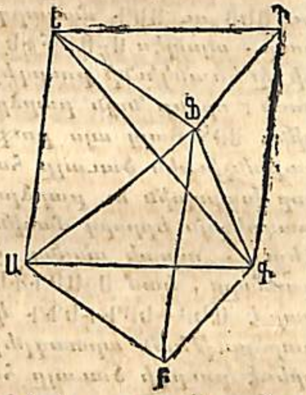
Բուրգերը նոյն մակարդակին վրայ դիր, եւ ԱԹ բարձրութիւնը բաժնէ քանի մը հաւասար մասանց, ինչպէս Աա, աբ, բգ եւայլն, որոնց իւրաքանչիւրը Աա էն փոքր ըլլայ. նաեւ բաժանման կէտերէն, ա,բ,գ եւայլն, խարսխին զուգահեռական մակարդակներ անցուր. անոնց կտրուածներէն ԴԵՖ հաւասար է դեֆ ին, ԿՀԻ՝ կհի ին, եւայլն (Նախ. Գ. Հետ. 2)։ Յետոյ ԱԲԳ, ԴԵՖ, ԿՀԻ եւայլն խարիսխներուն վրայ, ԱԴ, ԴԿ, ԿԹ եւայլն ծայրերը ունեցող արտաքին հատուածակողմերը գծէ. նաեւ դեֆ, կհի, լմն եւայլն խարիսխներուն վրայ ադ, դկ, կլ եւայլն ծայրերը ունեցող ներքին հատուածակողմերը գծէ ։ Յայտնի է թէ Ս–ԱԲԳ բուրգին բոլոր արտաքին հատուածակողմանց գումարը մեծ է Ս–ԱԲԳ բուրգէն. նաեւ յայտնի է թէ Ս–աբգ բուրգին բոլոր ներքին հատուածակողմանց գումարը Ս–աբգ բուրգէն պզտիկ է. ուրեմն այս երկու գումարներուն տարբերութիւնը երկու բուրգերուն տարբերութենէն մեծ է։

Երբ այս հատուածակողմերը կը բաղդատենք, կը տեսնենք թէ երկրորդ արտաքին հատուածակողմը ԴԵՖ–Կ համազօր է առաջին ներքին հատուածակողման, դեֆ–ա, քանզի համազօր խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն ունին. նաեւ երրորդ արտաքին հատուածակողմը համազօր է երկրորդ ներքին հատուածակողման, չորրորդը՝ երրորդին, եւայլն. այսինքն վերի չորս արտաքին հատուածակողմերը համազօր են Ս–աբգ բուրգին մէջ եղած չորս ներքին հատուածակողմանց. ուրեմն այս երկու կարգ հատուածակողմանց գումարներուն տարբերութիւնը հաւասար է ԱԲԳ–Դ հատուածակողման ։ Բայց արդէն ցուցուցինք թէ այս տարբերութիւնը մեծ է բուրգերուն տարբերութենէն. եւ ենթադրեցինք թէ այս վերջին տարբերութիւնը հաւասար է ԱԲԳ–ա հատուածակողման. ուստի ԱԲԳ–Դ մեծ ըլլալու է ԱԲԳ–ա էն. բայց ընդհակառակն փոքր է, քանզի անոնց խարիսխը, ԱԲԳ, նոյն է, այլ Աա բարձրութիւնը մեծ է Աղ բարձրութենէն. ուստի կարելի

չէ որ բուրգերուն ծաւալներուն մէկը միւսէն մեծ ըլլայ. ուրեմն հաւասար բարձրութիւն ու համազօր խարիսխ ունեցող որեւէ երկու եռանկիւնի բուրգերը իրարու համազօր են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ եռանկիւնի բուրգ մը և եռանկիւնի հատուածակողմ մը նոյն խարիսխը և նոյն բարձրութիւնն ունին, բուրգը հատուածակողման երրորդ մասին համազօր է ։



Եթէ Ֆ–ԱԲԳ բուրգը եւ ԱԲԳ–ԵՖԴ հատուածակողմը նոյն բարձրութիւնն ունին, բուրգին ծաւալը հատուածակողման ծաւալին երրորդ մասն է ։

ՖԱԳ մակարդակը անցնելով Ֆ–ԱԲԳ բուրգը կտրէ հանէ հատուածակողմէն. Ֆ գագաթը ունեցող Ֆ-ԱԳԴԵ քառանկիւնի բուրգը կը մնայ ։ ԵԳ տրամանկիւնը քաշէ, եւ ՖԵԳ մակարդակը անցուր, Ֆ-ԱԵԳ եւ Ֆ–ԴԵԳ եռանկիւնի բուրգերը կազմելով ։ Այս երկու բուրգերը հաւասար խարիսխ ունին, ԱԵԳ ու ԴԵԳ, քանզի իւրաքանչիւրը ԱԳԴԵ զուգահեռագծին կէսն է. նաեւ նոյն բարձրութիւնն ունին, քանզի Ֆ գագաթը հասարակաց է. ուստի համազօր են (Նախ. ԺԵ.) ։ Բայց Ֆ-ԳԴԵ եւ Ֆ-ԱԲԳ հաւասար խարիսխներ ունին; ԱԲԳ եւ ԵՖԴ. նաեւ նոյն բարձրութիւնը, այսինքն ԱԲԳ եւ ԵՖԴ մակարդակաց մէկէն միւսին ուղղահայեաց քաշուած գիծը. ուստի համազօր են ։ Ուրեմն ԱԲԳ–ԴԵՖ հատուածակողմը կազմող երեք բուրգերը, Ֆ-ԱԲԳ, Ֆ-ԳԴԵ եւ Ֆ-ԱԳԵ, իրարու համազօր են, եւ Ֆ-ԱԲԳ՝ ԱԲԳ-ԴԵՖ հատուածակողման երրորդ մասն է ։

Հետ․ Եռանկիւնի բուրգի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին ու բարձրութեան արտադրելոյն երրորդ մասին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ բուրգի ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին եւ բարձրութեան արտադրելոյն երրորդ մասին։

Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգին խարսխին վրայ ԵԲ եւ ԵԳ տրամանկիւնները քաշէ, եւ ՍԵԲ ու ՍԵԳ մակարդակները անցուր․ այսպէս Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգը քանի մը եռանկիւնի բուրգերու կը բաժնուի, որոնք նոյն բարձրութիւնն ունին, ՍՕ։ Բայց այս բուրգերուն իւրաքանչիւրին ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին ու բարձրութեան արտադրելոյն երրորդ մասին (Նախ․ ԺԶ․ Հետ․)․ ուստի անոնց ծաւալներուն գումարը, կամ Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգին ծաւալը, հաւասար է ԱԵԲ+ԵԲԳ+ԵԳԴ կամ ԱԲԳԴԵ խարսխին եւ ՍՕ բարձրութեան արտադրելոյն երրորդ մասին․ ուրեմն որեւէ բուրգի ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին եւ բարձրութեան արտադրելոյն երրորդ մասին։

Հետ․ 1․ Բուրգ մը նոյն խարիսխը եւ նոյն բարձրութիւնն ունեցող հատուածակողման երրորդ մասն է։

Հետ․ 2․ Երկու բուրգեր, որ նոյն բարձրութիւնն ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները։

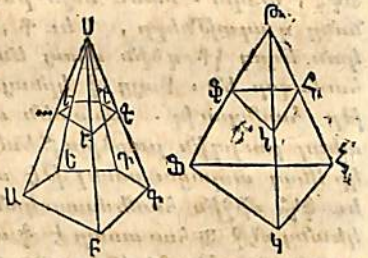
Հետ․ 3․ Երկու բուրգեր, որ համազօր խարիսխներ ունին, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները։

Հետ․ 4․ Բուրգեր իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարսխաց եւ բարձրութեանց արտադրեալները։

Գաղ․ Բազմանիստի մը ծաւալը գիտնալու համար, նախ, բաժնէ բազմանիստը քանի մը բուրգերու, անոր որեւէ մարմնոյ անկեան գագաթէն մակարդակներ անցընելով։ Յայտնի է թէ մարմնոյ անկիւնը կազմող երեսներէն զատ, բազմանիստին ամէն երեսը մէյմէկ բուրգի խարիսխ կ'ըլլայ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԸ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

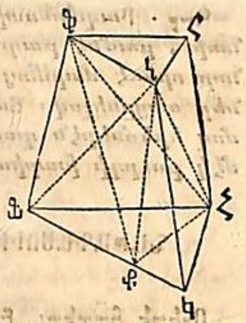
Որեւէ հատեալ բուրգի մը ծաւալը հաւասար է երեք բուրգերու ծաւալներուն գումարին, որոնց երեքանչիւրին բարձրութիւնը հաւասար է հատեալ բուրգին բարձրութեանը, և առաջնոյն խարիսխը հատեալ բուրգին վերի խարիսխն է, երկրորդինը՝ անոր վարի խարիսխը, և երրորդինը՝ այն վերի և վարի խարսխոց միջին համեմատականը։



Եթէ նոյն մակարդակին վրայ եղող Ս-ԱԲԳԴԵ եւ Թ-ՑԿՀ բուրգերը համազօր խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւնն ունին, եւ խարիսխներուն զուգահեռական մակարդակ մը, ինչպէս ադ, անցընենք, աբգդե եւ ֆչհ կտրուածները համազօր կ'ըլլան (Նախ․ Գ․ Հետ․ 2)․ ուստի Ս-աբգդե եւ Թ-ֆչհ բուրգերը համազօր են (Նախ․ ԺԵ․)․ նաեւ Ս-ԱԲԳԴԵ եւ Թ-ՑԿՀ բուրգերը համազօր են․ ուստի ԱԲԴ-աբդ եւ ՑԿՀ-ֆչհ հատեալ բուրգերը համազօր են․ ուրեմն, եթէ նախադասութիւնը կրնայ ապացուցուիլ եռանկիւնի հատեալ բուրգի մը նկատմամբ, ճշմարիտ է որեւէ հատեալ բուրգի նկատմամբ։

ՑԿՀ-ֆչհ եռանկիւնի հատեալ բուրգին ՑՀ ծայրէն Ցչհ մակարդակը անցընելով չ-ՑԿՀ բուրգը կտրէ հանէ․ այս բուրգին խարիսխը հատեալ բուրգին խարսխին է․ նաեւ անոր բարձրութիւնը հաւասար է հա-

տեալ բուրգին բարձրութեանը, քանզի անոր գագաթը վերի խարսխին վրայ է ։



Այս բուրգը հանուելով կը մնայ Ղ գագաթը եւ ՖՀՃՑ խարսխին ունեցող Ղ–ՖՀՃՑ բուրգը. ՖՂՃ մակարդակը անցուր Ղ–ՑՖՃ եւ Ղ–ՖՀՃ բուրգերը գծելով ։ Այս վերջինը ՖՂՀ խարսխին ունի, այսինքն, հատեալ բուրգին վերի խարիսխը, նաեւ անոր բարձրութիւնը հատեալ բուրգին բարձրութեանը հաւասար է, քանզի Ճ գագաթը հատեալ բուրգին վարի խարսխին վրայ է ։

Երրորդ բուրգը, Ղ–ՑՖՃ, քննելու համար ՂՔ քաշէ ՖՑ գծին զուգահեռական ։ Եթէ ՑՖՃ խարիսխը եւ Ք գագաթն ունեցող նոր բուրգ մը մտօք ըմբռնենք, այս նոր բուրգը եւ Ղ–ՑՖՃ բուրգը նոյն խարիսխը, ՑՖՃ, ունին. նաեւ նոյն բարձրութիւնը, քանզի անոնց գագաթները, Ղ եւ Ք, խարսխին զուգահեռական եղող ՂՔ գծին վրայ են. ուրեմն այս բուրգերը համազօր են ։ Բայց Ֆ կրնայ Ք–ՑՖՃ բուրգին գագաթը համարուիլ. անատեն անոր բարձրութիւնը հատեալ բուրգին բարձրութեանը հաւասար կ'ըլլայ. եւ կը մնայ ապացուցանել թէ անոր ՑՔՃ խարիսխը, ՑԿՃ եւ ՖՂՀ միջին համեմատականն է ։ ՑՃՔ եւ ՖՂՀ եռանկեանց մէջ Ց հաւասար է Ֆ անկեան. ուստի ՑՃՔ:ՖՂՀ ::ՑՔ×ՑՃ:ՖՂ×ՖՀ (Գիրք Դ. Նախ. ԻԴ.). բայց, որովհետեւ ՖՑ եւ ՂՔ զուգահեռական են, ՖՂ=ՑՔ. ուստի

ՑՃՔ:ՖՂՀ::ՑՃ:ՖՀ ։

Նաեւ ՑՃԿ:ՑՃՔ::ՑԿ:ՑՔ *կամ* ՖՂ *(Գիրք Դ. Նախ. Զ. Հետ.). բայց, որովհետեւ ՑԿՃ եւ ՖՂՀ նման եռանկիւններ են,*

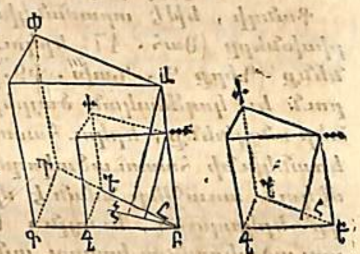
ՑԿ:ՖՂ::ՑՃ:ՖՀ.

ուստի ՑԿՃ:ՑՃՔ::ՑՃՔ:ՖՂՀ.

այսինքն, ՑՃՔ միջին համեմատականն է ՑԿՃ եւ ՖՂՀ խարսխաց. ուրեմն հատեալ բուրգի մը ծաւալը հաւասար է երեք բուրգերուն ծաւալներուն գումարին, որոնց իւրաքանչիւրին բարձրութիւնը հաւասար է հատեալ բուրգին բարձրութեանը, եւ որոնց առաջնոյն խարիսխը հատեալ բուրգին վերի խարիսխն է, երկրորդինը՝ անոր վարի խարիսխը, եւ երրորդինը՝ այն վերի եւ վարի խարսխաց միջին համեմատականը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Նման եռանկիւնի հատուածակողմանց ծաւալները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն ծայրերուն խորանարդները ։



Եթէ ԳԲԴ–Փ եւ գբդ–ֆ հատուածակողմները նման են, անոնց ծաւալները այնպէս կը համեմատին, ինչպէս ԲԴ³ եւ բդ³ ։

Որովհետեւ հատուածակողմերը իրարու նման են, Բ հաւասար է բ մարմնոյ անկեան (Սահ. 17, եւ Գիրք Զ. Նախ. ԻԱ. Պար. 2). ուստի, եթէ մէկը միւսին վրայ դրուի, անոնք պիտի զուգընթանան, եւ գ–բդֆ հատուածակողմը Բ-գդֆ դիրքը պիտի ունենայ ։ Աէն հատուածակողմանց հասարակաց խարսխին ուղղահայեաց ԱՀ քաշէ. ԲԱՀ մակարդակը ուղղահայեաց է ԲԳԴ մակարդակին (Գիրք Զ. Նախ. ԺԶ.) ։ ԲԱՀ մակարդակին վրայ ա կէտէն ահ քաշէ ԲՀ գծին ուղղահայեաց. ահ ալ ուղղահայեաց է ԲԳԴ խարսխին (Գիրք Զ. Նախ. ԺԷ.), եւ ԱՀ ու ահ՝ երկու հատուածակողմանց բարձրութիւններն են ։

Արդ, որովհետեւ ԱԲՀ եւ աբհ եռանկիւնները, նաեւ ԱԳ ու աֆ զուգահեռագիծները իրարու նման են,

ԱՀ:ահ::ԱԲ:աբ::ԲԳ:բգ ։

Բայց, որովհետեւ խարիսխները իրարու նման են,

խար. ԲԳԴ:խար. բգդ::ԲԳ²:բգ² *(Գիրք Դ. Նախ. ԻԵ.).*

ուստի խար. ԲԳԴ:խար. բգդ::ԱՀ²:ահ² ։

Նախադասները ԱՀ ով, եւ յետադասները ահ ով բազմապատկելով կ'ունենանք խոր․ ԲԳԴ×ԱՀ : խոր․ բգդ×ահ : : ԱՀ^3 : ահ^3 ։

Բայց առաջին նախադասը՝ ԲԳԴ-Փ հատուածակողման ծաւալն է, եւ առաջին յետադասը՝ բգդ-ֆ հատուածակողման ծաւալը (Նախ․ ժԴ․)․ ուրեմն եռանկիւնի հատուածակողմանց ծաւալներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն ծայրից խորանարդները ։

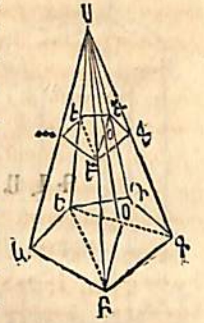
Հետ․ Որեւէ երկու նման երկու հատուածակողմերու ծաւալները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն ծայրից խորանարդները ։

Քանզի, եթէ տրամանկիւններ քաշելով նման խարիսխները (Սահ․ 17) երկու կարգ եռանկեանց բաժնենք (Գիրք Դ․ Նախ․ ԻԶ․), եւ այն տրամանկիւններուն եւ կողմնական ծայրերուն վրայէն մակարդակներ անցընենք, երկու հատուածակողմերը երկու կարգ եռանկիւնի հատուածակողմանց կը բաժնուին, որոնց մէկուն առաջինը նման է միւսին առաջնոյն, երկրորդը՝ երկրորդին, եւայլն ։ Բայց այս եռանկիւնի հատուածակողմերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն ծայրից խորանարդները․ եւ որովհետեւ այս ծայրերը համեմատական են բազմանկիւնի հատուածակողմանց ծայրերուն, եռանկիւնի հատուածակողմանց մէկ կարգը միւս կարգին այնպէս կը համեմատի ինչպէս բազմանկիւնի հատուածակողմանց համանուն ծայրից խորանարդները ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ի․ ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու իրարու նման բուրգեր իրարու այնպէս կը համեմատին ինչպէս անոնց համանուն ծայրից խորանարդները ։

Ս-աբգդե բուրգը անոր նման եղող Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգին վրայ այնպէս դիր որ Ս մարմնոյ անկիւնը հասարակաց ըլլայ․ բուրգերուն գագաթան անկիւնները պիտի զուգընթանան (Սահ․ 17)․ նաեւ անոնց խարիսխները իրարու զուգահեռական պիտի ըլլան․ քանզի, որովհետեւ համանուն երեսները նման են, Սաբ հաւասար է ՍԱԲ անկեան, եւ Սբգ՝ ՍԲԳ անկեան․ ուրեմն ԱԲԳ մակարդակը զուգահեռական է աբգ մակարդակին (Գիրք Զ․ Նախ․ ժԳ․) ։ Քաշէ ՍՕ գիծը ԱԲԳ մակարդակին ուղղահայեաց, կտրելով աբգ մակարդակը օ կէտին վրայ․ անատեն ՍՕ : Սօ : : ՍԱ : Սա : : ԱԲ : աբ (Նախ․ Գ․)․ ուստի $\frac{1}{3}$ՍՕ : $\frac{1}{3}$ Սօ : : ԱԲ : աբ ։ Բայց որովհետեւ խարիսխներն իրարու նման են,



ԱԲԳԴԵ : աբգդե : ԱԲ^2 : աբ^2 (Գիրք Դ․ Նախ․ ԻԷ․) ։ Երկու համեմատութիւնները բազմապատկելով, նախադասը՝ նախադասով եւայլն, կ'ունենանք

ԱԲԳԴԵ×$\frac{1}{3}$ՍՕ : աբգդե×$\frac{1}{3}$Սօ : : ԱԲ^3 : աբ^3 ։

Բայց առաջին նախադասը՝ Ս-ԱԲԳԴԵ բուրգին ծաւալն է, եւ առաջին յետադասը՝ Ս-աբգդե բուրգինը (Նախ․ ժԷ․)․ ուրեմն երկու իրարու նման բուրգեր իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց համանուն ծայրից խորանարդները ։

Ընդհանուր Պարապում․

Այս գրքին գլխաւոր նախադասութիւնները կրնանք համառօտ խօսքով ըսել ։

Ա․ Եթէ հատուածակողման խարիսխը՝ Խ ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, հատուածակողման ծաւալը կ'ըլլայ Բ×Խ արտադրեալը ։

Բ․ Եթէ բուրգի մը խարիսխը՝ Խ ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, բուրգին ծաւալը կ'ըլլայ Բ×$\frac{1}{3}$Խ, կամ Խ×$\frac{1}{3}$Բ, կամ $\frac{1}{3}$ԲԽ արտադրեալը ։

Գ․ Եթէ հատեալ բուրգի մը բարձրութիւնը՝ Բ ով, եւ անոր խարիսխները Ա եւ Գ ով ցուցընենք, անոր ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{1}{3}$Բ (Ա+Գ+$\sqrt{ԱԳ}$) ։

Դ․ Եթէ որեւէ իրարու նման երկու բազմանիստներու ծաւալները՝ Փ եւ ֆ ով, եւ անոնց որեւէ երկու համանուն ծայրերը Ա եւ ա ով ցուցընենք, կ'ունենանք

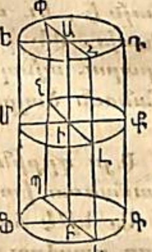
Փ : ֆ : : Ա^3 : ա^3 ։

ԳԻՐՔ Ը.

ԳԼԱՆ, ԿՈՆ ԵՒ ԳՈՒՆԴ

Սահմանք:

1. Երբ ուղղանկիւն մը, ինչպէս ԱԲԳԴ, անոր անշարժ ԱԲ կողման վրայ կը դառնայ, գծուած մարմինը գլան կը կոչուի:



Որովհետեւ ԱԴ եւ ԲԳ կողմերը այս շարժման մէջ ԱԲ գծին ուղղահայեաց են, անոնք երկու իրարու հաւասար բոլորակներ կը գծեն, ԴՀՓ եւ ԳԿՊ, որոնք գլանին խարիսխները կը կոչուին. նաեւ ԳԴ կողմը գլանին կողմնային մակերեւոյթը կը գծէ:

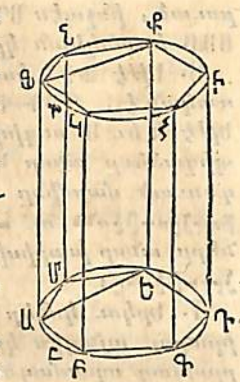
ԱԲ անշարժ գիծը գլանին առանցքը կը կոչուի:

Առանցքին ուղղահայեաց եղող ամէն կտրուած, ինչպէս ՔԼՄ, խարիսխին հաւասար բոլորակ մըն է. քանզի երբ ուղղանկիւնը կը դառնայ առանցքին վրայ, ԱԲ ին ուղղահայեաց եղող ՔԻ գիծը խարիսխին հաւասար բոլորակ մը կը գծէ, այսինքն ՔԼՄ կտրուածը:

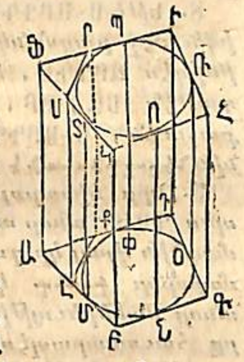
Ամէն կտրուած որ առանցքին վրայէն կ'անցնի, ինչպէս ՓՊԿ, ուղղանկիւն է, եւ ԱԲԳԴ ուղղանկիւնին կրկնապատիկն է:

2. Երկու գլան նման են, երբ անոնց առանցքներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխաց տրամագծերը:

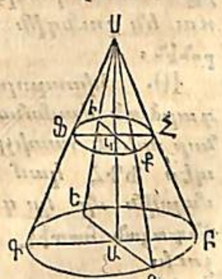
3. Եթէ գլանի մը խարիսխի շրջանակին մէջ բազմանկիւն մը գծուի, ինչպէս ԱԲԳԴԵ, եւ անոր վրայ գլանին բարձրութիւնն ունեցող ուղիղ հատուածակողմ մը գծուի, հատուածակողմը գլանին ներսը գծուած է, կամ գլանը հատուածակողմին շուրջը գծուած է կ'ըսուի: Յայտնի է թէ հատուածակողման ծայրերը, ԱՖ, ԲԿ, եւայլն գլանին կողմնային մակերեւոյթին վրայ են:



4. Նաեւ, եթէ ԱԲԳԴ՝ գլանի մը խարիսխին դուրսը գծուած բազմանկիւն է, անոր վրայ գլանին բարձրութիւնն ունեցող ուղիղ հատուածակողմը գլանին շուրջը գծուած է, եւ գլանը հատուածակողմին ներսը գծուած է կ'ըսուի: Եթէ Մ, Ն, եւայլն ԱԲ, ԲԳ, եւայլն կողմանց շօշափման կէտերն են, յայտնի է թէ ՄՏ, ՆՈ, եւայլն գծերը թէ գլանին եւ թէ հատուածակողման կողմնային մակերեւոյթներուն վրայ են:



5. Երբ ուղղանկիւն եռանկիւն մը, ինչպէս ՍԱԲ, անոր անշարժ ՍԱ կողման վրայ կը դառնայ, գծուած մարմինը կոն կը կոչուի:

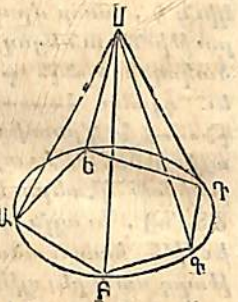


ԲԴԳԵ բոլորակը կոնին խարիսխը կը կոչուի, եւ ՍԲ հակուղիղին գծած երեսը՝ կոնին կողմնային մակերեւոյթը: Ս կէտը կոնին գագաթն է, ՍԱ՝ անոր բարձրութիւնը, եւ ՍԲ՝ անոր շեղեալ բարձրութիւնը:

Առանցքին ուղղահայեաց եղող ամէն կտրուած, ինչպէս ՀՔՖԻ, բոլորակ է. նաեւ առանցքին վրայէն անցնող ամէն կըտրուած, ինչպէս ՍԴՆ, երկկողմնազոյգ եռանկիւն է, եւ ՍԱԲ եռանկեան կրկնապատիկն է :

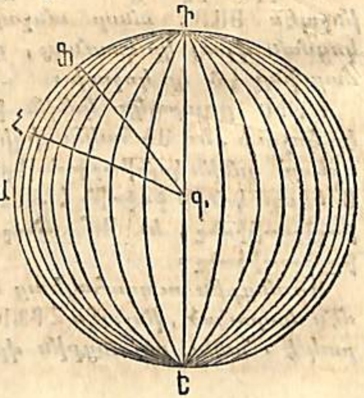
6. Եթէ ՑԹՀ կտրուածը ԳԴԲ խարսխին զուգահեռական է, ԳԲԴ–Թ մարմինը հատեալ կոն կը կոչուի : Եթէ Կ եւ Ա ուղիղ անկիւններն ունեցող ԱԲՀԿ տրապիզաձեւը անոր ԿԱ անշարժ կողման վրայ դառնայ, գծուած մարմինը հատեալ կոն մը կ'ըլլայ : ԱԿ անոր բարձրութիւնն ու առանցքն է, ԲԴԳ ու ՀԹՑ բոլորակները անոր խարիսխներն են, եւ ԲՀ՝ անոր շեղեալ բարձրութիւնը :

7. Երկու կոներ նման են, երբ անոնց առանցքներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարսխաց տրամագծերը :



8. Եթէ Ս–ԱԲԳԴԵ կոնին խարսխին մէջ բազմանկիւն մը գծուի, ինչպէս ԱԲԳԴԵ, եւ կոնին Ս գագաթէն ՍԱ, ՍԲ, եւայլն գծերը քաշուին, Ս–ԱԲԳԴԵ բուրգը կոնին ներքնագծուած է կ'ըսուի :

9. Երբ կիսաբոլորակ մը, ինչպէս ԴԱԵ, անոր անշարժ ԴԵ տրամագծին վրայ կը դառնայ, գծուած մարմինը գունդ կը կոչուի. եւ անոր մակերեւոյթին ամէն կէտերը հաւասարապէս հեռու են գունդին Գ կեդրոնէն :



10. Կիսաբոլորակին դարձած ժամանակը անոր որեւէ հատիչը, ինչպէս ՑԳՀ կամ ԴԳՑ, մարմին մը կը գծէ որ գնդական հատուած կը կոչուի :

11. Գնդոյ մը շառաւիղը այն գիծն է որ գնդոյն կեդրոնէն մինչեւ

մակերեւոյթին որեւէ մէկ կէտը կը քաշուի : Տրամագիծը կամ առանցքը գիծ մըն է որ կեդրոնէն կ'անցնի, եւ որուն երկու ծայրերը մակերեւոյթին կը դպչին :

12. Կրնայ ապացուցուիլ թէ գնդոյ մը ամէն մէկ կտրուածը բոլորակ է. կեդրոնէն անցնող կտրուածը մեծ բոլորակ կը կոչուի, եւ կեդրոնէն չանցնողը՝ փոքր բոլորակ :

13. Մակարդակ մը գնդոյ մը շօշափող է, երբ անոնք միայն մէկ հասարակաց կէտ ունին :

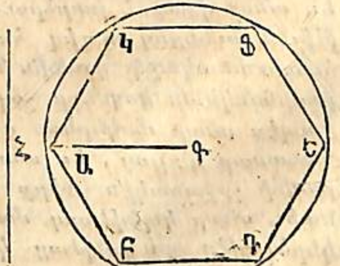
14. Գնդոյ մը մակերեւոյթին այն մասը, որ երկու իրարու զուգահեռական մակարդակաց մէջտեղ կ'իյնայ, գօտի կը կոչուի. եւ մակարդակները անոր խարիսխներն են : Երբ մակարդակաց մէկը շօշափող է, գօտին միայն մէկ խարիսխ ունի :

15. Գնդոյ մը այն մասը, որ երկու իրարու զուգահեռական մակարդակաց մէջ կ'իյնայ, գնդական հատուած կը կոչուի : Մակարդակներն անոր խարիսխները կը կոչուին. եւ, եթէ մէկը շօշափող է, հատուածը միայն մէկ խարիսխ ունի :

16. Գօտւոյ մը կամ հատուածոյ մը բարձրութիւնը այն գիծն է որ անոնց խարսխաց մէկէն միւսին ուղղահայեաց կը քաշուի :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գլանի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջանակէն, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը :



Եթէ ԱԳ՝ Հ բարձրութիւնն ունեցող գլանին խարսխի շառաւիղն է, գլանին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է շրջ. ԱԳ × Հ արտադրելոյն :

Գլանին խարսխին մէջ որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն մը գծէ, ինչպէս ԱԲԴ եւայլն, եւ անոր վրայ Հ բարձրութիւնն ունեցող ուղիղ հատուածակողմ մը գծէ. այս հատուածակողմը գլանին ներքը գծուած կ'ըլլայ: Եթէ բազմանկեան կողմերը չարունակ աւելցընենք, վերջապէս անոր շրջագիծը գլանին շրջանակին հետ զուգընթաց կ'ըլլայ (Գիրք Ե. Նախ. Ը. Հետ. 2), եւ հատուածակողման մակերեւոյթը հաւասար կ'ըլլայ գլանին մակերեւոյթին. բայց անոր կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջագծին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը (Գիրք Է. Նախ. Ա.). ուրեմն գլանի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջանակին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅՑՆՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գլանի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը:

Եթէ Հ ցուցընէ գլանի մը բարձրութիւնը, եւ ԱԳ՝ անոր խարսխի շառաւիղը, անոր ծաւալը հաւասար կ'ըլլայ շրջանակ ԳԱ×Հ արտադրելոյն:

Գլանին խարսխին մէջ գծէ որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն մը, ինչպէս ԱԲԴԵՑԿ, եւ անոր վրայ Հ բարձրութիւնն ունեցող ուղիղ հատուածակողմ մը գծէ. այս հատուածակողմը գլանին ներքը գծուած կ'ըլլայ: Եթէ բազմանկեան կողմերը չարունակ աւելցընենք, վերջապէս անոր մակերեսը գլանին խարսխի մակերեսին հաւասար կ'ըլլայ, եւ անոր շրջագիծը՝ գլանին խարսխի շրջանակին (Գիրք Ե. Նախ. Ը. Հետ. 1 եւ 2). նաեւ անոր կորնթարդ մակերեւոյթը եւ գլանին մակերեւոյթը զուգընթաց կ'ըլլան. բայց հատուածակողման ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազ-

մապատկեալ անոր բարձրութեամբը (Գիրք Է. Նախ. ԺԴ.). ուրեմն գլանի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը:

Հետ. 1. Նոյն բարձրութիւնն ունեցող երկու գլան իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները, եւ հաւասար խարիսխ ունեցող երկու գլան՝ ինչպէս անոնց բարձրութիւնները:

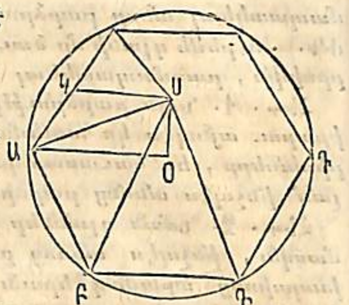
Հետ. 2. Նման գլաններ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութեանց կամ անոնց խարսխաց տրամագծերուն խորանարդները: Քանզի խարիխները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց տրամագծերուն քառակուսիները. եւ, որովհետեւ գլանները իրարու նման են, անոնց խարսխաց տրամագծերը իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները (Սահ. 2). ուստի խարիսխները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս բարձրութեանց քառակուսիները. ուրեմն խարիխները՝ գլաններուն բարձրութիւններովը բազմապատկեալ, այսինքն գլաններուն ծաւալները, իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս բարձրութեանց խորանարդները:

Դաբ. Եթէ գլանի մը խարսխին շառաւիղը Շ ով ցուցընենք, եւ անոր բարձրութիւնը՝ Բ ով, խարսխին մակերեսը կ'ըլլայ π×Շ² (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ. Հետ. 2). եւ գլանին ծաւալը կ'ըլլայ πՇ²Բ արտադրեալը:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅՑՆՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Կոնի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջանակին, բազմապատկեալ անոր շեղեալ բարձրութեան կիսովը:

Ս գագաթը, ՍՕ բարձրութիւնը, եւ ՍԱ շեղեալ բարձրութիւնն ունեցող Ս–ԱԲԳԴ կոնին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է շրջ. ԱՕ×½ՍԱ արտադրելոյն:



Կոնին խարսխին մէջ որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն մը գծէ, ինչպէս ԱԲԳԴ, եւ անոր վրայ ՍՕ բարձրութիւնն ունեցող ուղիղ բուրգ մը գծէ. այս բուրգը կոնին ներսը գծուած կ'ըլլայ: Նաեւ Ս գագաթէն ՍԿ քաշէ բազմանկեան մէկ կողման ուղղահայեաց. ՍԿ է բուրգին չեղեալ բարձրութիւնը (Գիրք Է. Սահ. 15): Եթէ բազմանկեան կողմանց թիւը չարունակ աւելցընենք, վերջապէս անոր շրջագիծը կոնին խարսխի շրջանակին հաւասար կ'ըլլայ, ՍԿ՝ ՍԱ ին, եւ բուրգին կորնթարդ մակերեւոյթը՝ կոնին մակերեւոյթին: Բայց բուրգին մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջանակին; բազմապատկեալ անոր չեղեալ բարձրութեան կիսովը (Գիրք Է. Նախ. Դ). ուրեմն կոնի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր խարսխի շրջանակին, բազմապատկեալ անոր չեղեալ բարձրութեան կիսովը:

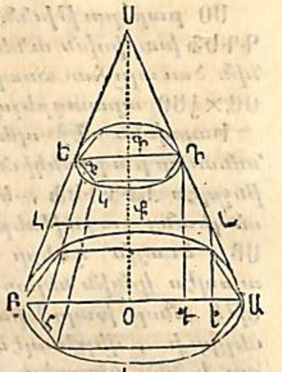
Պար. Եթէ չեղ. Բ ցուցընէ կոնի մը չեղեալ բարձրութիւնը, եւ Ճ՝ անոր խարսխի շառաւիղը, խարսխին շրջանակը կ'ըլլայ 2ֆ×Ճ, եւ կոնին կորնթարդ մակերեւոյթը՝ 2ֆ×Ճ×$\frac{1}{2}$ չեղ. Բ, կամ ֆ×Ճ×չեղ. Բ:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Հատեալ կոնի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր չեղեալ բարձրութեանը, բազմապատկեալ անոր խարսխաց շրջանակներուն գումարին կիսովը:

ԲԻԱ–ԴԵ հատեալ կոնին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է $\frac{1}{2}$ (շրջ. ՕԱ+շրջ. ԳԴ)×ԱԴ արտադրելոյն:

Երկու խարսխաց մէջ գծէ երկու իրարու նման կանոնաւոր բազմանկիւններ այնպէս որ անոնց համանուն կողմերը զուգահեռական ըլլան, նաեւ համանուն



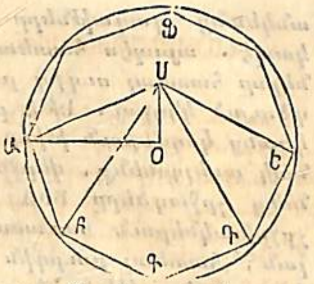
անկեանց գագաթները գծերով կապէ. այսպէս հատեալ կոնին ներսը հատեալ ուղիղ բուրգ մը գծուած կ'ըլլայ: Եթէ բազմանկեանց կողմերուն թիւը չարունակ աւելցընենք, վերջապէս անոնց շրջագծերը՝ ԲԻԱ եւ ԵԿԴ շրջանակներուն հաւասար կ'ըլլան, հատեալ բուրգին ՓՀ չեղեալ բարձրութիւնը՝ հատեալ կոնին չեղեալ բարձրութեանը, նաեւ անոնց կորնթարդ մակերեւոյթները զուգընթաց կ'ըլլան:

Բայց հատեալ բուրգին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր չեղեալ բարձրութեանը, բազմապատկեալ անոր խարսխաց շրջանակներուն գումարին կիսովը (Գիրք Է. Նախ. Դ. Հետ.). ուրեմն հատեալ կոնի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր չեղեալ բարձրութեանը, բազմապատկեալ անոր խարսխաց շրջանակներուն գումարին կիսովը:

Հետ. ԱԴ գծին միջին Լ կէտէն ԼՓԼ գիծը քաշէ ԱԲ ին զուգահեռական, նաեւ Լէ եւ Դէ՝ ԳՕ առանցքին զուգահեռական: Որովհետեւ ԱԼ=ԼԴ, ուստի Աէ=էՓ (Գիրք Գ. Նախ. ԺԵ. Հետ. 2). ուրեմն ՓԼ=$\frac{1}{2}$(ՕԱ+ԳԴ): Բայց, որովհետեւ շրջանակներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց շառաւիղները (Գիրք Ե. Նախ. ԺԱ.), շրջ. ՓԼ=$\frac{1}{2}$ (շրջ. ՕԱ+շրջ. ԳԴ). ուրեմն հատեալ կոնի մը կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է անոր չեղեալ բարձրութեան, բազմապատկեալ անոր խարսխաց հաւասարապէս հեռու եղող կտրուածին շրջանակովը:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Կոնի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեան երրորդ մասովը:



ՄՕ բարձրութիւնն ու ԱԲԳԴԵՖ խարիսխն ունեցող կոնին ծաւալը հաւասար է մակ. $ՕԱ \times \frac{1}{3}ՄՕ$ *արտադրելոյն։*

Խարսխին մէջ որեւէ կանոնաւոր բազմանկիւն մը գծէ, ինչպէս ԱԲԳԴԵՖ, եւ անոր անկեանց գագաթներէն ՄԱ, ՄԲ, եւայլն գծերը քաշէ. այսպէս կոնին ներսը ուղիղ բուրգ մը գծուած կ'ըլլայ։ Եթէ անոր խարսխին կողմերուն թիւը չարունակ աւելցուի, վերջապէս անոր շրջագիծը հաւասար կ'ըլլայ կոնին խարսխի շրջանակին, եւ բուրգն ու կոնը զուգընթաց կ'ըլլան. բայց բուրգին ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեան երրորդ մասովը (Գիրք Է. Նախ. ԺԷ.). ուրեմն կոնի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխին, բազմապատկեալ անոր բարձրութեան երրորդ մասովը։

Հետ. 1. Կոն մը նոյն խարիսխն ու հաւասար բարձրութիւն ունեցող գլանին երրորդ մասն է. ուրեմն

Ա. Հաւասար բարձրութիւն ունեցող կոներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարիսխները.

Բ. Հաւասար խարիսխ ունեցող կոներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները.

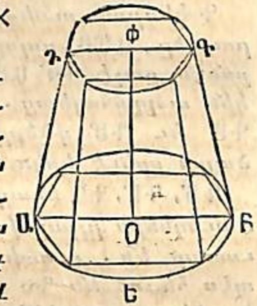
Գ. Նման կոներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց խարսխաց տրամագծերուն կամ անոնց բարձրութեանց խորանարդները։

Հետ. 2. Կոնի մը ծաւալը հաւասար է համազօր խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւնն ունեցող բուրգի մը ծաւալին։

Պար. Եթէ Շ ցուցընէ կոնի մը խարսխի շառաւիղը, եւ Բ՝ անոր բարձրութիւնը, անոր ծաւալը կ'ըլլայ $ֆ \times Շ^2 \times \frac{1}{3}Բ$, *կամ* $\frac{1}{3}ֆՇ^2Բ$ ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Հատեալ կոնի մը ծաւալը հաւասար է երեք կոներու ծաւալներուն գումարին, որոնց բարձրութիւնները հաւասար են հատեալ կոնին բարձրութեանը, և որոնց խարիսխներն են հատեալ կոնին վերի խարիսխը, անոր վարի խարիսխը, և այն երկու խարսխաց միջին համեմատականը։



ԱԵԲ-ԳԴ հատեալ կոնին ծաւալը հաւասար է $\frac{1}{3}ֆ \times ՕՓ\,(ԱՕ^2 + ԴՓ^2 + ԱՕ \times ԴՓ)$ ։

Երկու խարսխաց մէջ իրարու նման երկու կանոնաւոր բազմանկիւն գծէ, այնպէս որ անոնց համանուն կողմերը զուգահեռական ըլլան, եւ համանուն անկեանց գագաթները գծերով կապէ. այսպէս կոնին ներսը հատեալ ուղիղ բուրգ մը գծուած կ'ըլլայ։ Եթէ հատեալ բուրգին խարսխաց կողմերուն թիւը չարունակ աւելցընենք, վերջապէս անոր խարիսխները կոնին խարսխաց հաւասար կ'ըլլան, եւ հատեալ բուրգն ու հատեալ կոնը զուգընթաց կ'ըլլան. բայց հատեալ բուրգին ծաւալը հաւասար է երեք բուրգերուն ծաւալներուն գումարին, որոնց բարձրութիւնները հաւասար են հատեալ բուրգին բարձրութեանը, եւ որոնց խարիսխներն են անոր վերի խարիսխը, անոր վարի խարիսխը, եւ այն երկու խարսխաց միջին համեմատականը (Գիրք Է. Նախ. ԺԸ.). ուստի, որովհետեւ բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է $Շ^2ֆ$ *արտադրելոյն (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ. Հետ. 2), հատեալ կոնին ծաւալը հաւասար է սա կոներուն ծաւալներուն գումարին.*

Ա. $\frac{1}{3}ՕՓ \times ՕԱ^2ֆ$.

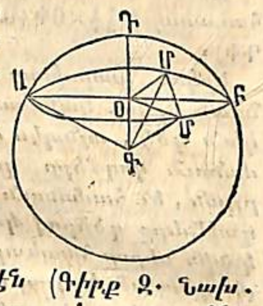
Բ. $\frac{1}{3}ՕՓ \times ՓԴ^2ֆ$. *եւ*

Գ. $\frac{1}{3}ՕՓ \times ՕԱ \times ՓԴֆ$. *քանզի*

ՕԱ×ՓԴ•ֆ՝ ՕԱ^{2}ֆ եւ ՓԴ^{2}ֆ միջին համեմատականն է. ուրեմն հատեալ կոնին ծաւալը հաւասար է $\frac{1}{3}$ֆ×ՕՓ×(ՕԱ^{2}+ՓԴ^{2}+ԱՕ×ՓԴ) արտադրելոյն ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ մակերեւոյթ մը գնդոյ մը միջէն կ'անցնի, կտրուածը բոլորակ է ։



Գ կեդրոնն ունեցող գնդոյ կտրուածը, ԱՄԲ, բոլորակ է ։ Գ կեդրոնէն քաշէ ԳՕ՝ ԱՄԲ մակարդակին ուղղահայեաց. նաեւ քաշէ ԳՄ եւ ԳՄ գծերը կտրուածին ծայրի որեւէ երկու կէտերուն ։

ԳՄ, ԳՄ, ԳԱ եւայլն գնդոյն շառաւիղներն ըլլալով, իրարու հաւասար են. ուստի հաւասարապէս հեռու են ԳՕ ուղղահայեացէն (Գիրք Զ. Նախ. Ե. Հետ.). ուրեմն այս գծերը իրարու հաւասար են, եւ ԱՄԲ բոլորակ մըն է որուն կեդրոնը Օ կէտն է ։

Հետ. 1. Երբ կտրուածը գնդոյն կեդրոնէն կ'անցնի, անոր շառաւիղը գնդոյն շառաւիղը կ'ըլլայ. ուրեմն գնդոյ մը մեծ բոլորակներն իրարու հաւասար են ։

Հետ. 2. Գնդոյ մը որեւէ երկու մեծ բոլորակաց մէկը միւսը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ. քանզի անոնց հասարակաց հատման գիծը թէ բոլորակաց եւ թէ գնդոյն տրամագիծ է ։

Հետ. 3. Ամէն մեծ բոլորակ գունդը եւ անոր մակերեւոյթը երկերկու հաւասար մասանց կը բաժնէ. քանզի, եթէ մէկ մասը միւսին վրայ դրուի, երկուքը զուգընթաց կ'ըլլան. ապա թէ ոչ կը հետեւի թէ մակերեւոյթին վրայ կան կէտեր որ հաւասարապէս հեռու չեն կեդրոնէն ։

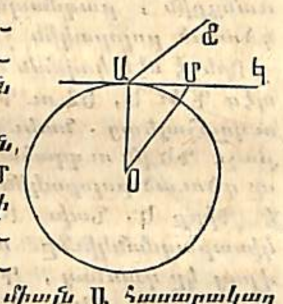
Հետ. 4. Գնդոյ մը շառաւիղը, որ փոքր բոլորակի մը ուղղահայեաց է, այն բոլորակին կեդրոնէն կ'անցնի ։

Հետ. 5. Երկու փոքր բոլորակներէն մեծը այն է որուն մակարդակը մօտ է գնդոյն կեդրոնին ։ Յայտնի է թէ երբ ԳՕ կը մեծնայ, ԱԲ տրամագիծը կը պզտիկնայ ։

Հետ. 6. Մեծ բոլորակ մը կրնայ քաշուիլ որ գնդոյ մը մակերեւոյթի որեւէ երկու կէտերէն անցնի. քանզի այն երկու կէտերն եւ գնդոյն կեդրոնը երեք կէտ կ'ըլլան որոնք մակարդակին դիրքը կ'որոշեն ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՅՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ մակարդակ որ շառաւիղի մը ծայրը շառաւիղին ուղղահայեաց կը քաշուի, շօշափող է գնդոյն ։



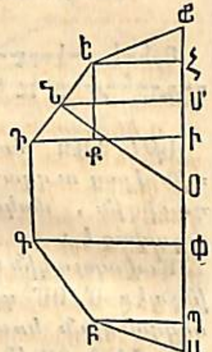
Եթէ ՑԱԿ մակարդակը Ա կէտին վրայ ուղղահայեաց է ՕԱ շառաւիղին, մակարդակը գնդոյն շօշափող է ։

Մակարդակին որեւէ մէկ կէտին, ինչպէս Մ, ՕՄ գիծը քաշէ ։ ՕԱՄ ուղղանկիւն եռանկիւն է. ուստի ՕՄ մեծ է ՕԱ էն. ուրեմն Մ կէտը գնդէն դուրս է, եւ, որովհետեւ գունդը եւ մակարդակը միայն Ա հասարակաց կէտն ունին, մակարդակը գնդոյն շօշափող է Ա կէտին վրայ (Սահ. 13) ։

Պար. Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ երկու գունդ իրարու շօշափող են, երբ անոնց կեդրոններուն իրարմէ եղած հեռաւորութիւնը հաւասար է անոնց շառաւիղներուն թէ գումարին եւ թէ տարբերութեանը. եւ նաեւ անոնց կեդրոններն ու շօշափման կէտը միեւնոյն ուղիղ գծին վրայ են ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ԱՌՈՒՄՆ

Երբ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւն մը անոր կեդրոնէն և որեւէ երկու անկեանց վրայէն անցնող գծի մը վրայ կը դառնայ, անոր շրջագծին գծած մակերեւոյթը հաւասար է առանցքին, բազմապատկեալ ներսը գծուած բոլորակին շրջանակովը։



Եթէ ԱԲԳԴԵՑ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւնը ԱՑ առանցքին վրայ դառնայ, անոր շրջագծին գծած մակերեւոյթը հաւասար կ'ըլլայ ԱՑ առանցքին, բազմապատկեալ ներսը գծուած բոլորակին շրջանակովը։

Որեւէ մէկ կողման ծայրերէն, ինչպէս Դ եւ Ե, ԵՀ ու ԴԻ քաշէ ԱՑ ին ուղղահայեաց. նաեւ Օ կեդրոնէն ՕՆ քաշէ ԴԵ ին ուղղահայեաց. ՕՆ ներսը գծուած բոլորակին մէկ շառաւիղն է (Գիրք Ե. Նախ. Բ.)։ Արդ, երբ կիսաբազմանկիւնը անոր առացքին վրայ կը դառնայ, ԴԵ կողման գծած մակերեւոյթը հաւասար է ԴԵ×շրջ. ՆՄ (Նախ. Դ. Հետ.)։ Բայց, որովհետեւ ԵԴՔ եւ ՕՆՄ եռանկիւններն իրարու նման են (Գիրք Դ. Նախ. ԻԱ.), ԵԴ:ԵՔ կամ ՀԻ::ՕՆ:ՆՄ ::շրջ. ՕՆ:շրջ. ՆՄ. ուստի

ԵԴ×շրջ. ՆՄ=ՀԻ×շրջ. ՕՆ.

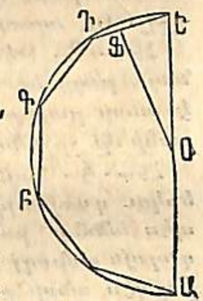
Ու, որովհետեւ նոյն բանը կրնայ ապացուցուիլ ուրիշ որեւէ մէկ կողման նկատմամբ, յայտնի է թէ ամբողջ շրջագծին գծած մակերեւոյթը հաւասար է (ՑՀ+ՀԻ+ԻՓ+ՓՊ+ՊԱ)×շրջ. ՕՆ կամ ԱՑ×շրջ. ՕՆ արտադրելոյն։

Հետ. Շրջագծին որեւէ մասին, ինչպէս ԵԴԳ ին, գծած մակերեւոյթը հաւասար է անոր ծայրերէն առանցքին ուղղահայեաց քաշուած երկու գծերուն ի-

րարմէ հեռաւորութեանը, բազմապատկեալ ներսը գծուած բոլորակին շրջանակովը։ Քանզի ԴԵ ին գծածը հաւասար է ՀԻ×շրջ. ՕՆ արտադրելոյն, եւ ԴԳ ին գծածը՝ ԻՓ×շրջ. ՕՆ արտադրելոյն. ուրեմն ԵԴԳ ին գծածը հաւասար է (ՀԻ+ԻՓ)×շրջ. ՕՆ կամ ՀՓ×շրջ. ՕՆ արտադրելոյն։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գնդոյ մը մակերեւոյթը հաւասար է անոր տրամագծին, բազմապատկեալ մեծ բոլորակի մը շրջանակովը։



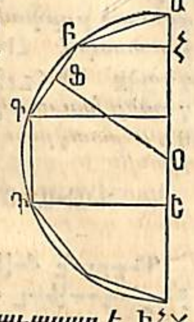
ԱԲԳԴԵ կիսաբոլորակին մէջ որեւէ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւն մը գծէ, եւ Օ կեդրոնէն անոր մէկ կողման ուղղահայեաց ՕՑ գիծը քաշէ։ Կիսաբոլորակն ու կիսաբազմանկիւնը ԱԵ առանցքին վրայ դարձուր. ԱԲԳԴԵ կէս շրջանակը գնդոյ մը մակերեւոյթը կը գծէ (Սահ. 9). եւ կիսաբազմանկեան շրջագիծը կը գծէ մակերեւոյթ մը որ հաւասար է ԱԵ×շրջ. ՕՑ արտադրելոյն (Նախ. Թ.)։

Բայց, եթէ բազմանկեան կողմերուն թիւը շարունակ աւելցընենք, վերջապէս ԱԲԳԴԵ շրջագիծը եւ ԱԲԳԴԵ շրջանակը զուգընթաց կ'ըլլան, եւ ՕՑ հաւասար կ'ըլլայ ՕԵ շառաւիղին. ուրեմն գնդոյն մակերեւոյթը հաւասար է ԱԵ×շրջ. ՕԵ արտադրելոյն։

Հետ. 1. Որովհետեւ մեծ բոլորակի մը մակերեսը հաւասար է անոր շրջանակին, բազմապատկեալ կամ անոր շառաւիղին կիսովը եւ կամ անոր տրամագծին մէկ քառորդովը (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ.), կը հետեւի թէ գնդոյ մը մակերեւոյթը հաւասար է անոր մեծ բոլորակաց չորսին. այսինքն 4 π×ՕԱ² արտադրելոյն (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ. Հետ. 2)։

Հետ. 2. Գօտւոյ մը մակերեւոյթը հաւասար է անոր բարձրութեանը, բազմապատկեալ մեծ բոլորակի մը շրջանակովը։

Քանզի, երբ ԱԲԳԴ *կիսաբազմանկիւնը անոր առանցքին վրայ կը դառնայ, անոր շրջագծին որեւէ մէկ մասը, ինչպէս* ԲԳ+ԳԴ, *կը գծէ մակերեւոյթ մը որ հաւասար է* ԵՀ×շրՉ·ՕՖ *արտադրելոյն (Նախ. Թ. Հետ.)։ Բայց, եթէ բազմանկեան կողմերուն թիւը չարունակ աւելցուի,* ԲԳ+ԳԴ *հաւասար կ'ըլլայ* ԲԳԴ *աղեղին,* ՕՖ՝ ՕԱ *ի, եւ* ԲԳ+ԳԴ *կողմերուն ու* ԲԳԴ *աղեղին գծած մակերեւոյթները կը զուգընթանան. ուրեմն գօտւոյն մակերեւոյթը հաւասար է* ԵՀ×շրՉ·ՕԱ *արտադրելոյն։*



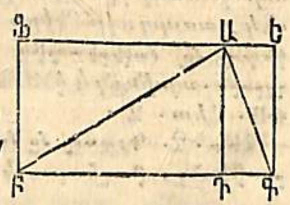
Հետ. 3. Թէեւ գօտին միայն մէկ խարիսխ ունենայ, բայց եւ այնպէս անոր մակերեւոյթը հաւասար է անոր բարձրութեանը, բազմապատկեալ մեծ բոլորակի մը շրջանակովը։

Հետ. 4. Նոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդաց որեւէ երկու գօտիները իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց բարձրութիւնները, եւ որեւէ գօտի մը գնդոյն ամբողջ մակերեւոյթին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս անոր բարձրութիւնը՝ գնդոյն տրամագծին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ԱՌՈՒՄՆ

Երբ նոյն բարձրութիւնն ու նոյն խարիսխն ունեցող եռանկիւն մը և ուղղանկիւն մը իրենց հասարակաց խարիսխին վրայ միատեղ կը դառնան, եռանկեան գծած մարմինը ուղղանկեան գծած գլանին երրորդ մասն է։

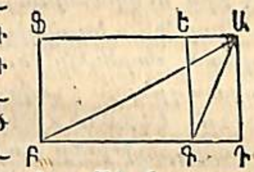
ԱԲԳ *եռանկեան գագաթէն՝* ԱԴ *գիծը քաշէ* ԲԳ *խարիսխին ուղղահայեաց։*



Երբ ԱԲԳ *եռանկիւնը եւ* ԲԳԵՖ *ուղղանկիւնը* ԲԳ *խարիսխին վրայ կը դառնան,* ԱԲԴ *ին գծած կոնը հաւասար կ'ըլլայ* ԲԴԱՖ *ին*

գծած գլանին երրորդ մասին (Նախ. Ե. Հետ. 1). նաեւ ԱԳԴ *ին գծած կոնը հաւասար կ'ըլլայ* ԱԴԳԵ *ին գծած գլանին երրորդ մասին. ուրեմն երկու կոներուն գումարը, կամ* ԱԲԳ *եռանկեան գծած մարմինը, հաւասար կ'ըլլայ երկու գլաններուն գումարին երրորդ մասին, այսինքն,* ԲԳԵՖ *ուղղանկեան գծած գլանին երրորդ մասին։*

Երբ ԱԴ *ուղղահայեացը եռանկեան դուրսի կողմը կ'իյնայ,* ԱԲԳ *ին գծածը հաւասար է* ԱԲԴ *եւ* ԱԳԴ *եռանկեանց գծած կոներուն տարբերութեանը. եւ* ԲԳԵՖ *ին գծած գլանը՝* ԱՖԲԴ *եւ* ԱԵԳԴ *ուղղանկիւններուն գծած գլաններուն տարբերութեանը. բայց եւ այնպէս յայտնի է թէ եռանկեան գծածը ուղղանկեան գծածին երրորդ մասն է։*

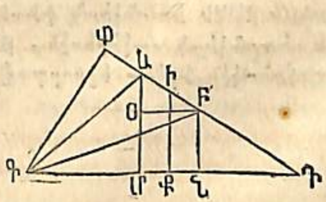


Պար. ԱԴ շառաւիղն ունեցող բոլորակին մակերեսը հաւասար է π×ԱԴ^{2} *արտադրելոյն. ուրեմն* ԲԳԵՖ *ին գծած գլանին ծաւալը հաւասար է* π×ԱԴ^{2}×ԲԳ *արտադրելոյն. եւ* ԱԲԳ *եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը՝* $\frac{1}{3}$π×ԱԴ^{2}×ԲԳ *արտադրելոյն։*

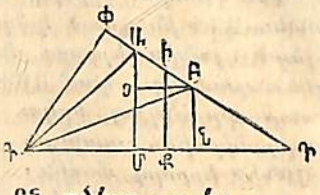
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ԱՌՈՒՄՆ

Երբ եռանկիւն մը՝ նոյն մակարդակին վրայ եղող և անկեանց մէկուն գագաթէն անցնող գծի մը վրայ կը դառնայ, եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է եռանկեան մակերեսին, բազմապատկեալ այն գագաթէն դիմացի կողման միջին կէտին գծած շրջանակին երկու երրորդովը։

Եթէ ԱԲԳ *եռանկիւնը նոյն մակարդակին վրայ եղող* ԳԴ *գծին վրայ դառնայ, անոր գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար կ'ըլլայ եռանկեան մակերեսին, բազմապատ-*



կեալ ԱԲ կողման ի միջին կէտին գծած շրջանակին երկու երրորդովը ։ ԱԲ կողմը երկնցուր մինչև որ ԳԴ առանցքին դպչի․ նաև ԳԱ ին չարունակութեանը ուղղահայեաց ԳՓ գիծը, և ԳԴ ին ուղղահայեաց ՄԱ ու ԲՆ գծերը քաշէ ։



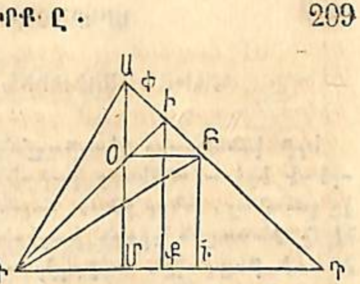
Երբ ԳԱԴ եռանկիւնը ԳԴ ին վրայ կը դառնայ, անոր գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է $\frac{1}{3}$ֆ×ԱՄ^2×ԳԴ արտադրելոյն (Նախ․ ԺԱ․ Պար․)․ և ԳԲԴ ին գծածինը՝ $\frac{1}{3}$ֆ×ԲՆ^2×ԳԴ արտադրելոյն․ ուրեմն անոնց տարբերութիւնը, այսինքն, ԱԲԳ ին գծած մարմնոյն ծաւալը, հաւասար է $\frac{1}{3}$ֆ (ԱՄ^2—ԲՆ^2)×ԳԴ արտադրելոյն ։

ԱԲ կողման ի միջին կէտէն ԳԴ գծին ուղղահայեաց ԻՔ քաշէ․ նաև ԲՕ՝ ԳԴ ին զուգահեռական ։ ԱՄ+ԲՆ =2 ԻՔ (Գիրք Դ․ Նախ․ Է․)․ և ԱՄ—ԲՆ=ԱՕ․ ուստի (ԱՄ+ԲՆ)×(ԱՄ—ԲՆ), կամ ԱՄ^2—ԲՆ^2=2ԻՔ×ԱՕ (Գիրք Դ․ Նախ․ Ժ․)․ ուրեմն վերոյիշեալ ծաւալը հաւասար է $\frac{2}{3}$ֆ×ԻՔ×ԱՕ×ԳԴ արտադրելոյն ։ Բայց, որովհետև ԱԲՕ և ԳԴՓ եռանկիւններն իրարու նման են,

ԱՕ:ԳՓ::ԱԲ:ԳԴ․ ուստի ԱՕ×ԳԴ=ԳՓ×ԱԲ․

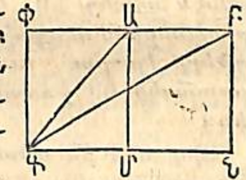
բայց ԳՓ×ԱԲ արտադրեալը ԱԲԳ եռանկեան կրկնապատիկն է․ ուստի ԱՕ×ԳԴ արտադրեալը ԱԲԳ եռանկեան մակերեսին կրկնապատիկն է, և ԱԲԳ եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է $\frac{4}{3}$ֆ×ԱԲԳ×ԻՔ կամ ԱԲԳ×$\frac{2}{3}$ ՇրՋ․ ԻՔ արտադրելոյն․ քանզի ՇրՋ․ ԻՔ և 2ֆ×ԻՔ արտադրեալներն իրարու հաւասար են․ ուրեմն ԱԲԳ եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է եռանկեան մակերեսին, բազմապատկեալ ի կէսին գծած շրջանակին երկու երրորդովը ։

Հետ․ Երբ ԱԳ=ԲԳ, ԳԻ ուղղահայեաց կ'ըլլայ ԱԲ ին, ԱԲԳ եռանկեան մակերեսը հաւասար կ'ըլլայ ԱԲ×$\frac{1}{2}$ԳԻ արտադրելոյն, և $\frac{4}{3}$ֆ× ԱԲԳ×ԻՔ ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{2}{3}$ֆ×ԱԲ×ԻՔ×ԳԻ ։



Բայց ԱԲՕ և ԳԻՔ եռանկիւններն իրարու նման են․ ուստի ԱԲ:ԲՕ կամ ՄՆ::ԳԻ:ԻՔ, և ԱԲ×ԻՔ=ՄՆ× ԳԻ․ ուրեմն ԱԲԳ երկկողմնագոյգ եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է $\frac{2}{3}$ֆ×ԳԻ^2×ՄՆ արտադրելոյն․ այսինքն այն արտադրելոյն որուն բազմապատկիչներն են ֆ ին երկու երրորդը, գագաթէն խարիսխին ուղղահայեաց քաշուած գծին քառակուսին, և խարիսխին առանցքէն ուղղահայեաց քաշուած գծերուն երրորդ հեռաւորութիւնը ։

Պար․ Վերոյիշեալ ապացուցութեան մէջ կ'ենթադրուի թէ ԱԲ կողմը շարունակուելով առանցքին կը դպչի․ բայց հետևութիւնը ճշմարիտ է, երբ ԱԲ կողմը առանցքին զուգահեռական է ։



Քանզի ԱՄՆԲ ին գծած գլանին ծաւալը հաւասար է ֆ×ԱՄ^2×ՄՆ արտադրելոյն․ ԱԳՄ ին գծած կոնին ծաւալը հաւասար է $\frac{1}{3}$ֆ×ԱՄ^2×ԳՄ արտադրելոյն․ և ԲԳՆ ին գծած կոնին ծաւալը հաւասար է $\frac{1}{3}$ֆ×ԱՄ^2×ԳՆ արտադրելոյն ։ Գումարելով առաջին երկու արտադրեալները, և գումարէն հանելով երրորդը կ'ունենանք ԱԲԳ ին գծած մարմնոյն ծաւալը, որ հաւասար է ֆ×ԱՄ^2 (ՄՆ+$\frac{1}{3}$ԳՄ—$\frac{1}{3}$ԳՆ) արտադրելոյն․ և, որովհետև ԳՆ—ԳՄ=ՄՆ, այս արտադրեալը կրնայ վերածուիլ ֆ×ԱՄ^2×$\frac{2}{3}$ՄՆ կամ $\frac{2}{3}$ֆ ×ԳՓ^2×ՄՆ արտադրելոյն, որ հետևութեան ցուցածն է ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ԱՌՈՒՄՆ

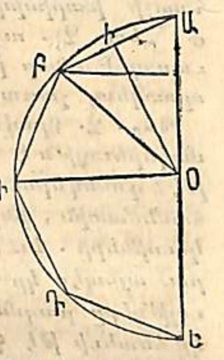
Երբ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւն մը անոր կեդրոնէն և որեւէ երկու անկեանց գագաթներէն անցնող գծի մը վրայ կը դառնայ, անոր գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է կոնի մը ծաւալին որուն խարիսխն է բազմանկեան ներսը գծուած բոլորակը, և բարձրութիւնը՝ բազմանկեան առանցքին կրկնապատիկը :

Եթէ ՑԱԲԳԴԿ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւնը՝ ՑԿ գծին վրայ դառնայ, անոր գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար կ'ըլլայ $\frac{1}{3}$ բոլ. $\text{ՕԻ} \times 2\text{ՑԿ}$ արտադրելոյն : ՕՑԱ, ՕԱԲ, ՕԲԳ, եւայլն եռանկիւնները երկկողմնազոյգ եւ իրարու հաւասար են, եւ կեդրոնէն անոնց ՑԱ, ԱԲ, եւայլն խարիսխներուն ուղղահայեաց քաշուած գծերը իրարու՝ եւ ներսը գծուած բոլորակի ՕԻ շառաւիղին հաւասար են :

Արդ ՕԱԲ ին գծած մարմնոյն ծաւալն է $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ՄՆ}$ արտադրեալը (Նախ. ԺԲ. Հետ.). ՕՑԱ ին գծածինը՝ $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ՑՄ}$. ՕԲԳ ին գծածինը՝ $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ՆՕ}$, եւայլն. ուստի գծուած ամբողջ մարմնոյն ծաւալն է $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2(\text{ՑՄ}+\text{ՄՆ}+\text{ՆՕ}+\text{ՕՊ}+\text{ՊԿ})$, կամ $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ՑԿ}$, կամ $\frac{1}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times 2\text{ՑԿ}$ արտադրեալը : Բայց $\pi \times \text{ՕԻ}^2$ ներսը գծուած բոլորակին մակերեսն է (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ. Հետ. 2). ուրեմն այս ծաւալը հաւասար է կոնի մը ծաւալին որուն խարիսխն է բոլորակ ՕԻ, եւ բարձրութիւնը՝ 2ՑԿ

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գնդոյ մը ծաւալը հաւասար է անոր մակերեւոյթին, բազմապատկեալ անոր շառաւիղին մէկ երրորդովը :



ԱԲԳԴԵ կիսաբոլորակին ներսը որեւէ կանոնաւոր կիսաբազմանկիւն մը գծէ, ինչպէս ԱԲԳԴԵ, եւ ԱԲ կողման ուղղահայեաց ՕԻ գիծը քաշէ. ՕԻ՝ բազմանկեան ներսը գծուած բոլորակին մէկ շառաւիղն է :

Եթէ կիսաբոլորակը եւ կիսաբազմանկիւնը ԱԵ առանցքին վրայ դառնան, առաջինը գունդ մը պիտի գծէ, եւ երկրորդը՝ մարմին մը որուն ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ԵԱ}$ արտադրեալը (Նախ. ԺԴ.) : Բայց, եթէ բազմանկեան կողմանց թիւը շարունակ աւելցուի, վերջապէս անոր շրջագիծը բոլորակին շրջանակին հետ զուգընթաց կ'ըլլայ, ՕԻ հաւասար կ'ըլլայ ՕԱ ին, եւ բազմանկեան գծածին ծաւալը՝ գնդոյն ծաւալին. ուստի գնդոյն ծաւալը հաւասար է $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԱ}^2 \times \text{ԵԱ}$ արտադրելոյն, որ, ԵԱ ին տեղ անոր հաւասարը, 2ՕԱ, դնելով, կ'ըլլայ $\frac{4}{3}\pi \times \text{ՕԱ}^2 \times \text{ՕԱ}$ կամ $4\pi \times \text{ՕԱ}^2 \times \frac{1}{3}\text{ՕԱ}$: Բայց $4\pi \times \text{ՕԱ}^2$ հաւասար է գնդոյն մակերեւոյթին (Նախ. Ժ. Հետ. 1). ուրեմն գնդոյ մը ծաւալը հաւասար է անոր մակերեւոյթին, բազմապատկեալ անոր շառաւիղին մէկ երրորդովը :

Պոր. 1. Ամէն գնդական հատուածի ծաւալը հաւասար է անոր խարիսխը կազմող գօտւոյն, բազմապատկեալ շառաւիղին մէկ երրորդովը :

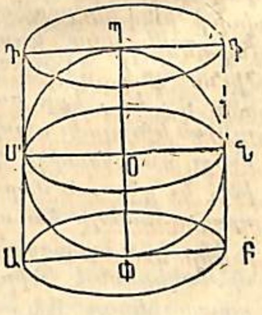
Քանզի, զորօրինակ, ԱԲԳԴԵ բազմանկեան ՕԱԲ երկկողմնազոյգ եռանկեան գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է $\frac{2}{3}\pi \times \text{ՕԻ}^2 \times \text{ԱՑ}$ արտադրելոյն (Նախ. ԺԲ. Հետ.). եւ, երբ բազմանկիւնը, անոր կողմանց թուոյն աւելնալովը, բոլորակին հաւասար կ'ըլլայ, ՕԱԲ մասը ԱՕԲ հատիչը կ'ըլլայ, ՕԻ հաւասար կ'ըլլայ ՕԱ ին, եւ գծուած մարմինը գնդական հատիչ մը կ'ըլլայ, որուն ծաւալը հաւասար է $\frac{2}{3}\pi \times \text{ԱՕ}^2 \times \text{ԱՑ}$ կամ $2\pi \times \text{ԱՕ} \times \text{ԱՑ} \times \frac{1}{3}\text{ԱՕ}$ արտադրելոյն : Բայց $2\pi \times \text{ԱՕ}$ մեծ բոլորակի մը մակերեսն է (Գիրք Ե. Նախ. ԺԲ. Հետ. 2), եւ այս արտադրեալը ԱՑ ով բազմապատկուելով գնդական հատչի խարիսխը կազմող գօտւոյն մակերեսն է (Նախ. Ժ. Հետ. 2) . ուրեմն գնդական հատչին ծաւալը հաւասար է անոր խարիսխը կազմող գօտւոյն, բազմապատկեալ շառաւիղին մէկ երրորդովը :

Պար. 2. Որովհետեւ Շ շառաւիղն ունեցող գնդոյն մակերեւոյթն է $4ֆՇ^{2}$ (Նախ. Ժ. Հետ. 1), կը հետեւի թէ գունդերու մակերեւոյթներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց շառաւիղներուն քառակուսիները . եւ, որովհետեւ անոնց ծաւալներն իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց մակերեւոյթները բազմապատկեալ անոնց շառաւիղներովը, կը հետեւի թէ գնդերու ծաւալներ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց շառաւղաց կամ տրամագծից խորանարդները :

Պար. 3. Եթէ Շ ցուցընէ գնդոյ մը շառաւիղը, գընդոյն մակերեւոյթը կ'ըլլայ $4ֆ×Շ^{2}$, եւ անոր ծաւալը՝ $4ֆ×Շ^{2}×\frac{1}{3}Շ$, կամ $\frac{4}{3}ֆ×Շ^{3}$: Եթէ Տ ցուցընէ գնդոյն տրամագիծը, կ'ունենանք $Շ=\frac{1}{2}Տ$, եւ $Շ^{3}=\frac{1}{8}Տ^{3}$. ուրեմն գնդոյն ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{4}{3}ֆ×\frac{1}{8}Տ^{3}$, կամ $\frac{1}{6}ֆ×Տ^{3}$:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գնդոյ մը մակերեւոյթը անոր շուրջը գծուած գլանին ամբողջ մակերեւոյթին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս երկուքը երեքին . անոնց ծաւալներն ալ նոյն համեմատութիւնն ունին :



Երբ ՊՓ առանցքին վրայ ՊՄՓ կիսաբոլորակը, եւ ՊԴԱՓ ուղղանկիւնը կը դառնան, առաջինը՝ գունդ մը, եւ երկրորդը գնդոյն դուրսը գլան մը կը գծէ : Գլանին բարձրութիւնը հաւասար է գնդոյն ՊՓ տրամագծին . նաեւ գլանին խարիսխը գնդոյն մէկ մեծ բոլորակին հաւասար է, քանզի գունդն ու

գլանին խարիսխը նոյն տրամագիծն ունին . ուստի գլանին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է մեծ բոլորակին շրջանակին, բազմապատկեալ անոր տրամագծովը (Նախ. Ա.) . ուրեմն գլանին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է գնդոյն մակերեւոյթին (Նախ. Ժ.) :

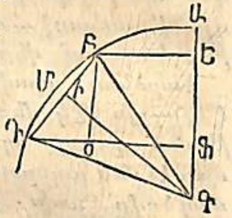
Բայց գնդոյն մակերեւոյթը հաւասար է չորս մեծ բոլորակներու . ուստի գլանին կորնթարդ մակերեւոյթը հաւասար է չորս մեծ բոլորակներու . բայց, որովհետեւ գլանին խարիսխները հաւասար են երկու մեծ բոլորակներու, գլանին ամբողջ մակերեւոյթը հաւասար է վեց մեծ բոլորակներու . ուրեմն գնդոյն մակերեւոյթը գլանին ամբողջ մակերեւոյթին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս չորսը՝ վեցին, կամ ինչպէս երկուքը՝ երեքին :

Դարձեալ, որովհետեւ գլանին խարիսխը հաւասար է գնդոյն մէկ մեծ բոլորակին, եւ անոր բարձրութիւնը՝ գնդոյն տրամագծին, գլանին ծաւալը հաւասար է մեծ բոլորակի մը, բազմապատկեալ անոր տրամագծովը (Նախ. Բ.) : Բայց գնդոյն ծաւալը հաւասար է չորս մեծ բոլորակներու, բազմապատկեալ շառաւիղին մէկ երրորդովը (Նախ. ԺԴ.) . այսինքն հաւասար է մէկ մեծ բոլորակի, բազմապատկեալ թէ շառաւիղին չորս երրորդովը, թէ տրամագծին երկու երրորդովը . ուրեմն գնդոյն ծաւալը գլանին ծաւալին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս երկուքը՝ երեքին :

Պար. Երբ գնդոյ մը դուրսը որեւէ բազմանիստ մը կը գծուի, կրնանք բազմանիստը նկատել իբրեւ քանի մը բուրգերէ կազմուած, որոնց ամէն մէկուն խարիսխը բազմանիստին մէկ երեսն է, որոնց գագաթներն գնդոյն կեդրոնն են, եւ որոնց հասարակաց բարձրութիւնը գնդոյն շառաւիղն է . ուստի բոլոր բուրգերուն կամ բազմանիստին ծաւալը հաւասար է բազմանիստին մակերեւոյթին, բազմապատկեալ գնդոյն շառաւիղին մէկ երրորդովը . ուրեմն որեւէ դուրսը գծուած բազմանիստին ծաւալը գնդոյն ծաւալին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս բազմանիստին մակերեւոյթը՝ գնդոյն մակերեւոյթին :

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ բոլորակի մը մէկ հատուածը բոլորակին այն հատուածէն դուրս եղող որեւէ տրամագծի մը վրայ կը դառնայ, հատուածէն գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է π ին մէկ վեցերորդին, բազմապատկեալ լարին քառակուսւովն ու լարին ծայրերէն առանցքին ուղղահայեաց քաշուած գծերուն իրարմէ հեռաւորութեամբը :



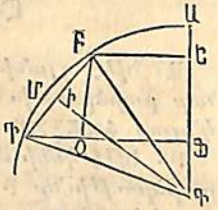
Գ կեդրոնէն ԴՄԲ հատուածին լարին ուղղահայեաց ԳԻ գիծը, եւ լարին ծայրերէն ՕԳ առանցքին ուղղահայեաց ԲԵ ու ԴՖ գծերը քաշէ. նաեւ քաշէ ԳԲ եւ ԳԴ շառաւիղները.

Եթէ ԱԲՄԴԳ դառնայ ԱԳ ին վրայ, ԲԳԴ հատչին գծած մարմնոյն ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{2}{3}\pi\times\text{ԳԲ}^2\times\text{ԵՖ}$ *արտադրեալը (Նախ. ԺԴ. Պար. 1) : Բայց ԳԴԲ երկկողմնազոյգ եռանկեան գծածինը կ'ըլլայ* $\frac{2}{3}\pi\times\text{ԳԻ}^2\times\text{ԵՖ}$ *(Նախ. ԺԲ. Հետ.). ուստի ԲՄԴ հատուածին գծածինը հաւասար է* $\frac{2}{3}\pi\times\text{ԵՖ}\,(\text{ԳԲ}^2-\text{ԳԻ}^2)$ *ին : Արդ, որովհետեւ ԳԻԲ ուղիղ անկիւն է,* $\text{ԳԲ}^2-\text{ԳԻ}^2=\text{ԲԻ}^2=\frac{1}{4}\text{ԲԴ}^2$. *ուրեմն ԲՄԴ հատուածին գծած մարմնոյն ծաւալը հաւասար է* $\frac{2}{3}\pi\times\text{ԵՖ}\times\frac{1}{4}\text{ԲԴ}^2$ *կամ* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԲԴ}^2\times\text{ԵՖ}$ *արտադրելոյն :*

Պար. *ԲՄԴ հատուածին գծած մարմինը ԲԴ տրամագիծն ունեցող գնդոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԲԴ}^2\times\text{ԵՖ}$ *եւ* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԲԴ}^3$ *արտադրեալները, այսինքն, ինչպէս ԵՖ եւ ԲԴ :*

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ գնդական հատուածի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխաց գումարին կիսոյն, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը, աւելնալ այն գնդոյն ծաւալը՝ որուն տրամագիծը հաւասար է հատուածին բարձրութեանը :



ԲՄԴ աղեղան ծայրերէն ԱԳ շառաւիղին ուղղահայեաց ԲԵ եւ ԴՖ գծերը քաշէ : Եթէ ԲՄԴՖԵ դառնայ ԵՖ առանցքին վրայ, ԲՄԴ հատուածին գծած մարմնոյն ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԲԴ}^2\times\text{ԵՖ}$ *արտադրեալը (Նախ. ԺԶ.). Նաեւ ԲԴՖԵ տրապիզաձեւին գծած հատեալ բուրգին ծաւալը կ'ըլլայ* $\frac{1}{3}\pi\times\text{ԵՖ}\,(\text{ԲԵ}^2+\text{ԴՖ}^2+\text{ԲԵ}\times\text{ԴՖ})$ *արտադրեալը (Նախ. Զ.). եւ այս երկու արտադրեալներուն գումարը, այսինքն գնդական հատուածին ծաւալը, կ'ըլլայ* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԵՖ}\,(2\text{ԲԵ}^2+2\text{ԴՖ}^2+2\text{ԲԵ}\times\text{ԴՖ}+\text{ԲԴ}^2)$ *արտադրեալը : Բայց ԵՖ ին զուգահեռական ԲՕ քաշելով կ'ունենանք* $\text{ԴՕ}=\text{ԴՖ}-\text{ԲԵ}$. *ուստի* $\text{ԴՕ}^2=\text{ԴՖ}^2-2\text{ԴՖ}\times\text{ԲԵ}+\text{ԲԵ}^2$ *(Գիրք Դ. Նախ. Թ.), եւ* $\text{ԲԴ}^2=\text{ԲՕ}^2+\text{ԴՕ}^2=\text{ԵՖ}^2+\text{ԴՖ}^2-2\text{ԴՖ}\times\text{ԲԵ}+\text{ԲԵ}^2$) *: Այս արժէքը դնելով* ԲԴ^2 *ին տեղը եւ վերածելով գնդական հատուածին ծաւալը ցուցընող արտադրեալը՝ կ'ունենանք* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԵՖ}\,(3\text{ԲԵ}^2+3\text{ԴՖ}^2+\text{ԵՖ}^2)$ *:*

Այս արտադրեալը սա երկու մասանց կրնանք բաժնել. $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԵՖ}\,(3\text{ԲԵ}^2\times3\text{ԴՖ}^2)$ *կամ* $\text{ԵՖ}\times\frac{1}{2}(\pi\text{ԲԵ}^2+\pi\text{ԴՖ}^2)$, *եւ* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԵՖ}^3$ *: Բայց առաջին մասն է հատուածին երկու խարսխաց գումարին կէսը, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը. եւ երկրորդը կը ցուցնէ ԵՖ տրամագիծը ունեցող գնդոյն ծաւալը. ուրեմն* որեւէ գնդական հատուածի մը ծաւալը հաւասար է անոր խարսխաց գումարին կիսոյն, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը, աւելնալ այն գնդոյն ծաւալը՝ որուն տրամագիծը հաւասար է հատուածին բարձրութեանը :

Հետ. *Երբ հատուածը միայն մէկ խարիսխ ունի,* $\text{ԲԻ}=0$, *եւ ԷՖ կ'ըլլայ ԱՖ. նաեւ հատուածին ծաւալը կ'ըլլայ* $\text{ԱՖ}\times\frac{1}{2}\pi\times\text{ԴՖ}^2$ *եւ* $\frac{1}{6}\pi\times\text{ԱՖ}^3$ *արտադրեալները. ուրեմն* մէկ խարիսխ ունեցող գնդական հատուածի մը ծաւալը հաւասար է նոյն խարսխին ու բարձրութեանն ունեցող գլանին ծաւալին կիսոյն, աւելնալ այն գնդոյն ծաւալը՝ որուն տրամագիծը հաւասար է հատուածին բարձրութեանը :

Ընդհանուր Պարագաներ.

Ա. Եթէ գլանի մը խարիսխի շառաւիղը՝ Շ ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, գլանին ծաւալը կ'ըլլայ $ֆ \times Շ^2 \times Բ$ արտադրեալը։

Բ. Եթէ կոնի մը խարիսխի շառաւիղը՝ Շ ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, կոնին ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{1}{3} ֆ \times Շ^2 \times Բ$ արտադրեալը։

Գ. Եթէ հատեալ բուրգի մը խարիսխաց շառաւիղները՝ Շ եւ Շ' ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, հատեալ բուրգին ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{1}{3} ֆ \times Բ\ (Շ^2 + Շ'^2 + Շ \times Շ')$ արտադրեալը։

Դ. Եթէ գնդոյ մը շառաւիղը Շ ով ցուցընենք, անոր ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{4}{3} ֆ \times Շ^3$ արտադրեալը։

Ե. Եթէ գնդական հատչի մը շառաւիղը՝ Շ ով, եւ անոր խարիսխը կազմող գօտւոյն բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, հատչին ծաւալը կ'ըլլայ $\frac{2}{3} ֆ \times Շ^2 \times Բ$ արտադրեալը։

Զ. Եթէ գնդական հատուածի մը խարիսխները՝ Խ եւ Խ' ով, եւ անոր բարձրութիւնը Բ ով ցուցընենք, հատուածին ծաւալը կ'ըլլայ $Բ \times \frac{1}{2}\ (Խ + Խ') + \frac{1}{6} ֆ \times Բ^3$ քանակութիւնը։ Երբ հատուածը միայն մէկ խարիսխ ունի, անոր ծաւալը կ'ըլլայ $Բ \times \frac{1}{2} Խ + \frac{1}{6} ֆ \times Բ^3$ քանակութիւնը։

ԳԻՐՔ Թ.

ԳՆԴԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Սահմանք։

1. Գնդոյ մը մակերեւոյթին որեւէ մասը որ մեծ բոլորակաց աղեղներով սահմանեալ է, **գնդական բազմանկիւն** կը կոչուի։

2. Այս աղեղները բազմանկեան **կողմերը** կը կոչուին, եւ այն կողմերուն մակարդակաց կազմած անկիւնները **բազմանկեան անկիւնները** են։

3. **Գնդական եռանկիւնը** այն բազմանկիւնն է որ միայն երեք կողմ ունի, եւ կողմանց իւրաքանչիւրը կիսաշրջանակէ մը փոքր է։

4. **Մահիկը** գնդոյ մը մակերեւոյթին այն մասն է, որ հասարակաց տրամագիծ մը ունեցող մեծ բոլորակաց երկու կիսաշրջանակներուն մէջտեղը կ'իյնայ։

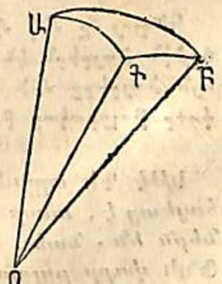
5. Գնդոյ մը այն մասը որ հասարակաց տրամագիծ մը ունեցող երկու մեծ կիսաբոլորակաց մէջտեղը կ'իյնայ, **գնդական սեպ** կը կոչուի։

6. **Գնդական բուրգը** գնդոյն այն մասն է որ գնդական բազմանկեան մը այլեւայլ կողմերուն մակարդակաց մէջտեղը կ'իյնայ. անոր **խարիսխը** գնդական բազմանկիւնն է, եւ անոր գագաթը՝ գնդոյն կեդրոնը։

7. Բոլորակի մը **բեւեռը** գնդոյն մակերեւոյթին այն կէտն է որ բոլորակին շրջանակին ամէն մէկ կէտէն հաւասարապէս հեռու է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ա. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

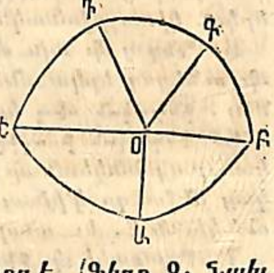
Ամէն գնդական եռանկեան որեւէ մէկ կողմը փոքր է միւս երկու կողմանց գումարէն։



ԱԲԳ գնդական եռանկեան անկիւններուն գագաթներէն ԱՕ, ԳՕ եւ ԲՕ շառաւիղները քաշէ։ ԱՕԲ, ԱՕԳ եւ ԳՕԲ մակարդակները Օ մարմնոյ անկիւնը կը կազմեն. եւ ԱՕԲ, ԱՕԳ եւ ԳՕԲ անկեանց չափերն են ԱԲ, ԱԳ եւ ԲԳ աղեղները, այսինքն գնդական եռանկեան կողմերը։ Բայց այն անկեանց որեւէ մէկը փոքր է միւս երկուքին գումարէն (Գիրք Զ. Նախ. ԺԹ.). ուրեմն ԱԲԳ եռանկեան որեւէ մէկ կողմը միւս երկու կողմանց գումարէն փոքր է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ գնդական բազմանկեան մը բոլոր կողմանց գումարը մեծ բոլորակի մը շրջանակէն փոքր է։



Եթէ ԱԲԳԴԵ գնդական բազմանկիւն է, անոր կողմանց գումարը մեծ բոլորակի մը շրջանակէն փոքր է։

Գնդոյն Օ կեդրոնէն ՕԱ, ՕԲ, ՕԳ, եւայլն շառաւիղները քաշէ։ Օ մարմնոյ անկիւնը կազմող ԱՕԲ, ԲՕԳ, ԳՕԴ, եւայլն մակարդակի անկեանց գումարը չորս ուղիղ անկիւններէ փոքր է (Գիրք Զ. Նախ. Ի.). ուրեմն այն անկեանց չափերն եղող ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, եւայլն կողմանց գումարը մեծ բոլորակի մը շրջանակէն փոքր է։

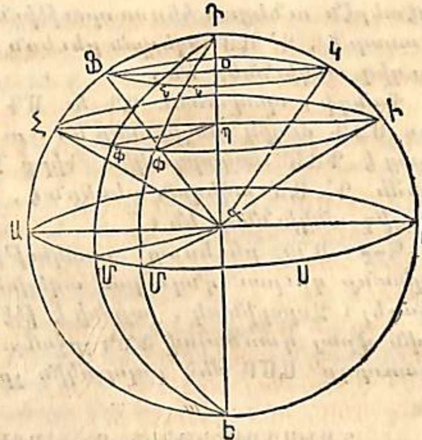
Հետ. Յայտնի է թէ գնդական եռանկեան մը կողմանց գումարը մեծ բոլորակի մը շրջանակէն փոքր է։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Գնդոյ մը մէկ մեծ բոլորակին բեւեռները այն տրամագծին ծայրերն են որ բոլորակին ուղղահայեաց է. Նաեւ այն ծայրերը մեծ բոլորակին զուգահեռական եղող բոլոր փոքր բոլորակաց բեւեռներն են։

Եթէ ԴԵ տրամագիծը ԱՄԲ մեծ բոլորակին ուղղահայեաց է, անոր Դ եւ Ե ծայրերը բոլորակին բեւեռներն են. Նաեւ ԱՄԲ ի զուգահեռական եղող ՀՓԻ եւ ՑՆԿ փոքր բոլորակներուն բեւեռներն են։

Քանզի ԴԳ ուղղահայեաց ըլլալով ԱՄԲ մակարդակին, ուղղահայեաց է ԳԱ, ԳՄ, ԳԲ եւայլն գծերուն (Գիրք Զ. Սահ. 1). ուստի ԴԱ, ԴՄ, ԴԲ, եւայլն ա-



ղեղներուն իւրաքանչիւրը մեծ բոլորակի մը շրջանակին մէկ քառորդն է. Նաեւ ԵԱ, ԵՄ, ԵԲ, եւայլն աղեղները նոյն չափը ունին. ուրեմն Դ եւ Ե կէտերը հաւասարապէս հեռու ըլլալով ԱՄԲ շրջանակին բոլոր կէտերէն՝ ԱՄԲ բոլորակին բեւեռներն են (Սահ. 7)։

Դարձեալ, ԴԳ շառաւիղը ԱՄԲ բոլորակին ուղղահայեաց ըլլալով անոր զուգահեռական եղող ՀՓԻ բոլորակին ալ ուղղահայեաց է. ուստի ՀՓԻ բոլորակին Պ կեդրոնէն կ՚անցնի (Գիրք Ը. Նախ. Ի. Հետ. 4). ուստի, եթէ ԴՀ, ԴՓ, ԴԻ, եւայլն ուղիղ գծերը քաշուին, անոնք իրարու հաւասար կ՚ըլլան (Գիրք Զ. Նախ. Ե.)։ Բայց, եթէ այս լարերը իրարու հաւասար են, ԴՀ, ԴՓ, ԴԻ, եւայլն աղեղներն իրարու հաւասար են. ուրեմն Դ՝ ՀՓԻ բոլորակին բեւեռն է։ Նոյն կերպով կրնայ ցուցուիլ թէ Ե կէտը անոր միւս բեւեռն է։

Հետ. 1. ԱՄԲ մեծ բոլորակին շրջանակին որեւէ մէկ կէտէն, ինչպէս Մ էն, մինչեւ բեւեռը քաշուած ՄԴ աղեղը շրջանակին մէկ չորրորդ մասն է, եւ քառորդ կը կոչուի։ Նաեւ այս քառորդը եւ ԱՄ աղեղը ուղիղ անկիւն մը կը կազմեն. քանզի, որովհետեւ ԴԳ ուղղահայեաց է ԱՄԳ մակարդակին, ԴԳ ին վրայէն անցնող ամէն մակարդակ, ինչպէս ԴՄԳ, ԱՄԳ մակարդակին ուղղահայեաց է (Գիրք Զ. Նախ. ԺԶ.) ուրեմն այն մակարդակաց անկիւնը, այսինքն ԱՄԴ անկիւնը, ուղիղ է։

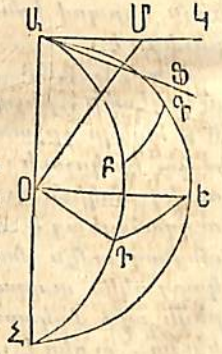
Հետ. 2. Հակադարձաբար, եթէ Դ կէտին՝ Ա եւ Մ կէտերէն ունեցած հեռաւորութիւնը քառորդի մը հաւասար է, Դ՝ ԱՄ աղեղան բեւեռն է, եւ ԴԱՄ ու ԴՄԱ ուղիղ անկիւններ են ։

Քանզի, որովհետեւ ԱԴ եւ ՄԴ քառորդ են, ԱԳԴ եւ ՄԳԴ ուղիղ անկիւններ են · ուստի ԴԳ ուղղահայեաց է ԳԱՄ մակարդակին (Գիրք Զ· Նախ· Դ·) · ուրեմն Դ՝ ԱՄ աղեղան բեւեռն է, եւ ԴԱՄ ու ԴՄԱ ուղիղ անկիւններ են ։

Դտ· Այս բեւեռաց յատկութիւնները գիտնալով կրնանք դիւրաւ գնդական աղեղներ եւ շրջանակներ քաշել ։ Զորօրինակ, յայտնի է թէ ԴՖ աղեղը Դ կէտին վրայ դառնալով ՖՆԿ շրջանակը կը քաշէ, եւ ԴԱ քառորդը՝ ԱՄԲ մեծ բոլորակին շրջանակը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Դ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ մեծ բոլորակի երկու աղեղներ իրար կը կտրեն, անոնց անկիւնը հաւասար է այն անկեան զոր այս աղեղներուն շօշափողները անոնց հատման կէտին վրայ կը կազմեն, եւ անկեան չափն է մեծ բոլորակի մը այն աղեղը որուն բեւեռը անկեան գագաթն է, եւ որ երկու աղեղներուն մէկէն միւսը կը տարուի ։

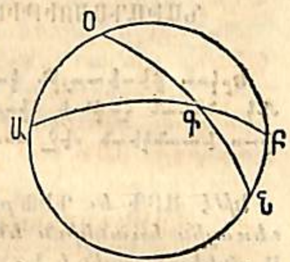


Եթէ ԱԲ եւ ԱԳ մեծ բոլորակի աղեղներ են, ԲԱԳ անկիւնը հաւասար է ՖԱ եւ ԿԱ շօշափողներուն ՖԱԿ անկեանը · նաեւ անոր չափն է ԴԵ աղեղը որուն բեւեռը Ա կէտն է ։

Քանզի ՖԱ շօշափողը, ԱԲ աղեղան մակարդակին վրայ, ԱՕ շառաւիղին ուղղահայեաց քաշուած է · նաեւ ԿԱ շօշափողը, ԱԳ մակարդակին վրայ, նոյն շառաւիղին ուղղահայեաց քաշուած է · ուրեմն ՖԱԿ անկիւնը հաւասար է ԱՕԲ եւ ԱՕԳ մակարդակաց ԲԱԳ անկեանը (Գիրք Զ· Սահ· 4) ։

Դարձեալ, եթէ ԱԴ եւ ԱԵ աղեղները քառորդ են, ՕԴ եւ ՕԵ ուղղահայեաց են ԱՕ ին, եւ ԴՕԵ անկիւնը մակարդակաց անկիւնն է · ուրեմն ԴԵ այն անկեան չափն է ։

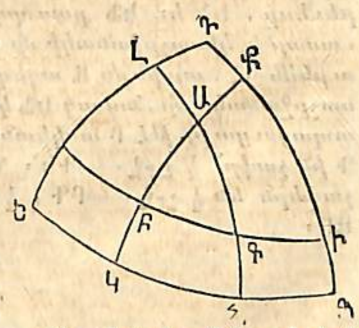
Հետ· 1· Կրնանք գնդական անկիւններ իրարու բաղդատել, եւ անկիւն մը ուրիշ անկեան մը հաւասար գծել անոնց չափերուն միջոցաւ ։



Հետ· 2· Երբ մեծ բոլորակի աղեղներ, ինչպէս ԱԲ եւ ՕՆ, իրար կը կտրեն, անոնց գագաթան անկիւնները իրարու հաւասար են · նաեւ յայտնի է թէ երկու առընթերակաց ՕԳԱ եւ ԱԳՆ անկեանց գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ե· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու գնդական եռանկիւններ այնպէս գծուած են, որ առաջինին անկեանց գագաթները երկրորդին կողմանց բեւեռներն են, երկրորդին անկեանց գագաթները առաջինին կողմանց բեւեռներն են ։



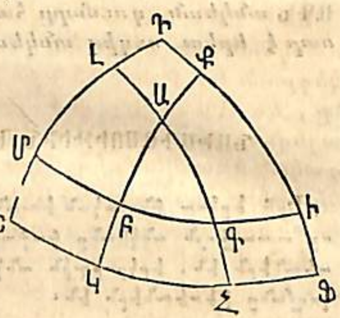
Եթէ Ա, Գ եւ Բ գագաթները ԴԵՖ եռանկեան ԵՖ, ԵԴ եւ ԴՖ կողմանց բեւեռներն են, նմանն Դ, Ե եւ Ֆ գագաթները ԲԳ, ԱԳ եւ ԱԲ կողմանց բեւեռներն են ։

Քանզի, որովհետեւ Ա գագաթը ԵՖ աղեղան բեւեռն է, ԱԵ քառորդ մըն է · եւ, որովհետեւ Գ գագաթը ԵԴ կողման բեւեռն է, ԳԵ քառորդ մըն է · ուրեմն Ե կէտը ԱԳ աղեղան բեւեռն է (Նախ. Գ. Հետ. 2)։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ Դ՝ ԲԳ կողման, եւ Ֆ՝ ԱԲ կողման բեւեռներն են։

Պար. Երբ երկու գնդական եռանկիւններէն մէկուն գագաթները միւսին կողմանց բեւեռներն են, անոնք բեւեռային կամ լրացուցիչ եռանկիւն կը կոչուին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Զ. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու բեւեռային կամ լրացուցիչ եռանկեանց որեւէ մէկ անկեան չափն է կիսաշրջանակ մը, նուազ այն կողմը որ միւս եռանկեան մէջ անոր դիմացը կ'իյնայ։

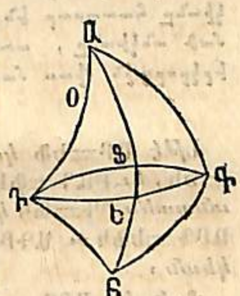


Եթէ ԱԲԳ եւ ԴԵՖ բեւեռային եռանկիւն են, Ա անկեան չափն է ½ շրջ.—ԵՖ։

Քանզի, որովհետեւ Ա գագաթը ԿՀ աղեղան բեւեռն է, ԿՀ աղեղը Ա անկեան չափն է (Նախ. Դ.)։ Բայց որովհետեւ Ե գագաթը ԱՀ ին բեւեռն է, եւ Ֆ գագաթը՝ ԱԿ ին բեւեռը, ԵՀ եւ ԿՖ քառորդ են. ուստի ԵՀ+ԿՖ հաւասար է կիսաշրջանակի մը. Բայց ԵՀ+ԿՖ=ԵՖ+ԿՀ. ուրեմն ԿՀ, այսինքն Ա աղեղան չափը, հաւասար է կիսաշրջանակի մը, նուազ ԵՖ կողմը։ Նոյն կերպով կրնայ ապացուցուիլ թէ Բ անկեան չափն է ½ շրջ.—ԴՖ, եւ Գ ին չափը՝ ½ շրջ.—ԴԵ։ Նաեւ Դ, Ե եւ Ֆ անկեանց չափերն են ½ շրջ.—ԲԳ, ½ շրջ.—ԱԳ, եւ ½ շրջ.—ԱԲ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Է. ՀԱՅՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու աղեղ այնպէս գծուին որ ծանօթ գնդական եռանկեան մը որեւէ երկու անկեանց գագաթները իբրեւ կեդրոն ունենան, եւ եռանկեան երրորդ անկեան գագաթէն անցնելով ուրիշ կէտի մը վրայ իրար կտրեն, եւ յետոյ այս կէտէն եւ առաջին երկու անկեանց գագաթներուն վրայէն անցնող մեծ բոլորակի երկու աղեղներ գծուին, գծուած եռանկեան կողմերն ու անկիւններն հաւասար կ'ըլլան ծանօթ եռանկեան կողմերուն եւ անկիւններուն։



Եթէ ԱԲԳ ծանօթ գնդական եռանկեան Ա կէտը ԴԵԳ աղեղան կեդրոնն է, Բ ալ՝ ԴՖԳ ին կեդրոնը, եւ ԱԴ ու ԲԴ մեծ բոլորակի աղեղներ են, անատեն ԱԴԲ գնդական եռանկեան կողմերն ու անկիւնները հաւասար են ԱԲԳ եռանկեան կողմերուն եւ անկիւններուն։

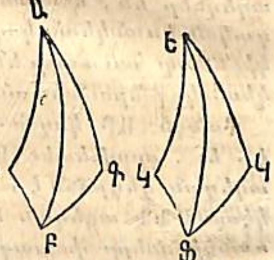
Քանզի ԱԲ կողմը հասարակաց է. եւ, որովհետեւ Ա կէտը ԴԵԳ աղեղան կեդրոնն է, ԱԳ=ԱԴ. նաեւ, որովհետեւ Բ կէտը ԴՖԳ աղեղան կեդրոնն է, ԲԴ=ԲԳ. ուրեմն եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարակողմ են։

Եթէ 0 կէտը գնդոյն կեդրոնն է, կրնանք մարմնոյ անկիւն մը ըմբռնել Դ0Ա, Դ0Բ եւ Բ0Ա մակարդակի երեսներէն կազմուած 0 կէտին վրայ. նաեւ կրնանք ըմբռնել ուրիշ մը Ա0Բ, Ա0Գ եւ Բ0Գ մակարդակի երեսներէն կազմուած 0 կէտին վրայ։ Բայց, որովհետեւ ԱԲԳ եռանկեան կողմերը հաւասար են ԱԲԴ եռանկեան կողմերուն, այս երկու մարմնոյ անկեանց մէկը կազմող մակարդակի անկիւնները հաւասար են միւսը կազմող մակարդակի անկեանց. ուստի անոնց մակարդակները իրարու միեւնոյն հակումն ունին (Գիրք Զ. Նախ. ԻԱ.). ուրեմն ԴԱԲ հաւասար է ԲԱԳ անկեան, ԴԲԱ՝ ԱԲԳ անկեան, եւ ԱԴԲ՝ ԱԳԲ անկեան. այսինքն, ԱԴԲ եռանկեան անկիւններն ու կողմերը հաւասար են ԱԲԳ եռանկեան անկիւններուն եւ կողմերուն։

Դաս. Որովհետեւ համանուն կողմերը նոյն դիրքը չունին. այս երկու եռանկիւնները չեն կրնար մէկը միւսին վրայ այնպէս դրուիլ որ զուգընթանան. եւ այսպիսի եռանկիւններ համաչափական կը կոչուին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ը. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ միեւնոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդոց վրայ երկու եռանկեանց մէկուն երկու կողմերն ու անոնց կազմած անկիւնը հաւասար են միւսին երկու կողմերուն և անոնց կազմած անկեանը, ամբողջոյն միւս մասերն ալ հաւասար են երկրորդին միւս մասերուն։



Եթէ ԱԲ=ԵԶ կողման, ԱԳ=ԵԿ, եւ ԲԱԳ=ԶԵԿ անկեան, անատեն ԲԳ=ԶԿ կողման, եւ ԱԲԳ=ԵԶԿ ու ԱԳԲ=ԵԿԶ անկեան։

Քանզի ԱԲԳ եռանկիւնը կրնայ դրուիլ կամ ԵԶԿ կամ անոր համաչափական եղող ԵԿԶ եռանկեան վրայ մակարդակի եռանկեանց պէս (Գիրք Ա. Նախ. Ի.) եւ անոնք զուգընթաց պիտի ըլլան։

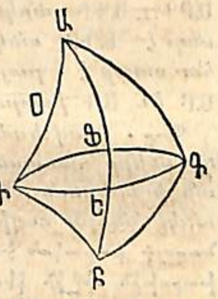
ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Թ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ միեւնոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդոց վրայ երկու եռանկեանց մէկուն երկու անկիւններն ու անոնց միջոցեալ կողմը միւսին երկու անկեանց և անոնց միջոցեալ կողման հաւասար են, ամբողջոյն միւս մասերն ալ հաւասար են երկրորդին միւս մասերուն։

Քանզի եռանկեանց մէկը կամ անոր համաչափական եռանկիւնը միւսին վրայ կրնայ դրուիլ մակարդակի եռանկեանց պէս (Գիրք Ա. Նախ. Զ.), եւ անոնք պիտի զուգընթանան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ Ժ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ միեւնոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդոց վրայ երկու եռանկիւն փոխադարձաբար հաւասարակողմ են, անոնք փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, իրենց հաւասար անկիւնները իրենց հաւասար կողմերուն դէմառդէմ ըլլալով։

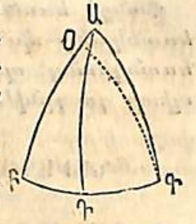


Այս նախադասութեան ճշմարտութիւնը յայտնի է Է. նախադասութենէն ուր ապացուցուած է թէ երեք ծանօթ կողմերէն, ինչպէս ԱԲ, ԱԳ եւ ԲԳ, միայն երկու իրարմէ տարբեր եռանկիւն, ԱԲԳ եւ ԱԲԴ, կրնան կազմուիլ, եւ թէ անոնք իրարու հաւասար են իրենց բոլոր մասանց նկատմամբ. ուրեմն փոխադարձաբար հաւասարակողմ եռանկիւնք փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են. եւ յայտնի է թէ հաւասար անկիւնները հաւասար կողմանց դէմառդէմ կ'ըլլան։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. ՀԱՑԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկկողմնահաւասար գնդական եռանկեան մը հաւասար կողմերուն դէմացի անկիւնները իրարու հաւասար են. և հակադարձաբար, երբ գնդական եռանկեան մը երկու անկիւններն իրարու հաւասար են, եռանկիւնը երկկողմնահաւասար է։

Նախ. Երբ ԱԲ=ԱԳ, Գ=Բ անկեան։ Քանզի, եթէ ԱԴ աղեղը քաշուի մինչեւ ԲԳ ին միջին կէտը, ԱԲԴ եւ ԱԴԳ եռանկեանց մէջ կ'ունենանք ԱԲ=ԱԳ կողման, ԲԴ=ԴԳ կողման, եւ ԱԴ հասարակաց է. ուստի եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են. ուրեմն Բ=Գ անկեան:



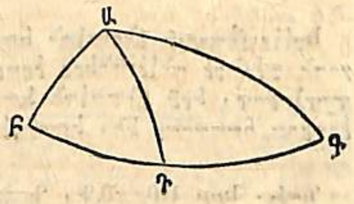
Երկրորդ. Երբ Բ=Գ անկեան, ԱԳ=ԱԲ կողման: Եթէ հաւասար չեն, ենթադրենք թէ ԱԲ մեծն է. ԱԲ էն ԲՕ կտրէ ԱԳ ին հաւասար, եւ ՕԳ քաշէ: ԲՕ եւ ԲԳ երկու կողմերը հաւասար են ԱԳ եւ ԲԳ երկու կողմերուն, եւ ՕԲԳ=ԱԳԲ անկեան. ուստի ԲՕԳ եւ ԱԳԲ եռանկեանց միւս մասերը հաւասար են (Նախ. Ը.). ուրեմն ՕԳԲ=ԱԲԳ անկեան: Բայց ենթադրութեամբ ԱԲԳ=ԱԳԲ անկեան. ուստի ՕԳԲ անկիւնը հաւասար է ԱԳԲ անկեան. այսինքն, մաս մը ամբողջին հաւասար է. բայց ասիկա անկարելի բան է. ուրեմն ԱԲ եւ ԱԳ իրարու հաւասար են:

Պոր. Որովհետեւ ԲԱԴ եռանկեան կողմերն ու անկիւնները հաւասար են ԴԱԳ եռանկեան կողմերուն ու անկիւններուն, ԱԴԲ=ԱԴԳ անկեան, եւ այս երկու անկիւններն ուղիղ են. ուրեմն այն աղեղը որ երկհաւասարասրունք գնդական եռանկեան մը գագաթէն կը տարուի մինչեւ խարիսխին միջին կէտը, խարիսխին ուղղահայեաց է, և գագաթնանկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն գնդական եռանկեան մեծ կողմը մեծ անկեան դէմը կ'ըլլայ. և, հակադարձաբար, մեծ անկեանը՝ մեծ կողման դէմը:

Նախ. Եթէ Ա մեծ է Բ անկիւնէն, ԲԳ մեծ է ԱԳ կողմէն: ԲԱԴ անկիւնը գծէ ԱԲԴ անկեան հաւասար. անատեն ԱԴ=ԴԲ (Նախ. ԺԱ.). բայց ԱԴ+ԴԳ>ԱԳ. ուրեմն ԲԴ+ԴԳ, կամ ԲԳ >ԱԳ:



Երկրորդ. Եթէ ԲԳ մեծ է ԱԳ կողմէն, ԲԱԳ մեծ է ԱԲԳ անկիւնէն: Քանզի, եթէ ԲԱԳ հաւասար ըլլար ԱԲԳ անկեան, ԲԳ հաւասար պիտի ըլլար ԱԳ կողման. եւ, եթէ ԲԱԳ փոքր ըլլար ԱԲԳ անկիւնէն, ԲԳ ալ փոքր կ'ըլլար ԱԳ կողմէն. բայց ԲԳ մեծ է ԱԳ էն. ուրեմն ԲԱԳ անկիւնը մեծ է ԱԲԳ անկիւնէն:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ միեւնոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդոց վրայ երկու եռանկիւն փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, անոնք փոխադարձաբար հաւասարակողմ են:

Եթէ Ա եւ Բ՝ փոխադարձաբար հաւասար եռանկիւնները ցուցընեն, եւ Փ ու Պ՝ անոնց բեւեռային եռանկիւնները, յայտնի է թէ Փ եւ Պ փոխադարձաբար հաւասարակողմ են (Նախ. Զ.). ուստի փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են (Նախ. Ժ.). եւ, որովհետեւ Փ եւ Պ փոխադարձաբար հաւասարանկիւն են, կը հետեւի թէ անոնց Ա եւ Բ բեւեռային եռանկիւնները փոխադարձաբար հաւասարակողմ են:

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԴ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

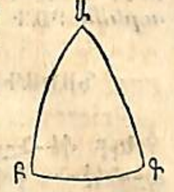
Որեւէ գնդական եռանկեան մը բոլոր անկեանց գումարը վեց ուղիղ անկիւնէ փոքր, և երկուքէ մեծ է:

Նախ. Որովհետեւ գնդական եռանկեան մը որեւէ մէկ անկիւնը երկու ուղիղ անկիւնէ փոքր է, յայտնի է թէ երեքին գումարը վեց ուղիղ անկիւնէ փոքր է:

Երկրորդ. Որովհետեւ գնդական եռանկեան մը որեւէ մէկ անկեան չափը հաւասար է մեծ բոլորակի մը կիսաշրջանակին, նուազ բեւեռային եռանկեան այն կողմը որ անոր դէմը կ'իյնայ (Նախ. Զ.), յայտնի է թէ երեքին չափերը հաւասար են երեք կիսաշրջանակներու, նուազ բեւեռային եռանկեան երեք կողմերուն գումարը.

բայց այս գումարը մէկ շրջանակէն փոքր է (Նախ. Բ.). ուստի երեք կիսաշրջանակներուն եւ այս գումարին տարբերութիւնը կիսաշրջանակէ մը մեծ է. ուրեմն գնդական եռանկեան մը անկեանց գումարը երկու ուղիղ անկիւնէ մեծ է։

Պար. Երբ գնդական եռանկեան մը մէջ, ինչպէս ԱԲԳ, երկու անկիւններ, ինչպէս Բ եւ Գ, ուղիղ են, Ա գագաթը ԲԳ խարսխին բեւեռն է. նաեւ ԱԲ ու ԱԳ կողմերը քառորդ են (Նախ. Գ. Հետ. 2), եւ եռանկիւնը երկուղղանկիւնեայ կը կոչուի։

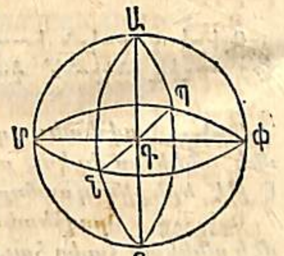


Երբ Ա ալ ուղիղ անկիւն է, բոլոր կողմերը քառորդ են, եւ եռանկիւնը եռուղղանկիւնեայ կը կոչուի։ Յայտնի է թէ գնդոյ մը վրայ ութ եռուղղանկիւնայ՚ն եռանկիւն կրնան գծուիլ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԵ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մահիկի մը մակերեւոյթը գնդոյն մակերեւոյթին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս մահիկին անկիւնը՝ չորս ուղիղ անկեանց. կամ ինչպէս այն անկիւնը չափող աղեղը՝ ամբողջ շրջանակին։

Եթէ ԱՄԲՆ մահիկ է, անոր մակերեւոյթը գնդոյն մակերեւոյթին այնպէս կը համեմատի, ինչպէս ՆԳՄ անկիւնը՝ չորս ուղիղ անկեանց. կամ ինչպէս ՄՆ աղեղը՝ մեծ բոլորակի մը շրջանակին։



Նախ. Ենթադրենք թէ ՄՆ աղեղը եւ ՄՆՓՊ շրջանակը հասարակաց չափ ունին, եւ մէկը միւսին այնպէս կը համեմատի, զորօրինակ, ինչպէս 5ը՝ 48ին։ Եթէ շրջանակը 48 հաւասար մասանց բաժնուի, ՄՆ աղեղը անոնցմէ 5 հատը պիտի ունենայ.

եւ եթէ, Ա բեւեռէն քառորդներ քաշուին մինչեւ բաժանման այլեւայլ կէտերը, ԱՄՆՓՊ կիսագունդը 48 իրարու հաւասար եռանկեանց կը բաժնուի. ուստի ամբողջ գունդը 96 հատ կ'ունենայ որոնցմէ 10 հատը ԱՄԲՆ մահիկին վրայ կ'իյնան. ուրեմն մահիկը գնդոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս 10ը՝ 96ին, կամ ինչպէս 5ը՝ 48ին. այսինքն, ինչպէս ՄՆ աղեղը՝ ամբողջ շրջանակին։

Երկրորդ. Եթէ ՄՆ աղեղը եւ շրջանակը հասարակաց չափ չունին, կրնայ ապացուցուիլ թէ մահիկը գնդոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս աղեղը՝ շրջանակին (Գիրք Գ. Նախ. ԺԷ.)։

Հետ. 1. Նոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդաց վրայ երկու մահիկ իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս անոնց անկիւնները։

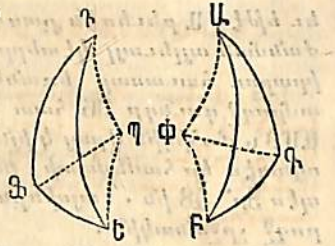
Հետ. 2. Գնդոյ մը մակերեւոյթը հաւասար է ութ եռուղղանկիւնային եռանկեանց (Նախ. ԺԴ. Պար.). ուստի, եթէ Ե ցուցընէ այն եռանկեանց մէկուն մակերեսը, 8Ե պիտի ցուցընէ գնդոյն մակերեւոյթը. ուրեմն, եթէ ուղիղ անկիւն մը միութիւն համարինք, Ա անկիւն ունեցող մահիկին մակերեսը կ'ըլլայ 2Ա×Ե արտադրեալը. քանզի 4:Ա::8Ե:2Ա×Ե։ Այս համեմատութեան մէջ Ա՝ միութեան այնպէս կը համեմատի, ինչպէս մահիկին անկիւնը՝ ուղիղ անկեան մը։

Պար. ԱՄԲ եւ ԱՆԲ մակարդակաց մէջտեղի գնդական սեպը ամբողջ գնդոյն այնպէս կը համեմատի, ինչպէս Ա անկիւնը՝ չորս ուղիղ անկեանց։ Քանզի գնդական սեպեր հաւասար են, երբ անոնց խարիսխները կազմող մահիկներն հաւասար են. ուրեմն նոյն գնդոյն կամ հաւասար գնդերու վրայ եղող սեպեր իրարու այնպէս կը համեմատին, ինչպէս զանոնք սահմանող մակարդակաց կազմած անկիւնները։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԶ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Համաչափական գնդական եռանկիւններ համազօր են։

Եթէ ԱԲԳ եւ ԴԵԶ համաչափական եռանկիւնի են, այսինքն, եթէ ԱԲ=ԴԵ, ԱԳ=ԴԶ եւ ԳԲ=ԵԶ, ԱԲԳ ին մակերեսը հաւասար է ԴԵԶ ին մակերեսին։



Այս եռանկեանց հաւասար կողմերը նոյն դիրքը չունին, եւ անոր համար եռանկիւնները չեն կրնար մէկը միւսին վրայ այնպէս դրուիլ որ զուգընթաց ըլլան։ Ա, Բ ու Գ կէտերուն վրայէն անցնող փոքր բոլորակին Փ բեւեռէն՝ ՓԱ, ՓԳ ու ՓԲ իրարու հաւասար աղեղները քաշէ (Նախ. Գ.)․ յետոյ ԴԶՊ անկիւնը գծէ ԱԳՓ ին հաւասար, ԶՊ աղեղը՝ ԳՓ ին հաւասար, նաեւ գծէ ԴՊ եւ ՊԵ աղեղները։

ԴԶ եւ ԶՊ հաւասար են ԱԳ ու ԳՓ կողմերուն, եւ ԴԶՊ=ԱԳՓ անկեան․ ուստի ԴԶՊ եւ ԱԳՓ եռանկեանց բոլոր մասերը փոխադարձաբար հաւասար են (Նախ. Ը.)․ ուրեմն ԴՊ=ԱՓ կողման, եւ ԴՊԶ=ԱՓԳ անկեան։

Որովհետեւ ԴԶԵ=ԱԳԲ անկեան (Նախ. Ժ.), ԴԶԵ—ԴԶՊ կամ ՊԶԵ=ԱԳԲ—ԱԳՓ կամ ՓԳԲ անկեան․ նաեւ ՊԶ եւ ԶԵ հաւասար են ՓԳ ու ԳԲ անկեանց․ ուրեմն ԶՊԵ եւ ԳՓԲ եռանկեանց միւս մասերը փոխադարձաբար հաւասար են (Նախ. Ը.)․ ուրեմն ՊԵ=ՓԲ կողման, եւ ԶՊԵ=ԳՓԲ անկեան։

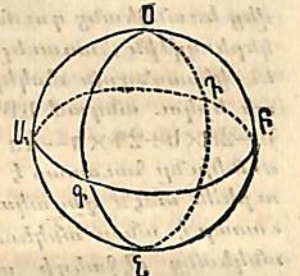
Որովհետեւ ԴԶՊ եւ ԱԳՓ եռանկիւնները երկկողմնազոյգ են, եթէ մէկը միւսին վրայ դրուի, անոնք պիտի զուգընթանան․ ուրեմն իրարու հաւասար են։ Նման պատճառաւ ԶՊԵ=ԳՓԲ, եւ ԴՊԵ=ԱՓԲ եռանկեան․ ուստի ԴՊԶ+ԶՊԵ—ԴՊԵ=ԱՓԳ+ԳՓԲ—ԱՓԲ, կամ ԴԶԵ=ԱԲԳ եռանկեան․ ուրեմն ԱԲԳ եւ ԴԵԶ համաչափական եռանկիւնները հաւասար մակերեւոյթներ ունին։

Պոր. Երբ Փ եւ Պ բեւեռները եռանկեանց ներսը կ'իյնան, ԴԵԶ հաւասար կ'ըլլայ ԴՊԶ, ԶՊԵ եւ ԴՊԵ եռանկեանց գումարին․ նաեւ ԱԲԳ եռանկիւնը հաւասար կ'ըլլայ ԱՓԳ, ԳՓԲ եւ ԱՓԲ եռանկեանց գումարին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԷ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու մեծ բոլորակներու շրջանակներն իրար կը կտրեն կիսագնդոյ մը վրայ, անոնց կազմած երկու եռանկեանց մակերեսաց գումարը հաւասար է այն մահիկին մակերեսին, որուն անկիւնը շրջանակներուն կազմած անկեանը հաւասար է։

Եթէ ՕԱԳԲԴ կիսագունդ է, եւ ԱՕԲ ու ԳՕԴ մեծ բոլորակի շրջանակ են, ԱՕԳ եւ ԲՕԴ եռանկեանց մակերեսաց գումարը հաւասար է ԲՕԴ անկիւնն ունեցող մահիկի մը մակերեսին։

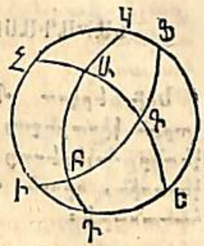


Երկնցուր ՕԲ եւ ՕԴ աղեղները միւս կիսագնդոյն վրայ մինչեւ Ն կէտին վրայ իրար կտրեն․ ՕԲՆ եւ ԱՕԲ կիսաշրջանակ են․ ուստի ԱՕԲ—ՕԲ=ՕԲՆ—ՕԲ, կամ ԲՆ=ԱՕ։ Նման պատճառաւ, ԴՆ=ԳՕ, եւ ԲԴ=ԱԳ․ ուստի ԱՕԳ եւ ԲԴՆ եռանկիւնները համաչափական եռանկիւնի են (Նախ. Ժ.)․ ուրեմն համազօր են (Նախ. ԺԶ.)․ բայց ԲԴՆ եւ ԲՕԴ եռանկեանց մակերեսաց գումարը հաւասար է ԲՕԴ անկիւնն ունեցող ՕԲՆԴՕ մահիկին մակերեսին․ ուրեմն ԱՕԳ+ԲՕԴ համազօր է ԲՕԴ անկիւնն ունեցող մահիկին։

Պոր. Յայտնի է թէ ԱՕԳ եւ ԲՕԴ խարիսխներն ունեցող գնդական բուրգերուն գումարը հաւասար է ԲՕԴ անկիւնն ունեցող գնդական սեպին ծաւալին։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԸ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ գնդական եռանկեան մակերեւոյթը հաւասար է անոր անկեանց գումարին եւ երկու ուղիղ անկեանց տարբերութեանը, բազմապատկեալ եռուղղանկիւնային եռանկիւնով։



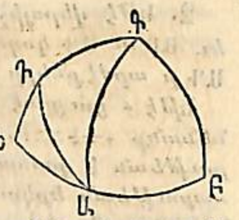
ԱԲԳ գնդական եռանկեան կողմերը երկնցուր մինչեւ որ անոնք անկէ դուրս եղող որեւէ մեծ շրջանակ մը, ինչպէս ԴԵՖԿ, կտրեն ։ ԱԴԵ եւ ԱԿՀ եռանկեանց գումարը համազօր է Ա անկիւնն ունեցող մահիկին մակերեւոյթին (Նախ․ ԺԷ․) ․ ուստի հաւասար է 2Ա×Ն (Նախ․ ԺԵ․ Հետ․ 2) ․ նաեւ ԲԿՖ+ԲԻԴ=2Բ×Ն, եւ ԳԻՀ+ԳՖԵ=2Գ×Ն ։ Բայց այս վեց եռանկեանց գումարը հաւասար է կիսագնդոյն մակերեւոյթին, առաւել երկու անգամ ԱԲԳ եռանկիւնը ․ եւ կիսագնդոյն մակերեւոյթը հաւասար է 4Նի ․ ուստի երկու անգամ ԱԲԳ եռանկիւնը հաւասար է 2Ա×Ն+2Բ×Ն+2Գ×Ն—4Ն քանակութեան, կամ ԱԲԳ եռանկիւնը հաւասար է (Ա+Բ+Գ—2) Ն քանակութեան ․ ուրեմն ամէն գնդական եռանկեան մակերեւոյթը հաւասար է անոր անկեանց գումարին եւ երկու ուղիղ անկեանց մէջտեղի տարբերութեանը, բազմապատկեալ եռուղղանկիւնային եռանկիւնով ։

Պար․ Եթէ ուղիղ անկիւնը միութիւն համարինք, երբ անկեանց իւրաքանչիւրը $\frac{4}{3}$ է, երեք անկեանց գումարը կ'ըլլայ 4 ուղիղ անկիւն, եւ եռանկեան մակերեսը կ'ըլլայ 4—2 կամ 2 եռուղղանկիւնային եռանկիւն, այսինքն, գնդոյն ամբողջ մակերեւոյթին մէկ չորրորդ մասը ։

ՆԱԽԱԴԱՍՈՒԹԻՒՆ ԺԹ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որեւէ գնդական բազմանկեան մակերեւոյթը հաւասար է այն արտադրելոյն որուն բազմապատկիչներն են անոր բոլոր անկեանց գումարը նուազ երկու ուղիղ անկիւն, անոր կողմանց թիւը՝ նուազ երկու, եւ եռուղղանկիւնային եռանկիւնը ։

ԱԲԳԴԵ գնդական բազմանկեան մէկ գագաթէն, ինչպէս Ա, մինչեւ միւս գագաթները տրամանկիւններ

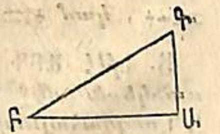


քաշէ ․ բազմանկիւնը քանի մը եռանկեանց կը բաժնուի որոնց թիւը հաւասար է բազմանկեան կողմանց թուոյն նուազ երկու ։ Բայց իւրաքանչիւր եռանկեան մակերեւոյթը հաւասար է անոր անկեանց գումարին եւ երկու ուղիղ անկեանց տարբերութեանը, բազմապատկեալ եռուղղանկիւնային եռանկիւնով ․ նաեւ բազմանկեան անկեանց գումարը հաւասար է բոլոր եռանկիւններուն անկեանց գումարին ․ ուրեմն բազմանկեան մակերեւոյթը հաւասար է այն արտադրելոյն որուն բազմապատկիչներն են անոր անկեանց գումարը նուազ երկու ուղիղ անկիւն, անոր կողմանց թիւը նուազ երկու, եւ եռուղղանկիւնային եռանկիւնը ։

Պար․ Եթէ Գ ցուցընէ գնդական եռանկեան մը բոլոր անկեանց գումարը, Թ անոր կողմանց թիւը, եւ Ն եռուղղանկիւնային եռանկիւնը, բազմանկեան մակերեւոյթը կ'ըլլայ (Գ—2(Թ—2))×Ն արտադրեալը ։

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՔ

1․ Եթէ ԱԲԳ ուղղանկիւն եռանկեան ԲԱ կողմը 3 է, եւ ԲԳ ու ԱԳ կողմանց գումարը՝ 9, ի՞նչ են ԲԳ ի եւ ԱԳ ի արժէքները ։



Եթէ ք ցուցընէ ԲԳ ի արժէքը, եւ ե՝ ԱԳ ինը, կ'ունենանք ք+ե=9, եւ ք²=9+ե² (Գիրք Գ․ Նախ․ ԺԱ․) ։

Եթէ առաջին հաւասարութեան ե քանակութիւնը երկրորդ անդամին փոխադրենք, եւ յետոյ երկու անդամները քառակուսենք, կ'ունենանք ք²=81—18ե+ե² ․ այս հաւասարութիւնը երկրորդ հաւասարութենէն հանէ եւ կը մնայ 0=72—18ե, ուրեմն 18ե=72, եւ ե=4 ։

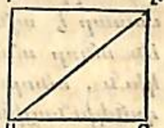
Պ․ ԱԳ=4, եւ ԲԳ=5 ։

2. Եթէ վերոյիշեալ եռանկեան ԲԳ հակուղիղն է 5, եւ ԱԲ ու ԱԳ կողմանց գումարը՝ 7, ի՞նչ են ԲԱ ի եւ ԱԳ ի արժէքները։

Եթէ + ցուցընէ ԱԲ ի արժէքը, եւ ե՝ ԱԳ ինը, կ'ունենանք $+ + ե = 7$, եւ $+^2 + ե^2 = 25$։ Առաջին հաւասարութեան ե քանակութիւնը փոխադրելով, եւ հաւասարութեան երկու անդամները քառակուսելով կ'ունենանք $+^2 = 49 - 14ե + ե^2$. ուստի $2ե^2 - 14ե = -24$, կամ $ե^2 - 7ե = -12$. ուրեմն $ե = 4$ կամ 3։

Պ. ԱԲ$=$3 կամ 4, եւ ԱԳ$=$4 կամ 3։

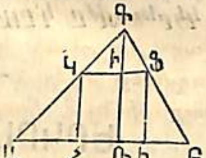
3. Եթէ ԱԲԳԴ ուղղանկեան ԱԳ տրամանկիւնն է 10, եւ անոր շրջագիծը՝ 28, ի՞նչ են կողմանց արժէքները։



Եթէ բոլոր շրջագիծն է 28, անոր կէսը, այսինքն ԱԲ+ԲԳ, 14 է. ուրեմն, եթէ + ցուցընէ ԱԲ ի արժէքը, եւ ե՝ ԱԳ-ինը, կ'ունենանք $+ + ե = 14$, եւ $+^2 + ե^2 = 100$։

Պ. ԱԲ$=$8 կամ 6, եւ ԲԳ$=$6 կամ 8։

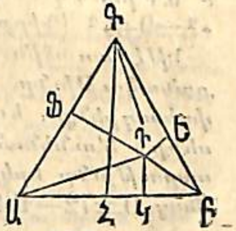
4. Եթէ ԱԲԳ եռանկեան խարսխին արժէքն է բ, եւ անոր ԳԴ բարձրութեան արժէքը՝ ա, ի՞նչ է ներսը գծուած ՀԵՑԿ քառակուսւոյն մէկ կողման արժէքը։



Եթէ + ցուցընէ ԿՀ ի արժէքը, որովհետեւ ԱԳԲ եւ ԿԳՑ եռանկիւնները իրարու նման են, ԱԲ : ԳԴ :: ԿՑ : ԳԻ, կամ բ : ա :: + : ա $-$ +. ուստի աբ $-$ բ+ $=$ ա+, կամ $+ = \frac{աբ}{ա+բ}$։

Պ. $\frac{աբ}{ա+բ}$։

5. Եթէ ԱԲԳ հաւասարակողմ եռանկեան մէջ Դ կէտէն քաշուած ԴԿ ուղղահայեացին արժէքն է ա, ԴԵ-ինը՝ բ, եւ ԴՑ ինը՝ գ, ի՞նչ է եռանկեան մէկ կողման արժէքը։



ԱԲ խարսխին ուղղահայեաց ԳՀ քաշէ. եթէ 2+ ցուցընէ ԱԲ ի արժէքը, ԱՀ ինը + կ'ըլլայ, եւ ԳՀ $=$ $\sqrt{ԱԳ^2 - ԱՀ^2} = \sqrt{4+^2 - +^2} = \sqrt{3+^2} = +\sqrt{3}$.

Բայց, որովհետեւ եռանկեան մը մակերեսը հաւասար է անոր խարսխին կիսոյն, բազմապատկեալ անոր բարձրութեամբը (Գիրք Դ. Նախ. Զ.),

$$ԱԳԲ \text{ եռանկիւնը} = \tfrac{1}{2} ԱԲ \times ԳՀ = + \times +\sqrt{3}.$$

նաեւ $$ԱԴԲ \text{ եռանկիւնը} = + \times ա = ա+,$$

$$ԲԳԴ \text{ եռանկիւնը} = + \times բ = բ+,$$

եւ $$ԱԳԴ \text{ եռանկիւնը} = + \times գ = գ+։$$

Բայց վերջին երեք եռանկեանց գումարը հաւասար է ԱԳԲ եռանկեան. ուստի

$$+^2\sqrt{3} = ա+ + բ+ + գ+ = + (ա+բ+գ),$$

կամ $$+\sqrt{3} = ա+բ+գ. \text{ ուրեմն } + = \frac{ա+բ+գ}{\sqrt{3}}։$$

Պար. Որովհետեւ ԳՀ$=+\sqrt{3}$, այն գիծը հաւասար է ա+բ+գ քանակութեան. այսինքն հաւասարակողմ եռանկեան մը որեւէ մէկ գագաթէն դիմացի կողման ուղղահայեաց քաշուած գիծը հաւասար է այն երեք գծերուն գումարին որոնք եռանկեան մէջի որեւէ մէկ կէտէն եռանկեան կողմանց ուղղահայեաց կը քաշուին։

6. Եռանկեան մը գագաթէն խարսխին ուղղահայեաց քաշուած գծին երկայնութիւնն է 8 ոտք. եւ կողմանց մէկուն երկայնութիւնը՝ 10, ու միւսինը՝ 15 ոտք. ի՞նչ է խարսխին երկայնութիւնը։

Պ. 18·69 ոտք։

7. Եթէ բոլորակի մը տրամագիծն է 12, եւ անոր մէկ լարը՝ 4, ի՞նչ է կեդրոնէն լարին ուղղահայեաց քաշուած գիծը։ Պ. $4\sqrt{2}$։

8. Եթէ բոլորակի մը տրամագիծն է 4, ի՞նչ է ասոր ներսը գծուած հաւասարակողմ եռանկեան մակերեսը։

Պ. $3\sqrt{3}$։

9. Եթէ գնդոյ մը տրամագիծն է 12 ոտք, ի՞նչ է անոր ծաւալը։ Պ. 904·78 խոր. ոտք։

10. Եթէ գնդոյ մը տրամագիծն է 12 ոտք, ի՞նչ է մէկ խարիսխ ունեցող այն հատուածին ծաւալը որուն բարձրութիւնը 3 ոտք է։ Պ. 141·372 խոր. ոտք։

11. Եթէ գնդոյ մը մակերեւոյթն է 68 +առ. ոտք, ի՞նչ է անոր տրամագիծը։ Պ. 4·652 ոտք։

12. Եթէ գնդոյ մը մակերեւոյթն է 68 քառակուսի

ոտք, ի՞նչ է մէկ խարիսխ ունեցող այն հատուածին մակերեւոյթը, որուն բարձրութիւնն է 2 ոտք :

Պ. 29·229+քառ. ոտք :

13. Ի՞նչ է վերոյիշեալ գնդոյն ծաւալը. եւ ի՞նչ՝ այն հատուածին ծաւալը :

Պ. { Գնդոյն ծաւալը 52·71 խոր. ոտք :
Հատուածին ծաւալը 20·85 » » :

14. Եթէ մէկ խարիսխ ունեցող գնդական հատուածի մը խարսխի տրամագիծն է 16 ոտք, եւ հատուածին բարձրութիւնն է 4 ոտք, ի՞նչ է անոր ծաւալը :

Պ. 435·6352 խոր. ոտք :

15. Եթէ գնդական հատուածի մը մէկ խարսխին տրամագիծն է 20 ոտք, միւս խարսխինը՝ 12 ոտք, եւ անոր բարձրութիւնը՝ 2 ոտք, ի՞նչ է հատուածին ծաւալը, եւ ի՞նչ՝ գնդոյն տրամագիծը :

Պ. { Հատուածին ծաւալը 431·45 խոր. ոտք
Գնդոյն տրամագիծը 36·054 ոտք :

16. Երեք իրարու հաւասար բոլորակներ դրսէն իրար կը շօշափեն եւ այնպէս 160 քառակուսի ոտք անոնց մէջտեղը կ'իյնայ. ի՞նչ է իւրաքանչիւր բոլորակին տրամագիծը : Պ. 62·96+ոտք :

17. Եթէ հաւասարակողմ եռանկեան մէջի մէկ կէտէն մինչեւ եռանկեան այլեւայլ անկեանց գագաթները քաշուած գծերն են ա, բ եւ գ, ի՞նչ է եռանկեան իւրաքանչիւր կողմը :

Պ. $\frac{2(ա+բ+գ)}{\sqrt{3}}$:

18. Եթէ ուղղանկիւն եռանկեան մը մէկ սուր անկեան գագաթէն մինչեւ անոր դիմացի կողման միջին կէտը քաշուած գիծը ա է, եւ միւս սուր անկեան գագաթէն մինչեւ անոր դիմացի կողման միջին կէտը քաշուած գիծը բ է, ի՞նչ են ուղիղ անկիւնը կազմող կողմերը :

Պ. $2\sqrt{\frac{4}{15}ա^2-\frac{1}{15}բ^2}$, եւ $2\sqrt{\frac{4}{15}բ^2-\frac{1}{15}ա^2}$:

19. Բոլորակի մը մէջ երեք իրարու հաւասար բոլորակներ այնպէս գծուած են որ մեծ շրջանակը ներ-

սէն կը շօշափեն, եւ իրար՝ դրսէն. եթէ մեծ բոլորակին տրամագիծն է 10, ի՞նչ է իւրաքանչիւր փոքր բոլորակին տրամագիծը :

Պ. $10(2\sqrt{3}-3)=4·64+$:

20. Եթէ երկկողմնազոյգ եռանկեան մը հաւասար կողմանց իւրաքանչիւրն է ա, եւ խարիսխը՝ 2բ, ի՞նչ է ներսը գծուած բոլորակին շառաւիղը :

Պ. $\frac{բ\sqrt{ա-բ}}{\sqrt{ա+բ}}$:

ՎԵՐՋ

10ր.

60 к